Dr. Ing. Josip Baturić — Zagreb

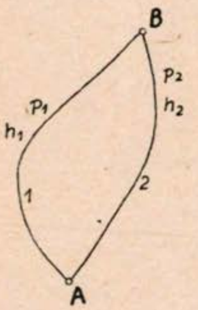
Izjednačenje metodom opće aritmetičke sredine

Izjednačenje metodom opće aritmetičke sredine može se upotrebiti kod mreža koje se mogu predočiti kao centralni sistemi.

U početku objasniti ćemo princip izjednačenja u nivelacionoj mreži. Vlakove koji dolaze u obzir za izjednačenje treba najprije podijeliti na t. zv. paralelne (usporedne) i serijske (uzastopne) vlakove.

Paralelni nivelacioni vlakovi predočeni su u slici 1. Od zadane točke A do tražene točke B mjerena su dva vlaka 1 i 2. Rezultati mjerenja su visinske razlike h_1 i h_2 sa kvalitetama p_1 i p_2 već prema dužini nivelacionog vlaka. Oba vlaka mogu se zamijeniti jednim novim vlakom sa kvalitetom $p_{AB} = p_1 + p_2$ kod kojega će visinska razlika točaka A i B iznositi:

$$h_{AB} = \frac{h_1 p_1 + h_2 p_2}{p_1 + p_2} = h_0 + \frac{\Delta h_1 p_1 + \Delta h_2 p_2}{p_1 + p_2}$$



Sl. 1

pri čemu je h_0 približno odabrana vrijednost a $\Delta h_1 = h_1 - h_0$ i $\Delta h_2 = h_2 - h_0$ su ostaci.

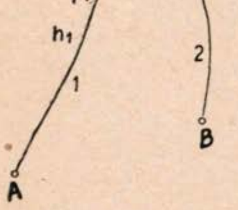
Izaberemo li da je $h_0 = h_2$ jednadžba dobiva jednostavniji oblik, naime

$$h_{AB} = h_2 + \frac{\Delta h_1 p_1}{p_1 + p_2}$$

gdje je $\Delta h_1 = h_1 - h_2$.

U slici 2. predočen je drugi slučaj paralelnih vlakova. Od zadane točke A i B do točke C mjerena su dva vlaka 1 i 2. U prvom vlaku od točke A određena je visinska razlika h_1 sa kvalitetom p_1. U drugom vlaku od točke B određena je visinska razlika h_2 sa kvalitetom p_2. Analogno kao u prijašnjem primjeru oba vlaka zamijenimo jednim novim vlakom sa kvalitetom $p_{BC} = p_1 + p_2$ uzevši u obzir i visinsku razliku između točaka A i B. Visinska razlika između točaka B i C bit će

$$h_{BC} = c \frac{h_{BA} + h_1) p_1 + h_2 p_2}{p_1 + p_2} = h_0 + \frac{\Delta h_1 p_1 + \Delta h_2 p_2}{p_1 + p_2}$$



Sl. 2

Uvrstimo li za $h_0 = h_2$ dobivamo jednostavniji oblik jednadžbe i to

$$h_{BC} = h_2 + \frac{\Delta h_1 p_1}{p_1 + p_2}$$

kod čega je $\Delta h_1 = (h_{BA} + h_1) - h_2$.

Serijski vlakovi predočeni su u slici 3. Od zadane točke A preko točke B treba odrediti točku C. Prvom vlaku od A do B sa visinskom razlikom h_1 i kvalitetom p_1 dodaje se drugi vlak BC sa visinskom razlikom h_2 i kvalitetom p_2 tako da se dobije vlak sa visinskom razlikom

$$h_{AC} = h_1 + h_2$$

sa recipročnim kvalitetama

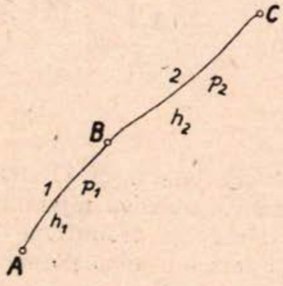
$$\frac{1}{p_{AC}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$

Na osnovu dosadašnjih izvoda možemo postaviti ova pravila:

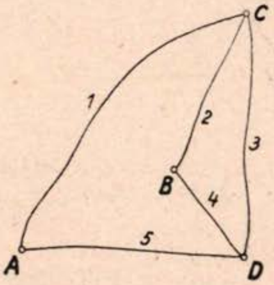
Kod paralelnih vlakova mjereni se vlakovi zamijene jednim novim vlakom pri čemu je kvaliteta novog vlaka jednaka zbroju kvaliteta prijašnjih vlakova.

Kod serijskih vlakova mjereni se vlakovi zamijene jednim novim vlakom pri čemu je recipročna kvaliteta novog vlaka jednaka zbroju recipročnih kvalitete prijašnjih vlakova.

Recipročne kvalitete su razmjerne sa kvadratom srednjih pogrešaka te je prema tome kod serijskih vlakova kvadrat srednje pogreške novog vlaka jednak zbroju kvadrata srednjih pogrešaka prijašnjih vlakova.



Sl. 3



Sl. 4

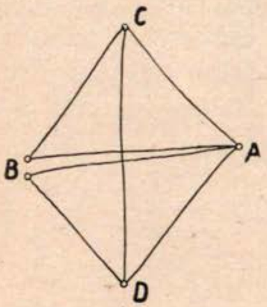
Kombinacije paralelnih i serijskih vlakova vide se u nivelacionoj mreži (sl. 4.) u kojoj su zadane apsolutne visine točaka A i B. Točka C odredi se prema postupku u slici 2., t. j. pomoću visinskih razlika h_1 i h_2 paralelnih vlakova 1 i 2. Točku D odredimo tako da na visinskoj razlici h_{BC} dodamo u seriji visinsku razliku h_3 (analogno postupku u slici 3.) Tako određena točka D je privremena te se stoga odredi još i sa paralelnim vlakom 4, sa visinskom razlikom h_4 koja odgovara visinskoj razlici h_{BD}. Sada visinskoj razlici h_{BD} dodamo u seriji vlak 5. Ovaj rezultat morao bi se slagati sa visinom točke A. Nastalo odstupanje razdijeli se na visinsku razliku h_5 i h_{BD} u odnosu njihovih recipročnih kvaliteta.

Popravljenu vrijednost h_5 odbijemo od točke A i dobijemo konačni izjednačeni položaj točke D. Odstupanje od prijašnje vrijednosti točke D dijeli se na visinske razlike h_3 i h_{BC} u odnosu njihovih recipročnih kvaliteta. Ako sada od konačne vrijednosti točke D odbijemo popravljenu visinsku razliku h_3 dobijemo definitivnu vrijednost točke C.

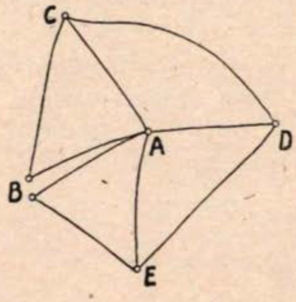
Računanje sa diferencijama Δh_1, Δh_2, i t. d. je povoljnije nego li sa čitavim vrijednostima h_1, h_2, i t. d. budući da su brojevi za računanje maleni a čitav se račun može dovoljno točno odrediti logaritamskim računalom.

Izjednačenje centralnog sistema. Centralnim sistemom kod nivelacione mreže naziva se takova mreža kod koje je jedna centralna točka spojena vlakovima sa svim čvornim točkama a čvorne su točke još međusobno povezane posebnim zatvorenim vlakovima. Jednostavni oblik mreže vidi se u slici 5. Točka A je centralna iako bi se svaka točka mogla preuzeti kao centralna točka.

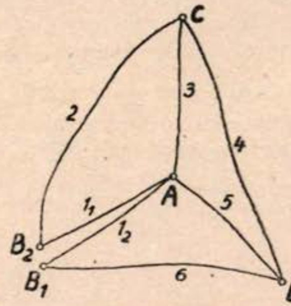
Slika 6. prikazuje jednostavnu mrežu u kojoj može biti centralna točka samo točka A budući da ona jedina ima vezu sa svim ostalim točkama.



Sl. 5



Sl. 6



Sl. 7

U slici 7. vidi se nivelaciona mreža sa čvorištima A, B, C i D u kojoj je zadana samo točka A. Visinske razlike pojedinih vlakova mjerene su odnosnim kvalitetama p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6. Za određenje definitivne izjednačene vrijednosti jedne od točaka, n. pr. točke B upotrebit ćemo posebni postupak.

U svrhu izjednačenja predpostavimo da je vlak 1 mjeren 4 puta (rezultati mjerenja su isti) ali svaki puta sa kvalitetom $\frac{p_1}{4}$ Svi ostali vlakovi mjereni su dva puta ali svaki put sa polovičnom kvalitetom, n. pr. $p_2/_2$, $p_3/_2$ i t. d.

Uz ove pretpostavke može se smatrati da se vlak 1 (A do B) sastoji iz vlaka 1_1 (A do B_2) i vlaka 1_2 (A do B_1) svaki sa kvalitetom $\frac{p_1}{4}$

Prema tome imamo nivelacionu mrežu koja je mjerena dva puta sa ovim vlakovima i odnosnim kvalitetama:

Vlak	1_1,	2,	3,	4,	5,	6,	1_2
Kvaliteta	$\frac{p_1}{4}$,	$\frac{p_2}{2}$,	$\frac{p_3}{2}$,	$\frac{p_4}{2}$,	$\frac{p_5}{2}$,	$\frac{p_6}{2}$,	$\frac{p_1}{4}$

Budući da su kvalitete srazmjerni brojevi možemo ih množiti sa 2, tako da dobijemo

$$\frac{p_1}{2},\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6,\ \frac{p_1}{2}$$

Uvedimo sada redoslijed određivanja točaka jednim smjerom do točke B_1 za jedno mjerenje mreže i to:

Iz polazne točke A zbrajanjem dvaju serijskih vlakova 1_1 i 2 odredimo privremenu točku (C) koja sa paralelnim vlakom 3 daje aritmetičku sredinu za točku C. Točki C dodamo u seriji vlak 4 i na taj način odredimo točku (D) koja sa paralelnim vlakom 5 daje aritmetičku sredinu za točku D. Tako određenoj vrijednosti za točku D dodamo u seriji vlak 6 da odredimo točku (B) koja sa paralelnim vlakom 1_2 daje aritmetičku sredinu za točku B_1.

Kod drugog mjerenja mreže određujemo uzastopne čvorne točke do točke B_2 protivnim redoslijedom i to ovako:

Počev od polazne točke vlakovi $1_2 + 6$ sa vlakom 5 daju aritmetičku sredinu za točku D. Točki D dodamo vlak 4 koji sa vlakom 3 daje aritmetičku sredinu za točku C. Na kraju točki C dodamo vlak 2 koji sa vlakom 1_1 daje aritmetičku sredinu za točku B_2.

Pri gornjem određivanju vrijednosti točaka odredimo i njihovu kvalitetu.

Rezultati za točke B_1 i B_2 se redovno ne će slagati niti će imati istu kvalitetu. Stoga od rezultata B_1 i B_2 učinimo opću aritmetičku sredinu i dobijemo izjednačeni položaj točke B.

Daljnji postupak isti je kao za slučaj u slici 4. Točka B smatra se sada zadanom pored već zadane točke A. Također se i nivelacioni vlak 1 više ne izjednačuje već se smatra zadanim, bez pogreške, sa recipročnom kvalitetom jednakom $\frac{1}{p} = 0$.

Za obrazloženje i opravdanje gornjeg načina izjednačenja obrađen je veći broj primjera iz literature koji su već izjednačeni metodom najmanjih kvadrata. Sravnjivanjem rezultata dolazimo do zaključka da je izjednačenje metodom opće aritmetičke sredine potpuno ekvivalentno izjednačenju po metodi najmanjih kvadrata.

P r i m j e r 1. (Werkmeister: Einführung in die Ausgleichungsrechnung, str. 100, 135, 164).

Zadana je nadmorska visina točka A, H = 237,483 m (sl. 8.) Nivelacijom određene su ove visinske razlike na dužini s a sa kvalitetom **p**:

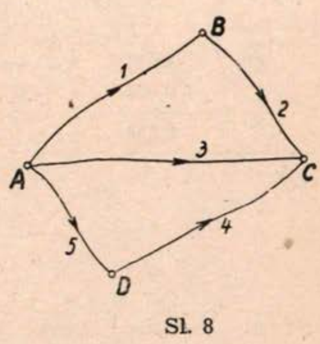
$h_1 = 5{,}835$ m $\quad s_1 = 3{,}5$ km $= \frac{1}{p_1} \quad p_1 = 0{,}29$

$h_2 = 3{,}782$ m $\quad s_2 = 2{,}7$ km $= \frac{1}{p_2} \quad p_2 = 0{,}37$

$h_3 = 9{,}640$ m $\quad s_3 = 4{,}0$ km $= \frac{1}{p_3} \quad p_3 = 0{,}25$

$h_4 = 7{,}384$ m $\quad s_4 = 3{,}0$ km $= \frac{1}{p_4} \quad p_4 = 0{,}33$

$h_5 = 2{,}270$ m $\quad s_5 = 2{,}5$ km $= \frac{1}{p_5} \quad p_5 = 0{,}40$



Sl. 8

Napomena: Primjer ne odgovara zatvorenom centralnom sistemu budući da nije mjeren direktni vlak između točaka B i D.

Kako se vidi iz donjih tablica od točke A preko točke B do C zbrojimo vlakove 1 i 2 u seriji i dobijemo prvu vrijednost C_1 za točku C. Vlak 3 od točke A do C određuje nam drugu vrijednost C_2. Zatim od točke A preko D do C zbrojimo vlakove 5 i 4 u seriji te na taj način dobijemo treću vrijednost C_3.

Tablica 1

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$
1	5,835		3,5
2	3,782		2,7
C_1	9,619	0,16	6,2

vlak	h	p
3	9,640	0,25
C_2	9,640	0,25

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$
5	2,270		2,5
4	7,384		3,0
C_3	9,654	0,18	5,5

Budući da su vlakovi od A do C_1 i od A do C_2 dva paralelna vlaka te od rezultata C_1 i C_2 učinimo opću aritmetičku sredinu (C), naime

Tablica 2

	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
C_1	9,617	0,16		23	3,7	
C_2	9,640	0,25				
(C)	9,631	0,41			3,7	9

Rezultirajući vlak od A do (C) i vlak od A do C_3 stvaraju također dva paralelna vlaka te zbog toga učinimo novu opću aritmetičku sredinu od rezultata (C) i C_3 što nam predstavlja izjednačenu vrijednost točke C.

Tablica 3

	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
(C)	9,631	0,41		23	9,4	
C_3	9,654	0,18				
C	9,638	0,59			9,4	16

Tablica 4

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
1	5,835	0,29		21	6,1	
AC+2	5,856	0,37				
B	5,847	0,66			6,1	9

Točka C je definitivna izjednačena vrijednost visinske razlike od A do C.

Za određenje definitivne izjednačene vrijednosti h_1 smatramo točke A i C zadanima kod čega se točka B odredi iz dvaju paralelnih vlakova 1 i AC + 2, gdje je AC + 2 = 9,638 — 3,782 = 5,856. Ostali račun vidi se iz tablice.

Analognim postupkom odredi se točka D pomoću dvaju paralelnih vlakova 5 i AC + 4 = 9,638 — 7,384 = 2,254.

Tablica 5

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
5	2,270	0,40		16	6,4	
AC+4	2,254	0,33				
D	2,263	0,73			6,4	9

Prema tome definitivne izjednačene visinske razlike iznose:

vlak	h	v	vv	p	pvv
1	5,847	+ 12	144	0,29	42
2	3,791	+ 9	81	0,37	30
3	9,638	— 2	4	0,25	1
4	7,375	— 9	81	0,33	27
5	2,263	— 7	49	0,40	20
					120 = [pvv]

Izabrana težina p = 1 odnosi se na nivelacioni vlak dužine 1 km.

Srednja pogreška za kvalitetu jednaku jedinici, t. j. srednja pogreška niveliranja vlaka od 1 km dužine iznosi:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-\mu}} = \sqrt{\frac{120}{5-3}} = 7,7 \text{ mm}$$

ako je n broj visinskih razlika, μ broj nepoznanica, odnosno $n - \mu$ je broj suvišnih visinskih razlika.

Srednja pogreška pojedine mjerene visinske razlike bit će

$$\mu_1 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_1}} = \frac{7,7}{\sqrt{0,29}} = \pm\, 14 \text{ mm} \qquad \mu_3 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_3}} = \frac{7,7}{\sqrt{0,25}} = \pm\, 15 \text{ mm}$$

$$\mu_2 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_2}} = \frac{7,7}{\sqrt{0,37}} = \pm\, 13 \text{ mm} \qquad \mu_4 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_4}} = \frac{7,7}{\sqrt{0,33}} = \pm\, 13 \text{ mm}$$

$$\mu_5 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_5}} = \frac{7,7}{\sqrt{0,40}} = \pm\, 12 \text{ mm}$$

Srednja pogreška nakon izjednačenja za vlak AC iznosi

$$\mu_{AC} = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_C}} = \frac{7,7}{\sqrt{0,59}} = \pm\, 10 \text{ mm}$$

Račun kvalitete vlaka AD nakon izjednačenja
Srednja pogreška poslije izjednačenja za vlak AD bit će

$$\mu_{AD} = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_D}} = \frac{7,6}{\sqrt{0,59}} = \pm 10 \text{ mm}$$

Račun kvalitete vlaka AB poslije izjednačenja

Tablica 6

vlak	p	$\frac{1}{p}$
(C)	0,41	2,4
4		3,0
(D)	0,19	5,4
5	0,40	
D	0,59	

Tablica 7

vlak	p	$\frac{1}{p}$
C_3	0,18	5,5
C_2	0,25	
(C)	0,43	2,3
2		2,7
(B)	0,20	5,0
1	0,29	
B	0,49	

Srednja pogreška vlaka AB poslije izjednačenja je

$$\mu_{AB} = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_B}} = \frac{7,7}{\sqrt{0,49}} = \pm 11 \text{ mm}$$

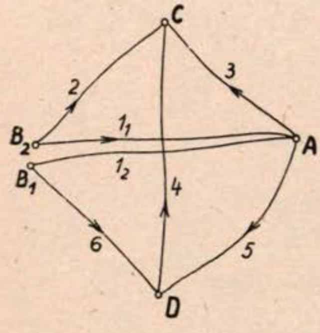
Svi rezultati potpuno se slažu sa izjednačenjem po metodi najmanjih kvadrata.

P r i m j e r 2. (Vogler: Geodetische Übungen II. Teil, str. 166. gdje je navedeni primjer izjednačen po metodi najmanjih kvadrata.)

Ovaj primjer odgovara centralnom sistemu nivelacione mreže kod kojega su kvalitete za svaki vlak jednake.

Podaci su ovi:

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$
1	1,264	1	1
2	7,261	1	1
3	6,003	1	1
4	1,483	1	1
5	4,523	1	1
6	5,794	1	1



Sl. 9

Za vlak 1 uvedemo dva nova vlaka:

Tablica 8

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$
1_1	1,264	0,50	2
1_2	1,264	0,50	2

Tablica 9

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$	vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
1_1	—1,2640		2				1_2	—1,2640		2			
2	7,2610		1				6	5,7940		1			
(C)	5,9970	0,333	3	60	20,0		(D)	4,5300	0,333	3	70	23,4	
3	6,0030	1					5	4,5230	1				
C	6,0015	1,333	0,75		20,0	15	D	4,5248	1,333	0,75		23,4	18
4	—1,4830		1,00				4	1,4830		1,00			
(D)	4,5185	0,572	1,75	45	25,7		(C)	6,0078	0,572	1,75	48	27,4	
5	4,5230	1					3	6,0030	1				
D	4,5214	1,572	0,64		25,7	16	C	6,0047	1,572	0,64		27,4	17
6	—5,7940		1				2	—7,2610		1			
(B)	—1,2726	0,61	1,64	86	52,5		(B)	—1,2563	0,61	1,64	77	47,0	
1_2	—1,2640	0,50					1_1	—1,2640	0,50				
B_1	—1,2687	1,11			52,5	47	B_2	—1,2598	1,11			47,0	42

Od točke a (sl. 9.) jednim smjerom odredimo točku B račun s lijeve strane donje tablice) a drugim suprotnim smjerom od točke A odredimo točku B_2 (račun s desne strane).

Pod određenjem bilo koje točke (n. pr. B) razumijeva se zapravo određenje visinske razlike odnosne točke od polazne točke A.

Opća aritmetička sredina rezultata B_1 i B_2 je:

Tablica 10

	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
B_1	—1,2687	1,11		89	98,8	
B_2	—1,2598	1,11				
B	—1,2642	2,22			98,8	44

Nakon određenja izjednačene visinske razlike točke B od točke A, smatramo obje točke A i B zadanima i izjednačimo točke C i D ovim postupkom: Prvim redoslijedom odredimo točku C_1 i D_1 i njihove kvalitete:

Tablica 11

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
B	—1,2642		0,0			
2	7,2610		1			
C	5,9968	1	1	62	62	
3	6,0030	1				
C_1	5,9999	2	0,5		62	31
4	—1,4830		1			
D	4,5169	0,667	1,5	61	41	
5	4,5230	1				
D_1	4,5205	1,667	0,6			

Zatim odredimo točku D_2 polazeći iz točke B kojoj je recipročna kvaliteta jednaka nuli:

Tablica 12

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$
B	—1,2642		∅
6	5,7940		1
D_2	4,5298	1	1

Opća aritmetička sredina iz rezultata D_1 i D_2 daje vrijednost izjednačene visinske razlike točke D od točke A:

Tablica 13

	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
D_1	4,5205	1,667		93	155	
D_2	4,5298	1,000				
D	4,5240	2,667			155	58

Polazeći iz točke D kojoj je sada recipročna kvaliteta jednaka nuli, odredimo točku C_2 koja sa C_1 daje opću aritmetičku sredinu visinske razlike točke C od točke A:

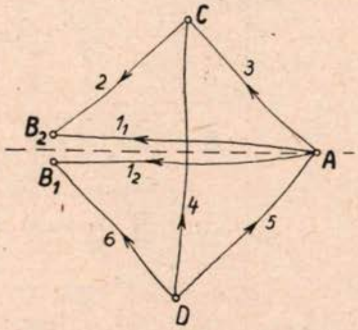
Tablica 14

	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
D	4,5240		∅			
4	1,4830		1			
C_2	6,0070	2	1	71	71	
C_1	5,9999	1				
C	6,0023	3			71	24

Teoretski se dade dokazati da je ovakovo izjednačenje metodom opće aritmetičke sredine za slučaj jednakih kvaliteta potpuno jednako sa izjednačenjem po metodi najmanjih kvadrata, što je ovdje i praktički potvrđeno, budući da se jedni rezultati slažu sa drugima. Isto važi i u slučaju kada su kvalitete dosta različite ali ipak za neke i to simetrične vrijednosti jednake.

P r i m j e r 3. Zadana je nivelaciona mreža sa ovim podacima:

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$
1	71,952	8	0,125
2	61,074	5	0,2
3	10,847	1	1,0
4	25,714	2	0,5
5	14,876	1	1,0
6	86,809	5	0,2



Sl. 10

U slici 10. je crtkano označena os simetrije prema kojoj vlakovi imaju simetrične kvalitete i to $p_2 = p_6 = 5$ i $p_3 = p_5 = 1$.

Izjednačavanje započinje od točke A time da za početni vlak 1 uvedemo dva nova vlaka:

Tablica 15

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$
1_1	71,952	4,0	0,25
1_2	71,952	4,0	0.25

Sada najprije jednim smjerom od točke A odredimo točku B_1 a zatim drugim suprotnim smjerom od točke A odredimo točku B_2.

Tablica 16

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{p}$	vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
1_1	71,9520		0,25				1_2	71,9520		0,25			
—2	—61,0740		0,2				—6	—86,8090		0,2			
(C)	10,8780	2,22	0,45	310	688		(D)	14,8570	2,22	0,45	190	422	
3	10,8470	1,0					—5	—14,8760	1,0				
C	10,8684	3,22	0,31		688	214	D	—14,8629	3,22	0,31		422	131
—4	—25,7140		0,5				4	25,7140		0,50			
(D)	—14,8456	1,234	0,81	304	375		(C)	10,8511	1,234	0,81	41	51	
—5	—14,8760	1,0					3	10,8470	1,0				
D	—14,8592	2,234	0,45		375	168	C	10,8493	2,234	0,45		51	23
6	86,8090		0,2				2	61,0740		0,20			
(B)	71,9498	1,538	0,65	22	33,8		(B)	71,9233	1,538	0,65	287	441	
1_2	71,9520	4,0					1_1	71,9520	4,0				
B_1	71,9514	5,538			33,8	6	B_2	71,9440	5,538			441	80

Opća aritmetička sredina rezultata B_1 i B_2 je

Tablica 17

	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
B_1	71,9514	5,538		74	410	
B_2	71,9440	5,538				
B	71,9477	11,076			410	37

Točka B je time izjednačena te se smatra da ima recipročnu kvalitetu jednaku 0, što znači da se u daljnjem izjednačenju njezina vrijednost ne mijenja.

Počev od točke B ponovimo prvi redoslijed i odredimo točke C_1 i D_1

Tablica 18

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
B	71,9477		0,0			
—2	—61,0740		0,2			
(C)	10,8737	5,0	0,2	267	1335	
3	10,8470	1,0				
C_1	10,8692	6,0	0,167		1335	222
—4	—25,7140		0,5			
(D)	—14,8448	1,5	0,667	312	468	
—5	—14,8760	1,0				
D_1	—14,8573	2,5			468	187

Suprotnim smjerom od točke B odredi se točke D_2 i C_2 odnosno njihove definitivne vrijednosti D i C:

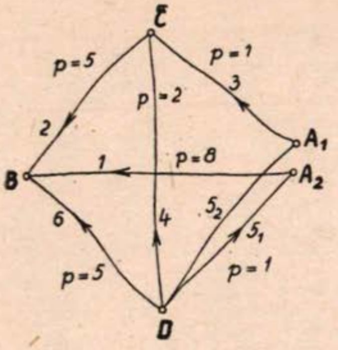
Tablica 19

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
B	71,9477		0,0			
—6	—86,8090		0,2			
D_2	—14,8613	5,0	0,2	40	200	
D_1	—14,8573	2,5				
	—14,8600	7,5	0,0		200	27
4	25,7140		0,5			
C_2	10,8540	2,0	0,5	152	304	
C_1	10,8692	6,0				
C	10,8654	8,0			304	38

Tablica 20

	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$	vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{r\Delta h}{\Sigma p}$
5_1	14,8760		2,0				5_2	14,8760		2,0			
1	71,9520		0,125				3	10,8470		1,0			
(B)	86,8280	0,47	2,125	190	89		(C)	25,7230	0,333	3,0	90	30	
6	86,8090	5,0					4	25,7140	2,0				
B	86,8106	5,47	0,183		89	16	C	25,7153	2,333	0,43		30	13
—2	—61,0740		0,2				2	61,0740		0,2			
(C)	25,7366	2,61	0,383	226	590		(B)	86,7893	1,59	0,63	197	313	
4	25,7140	2,0					6	86,8090	5				
C	25,7268	4,61	0,217		590	128	(B)	86,8043	6,59	0,152		313	47
—3	—10,8470		1,0				—1	—71,9520		0,125			
(A)	14,8798	0,82	1,217	38	31		(A)	14,8523	3,61	0,277	237	855	
5_2	14,8760	0,5					5_1	14,8760	0,5				
A_1	14,8784	1,32			31	24	A_2	14,8552	4,11			855	208

Izjednačeni rezultati vlakova su ovi:



Sl. 11

vlak	h	v	vv	p	pvv
1	71,9477	43	1 849	8	14 792
2	61,0823	83	6 889	5	34 445
3	10,8654	184	33 856	1	33 856
4	25,7254	114	12 996	2	25 992
5	14,8600	160	25 600	1	25 600
6	86,8077	13	169	5	845

[pvv] = 135 530

Izjednačenje po metodi najmanjih kvadrata pomoću korelata daje puno iste rezultate.

Sada potražimo kod iste slike naročito nepovoljan, t. j. nesimetričan položaj kvaliteta. Umjesto vlaka 5 (sl. 11.) uvedemo dva nova vlaka. Računanje započinje od točke D prema A kod čega jednim smjerom odredimo točku A_1 a drugim suprotnim smjerom točku A_2 (Tablica 20):

Opća aritmetička sredina rezultata A_1 i A_2 je

Tablica 21

	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
A_1	14,8784	1,32		232	306	
A_2	14,8552	4,11				
A	14,8608	5,43			306	56

Odredimo sada točke B_1 i C_1

Tablica 22

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
A	14,8608		0,0			
1	71,9520		0,125			
(B)	86,8128	8,0	0,125	38	304	
6	86,8090	5,0				
B_1	86,8113	13,0	0,077		304	23
—2	—61,0740		0,2			
(C)	25,7373	3,62	0,277	233	841	
4	25,7140	2,0				
C_1	25,7290	5,62			841	150

Odredimo točke C_2 i B_2 i izjednačene točke C i B:

Tablica 23

	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
A	14,8608		0,0			
3	10,8470		1,0			
C_2	25,7078	1,0	1,0	212	212	
C_1	25,7290	5,62				
C	25,7258	6,62			212	32
2	61,0740		0,2			
(B)	86,7998	5,0		115	575	
B_1	86,8113	13,0				
B	86,8081	18,0			575	32

Izjednačeni rezultati vlakova su ovi:

vlak	h	v	vv	p	pvv
1	71,9473	47	2 209	8	17 672
2	61,0823	83	6 889	5	34 445
3	10,8650	180	32 400	1	32 400
4	25,7258	118	13 924	2	27 848
5	14,8608	152	23 104	1	23 104
6	86,8081	9	81	5	405

[pvv] = 135 874

Po metodi najmanjih kvadrata [pvv] = 135 530

344

Razlika u [pvv] iznosi samo 0,25% ili praktički nula. Stoga smatram da je ova metoda opće aritmetičke sredine praktički potpuno ekvivalentna metodi najmanjih kvadrata.

Primjer je uzet iz literature (Hegemann: Ausgleichungsrechnung str. 61.) samo što su kod njega kvalitete vlakova premalo diferencirane jedna od druge tako da je rješenje po metodi opće aritmetičke sredine potpuno jednako rješenju po metodi najmanjih kvadrata.

Kvalitete su ove:

$$p_1 = 4{,}9 \quad p_3 = 7{,}0 \quad p_5 = 6{,}7$$
$$p_2 = 4{,}1 \quad p_4 = 5{,}3 \quad p_6 = 2{,}9$$

Ovdje obrađeni primjer je isti samo što su kod njega izabrane naročito velike razlike u kvalitetama, u svrhu dokaza, kako je uza sve to procenat razlike u sumama [pvv] minimalan.

Teoretski se dade dokazati da je razlika između jedne i druge metode još manja ukoliko se kvalitete međusobno manje razlikuju, odnosno, ukoliko se simetričnost u kvalitetama čim manje razlikuje.

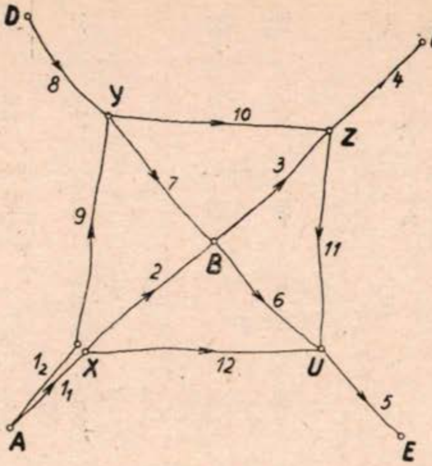
I z j e d n a č e n j e nivelacione mreže umetnute između više zadanih točaka. (Näbauer: Grundzüge der Geodesie. S. 49).

Zadana je apsolutna visina H točaka: A, B, C, D, E (sl. 12.) Zbog lakšeg računanja reduciramo visine točaka na točku A, gdje je H' = 0,000.

Zadano je:

A	108,314	0,000
B	110,637	2,323
C	111,456	3,142
D	109,123	0,809
E	111,279	2,965

Mjereni su vlakovi 1, 2... 12 sa visinskim razlikama h i kvalitetom p naime



Sl. 12

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$
1	1,005	1,18	0,847
2	1,317	1,00	1,000
3	0,313	0,73	1,370
4	0,503	0,83	1,204
5	0,234	0,91	1,100
6	0,407	0,75	1,333

vlak	h	p	
7	0,826	0,97	1,031
8	0,692	0,83	1,204
9	0,497	0,56	1,786
10	1,136	0,48	2,082
11	0,095	0,59	1,694
12	1,728	0,75	1,333

Računanje započinje od točke A time da se za vlak 1 uvrsti dva nova vlaka:

Tablica 24

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$
1_1	1,005	0,59	1,694
1_2	1,005	0,59	1,694

Za olakšanje računanja može se svim mjerenim vrijednostima koje su direktno vezane na zadane čvrste točke promijeniti mjerena vrijednost na taj način da im se pribroji još i veličina reducirane kote zadane točke. Tako reducirane mjerene vrijednosti sačuvaju svoje kvalitete:

Tablica 25

vlak	h	H'	h* red	p	$\frac{1}{p}$
2	1,317	—2,323	—1,006	1,00	1,000
3	0,313	2,323	2,636	0,73	1,370
4	0,503	—3,142	—2,639	0,83	1,204
5	0,234	—2,965	—2,731	0,91	1,100
6	0,407	2,323	2,730	0,75	1,333
7	0,826	—2,323	—1,497	0,97	1,031
8	0,692	0,809	1,501	0,83	1,204

Tablica 26

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$	vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
1_1 —2	1,0050 1,0060	0,59 1,00		10	5,9	4	1_2 9	1,0050 0,4970		1,69 1,79			
X 12	1,0056 1,7280	1,59	0,63 1,33				(Y) —7	1,5020 1,4970	0,29 0,97	3,48	50	14,5	12
(U) —5	2,7336 2,7310	0,51 0,91	1,96	26	13,2	9	(Y') 8	1,4982 1,5010	1,26 0,83		28	35,3	17
(U') 6	2,7319 2,7300	1,42 0,75		19	27	12	Y 10	1,4993 1,1360	2,09	0,48 2,08			
U —11	2,7312 —0,0950	2,17	0,46 1,69				(Z) —4	2,6353 2,6390	0,39 0,83	2,56	37	14,4	12
(Z) 3	2,6362 2,6360	0,47 0,73	2,15	2	0,9	1	(Z') 3	2,6378 2,6360	1,22 0,73		18	2,2	11
(Z') —4	2,6361 2,6390	1,20 0,83		29	34,8	17	Z 11	2,6371 0,0950	1,95	0,51 1,69			
Z —10	2,6373 1,1360	2,03	0,49 2,08				(U) 6	2,7321 2,7300	0,46 0,75	2,20	21	9,7	8
(Y) 8	1,5013 1,5010	0,39 0,83	2,57	3	1,2	1	(U') 5	2,7308 2,7310	1,21 0,91		2	2,4	1
(Y') —7	1,5011 1,4970	1,22 0,97		41	50	23	U —12	2,7309 1,7280	2,12	0,47 1,33			
Y —9	1,4993 —0,4970	2,19	0,46 1,79				(X) —2	1,0029 1,0060	0,56 1,00	1,80	31	17,3	11
(X) 1_2	1,0023 1,0050	0,44 0,59	2,25	27	12	12	(X') 1_1	1,0049 1,0050	1,56 0,59		1	1,56	1
X_1	1,0038	1,03					X_2	1,0049	2,15				

Predznaci se odnose na smjer strjelica ucrtanih u slici.

Budući da se u traženim točkama sakuplja više od 3 vlaka, potrebno je uzeti u obzir i ostale vlakove zbog čega dobivamo privremene vrijednosti traženih točaka: (U) i (U'), i t. d.

Od točke A jednim smjerom odredimo točku X_1, odnosno, od točke A drugim suprotnim smjerom odredimo točku X_2 (Tablica 26):

Opća aritmetička sredina rezultata X_1 i X_2 je

Tablica 27

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
X_1	1,0038	1,03		11	11,3	4
X_2	1,0049	2,15				
X	1,0045	3,18				

Sada odredimo točke U_1, Z_1 i Y_1:

Tablica 28

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
X	1,0045		0,0			
12	1,7280		1,33			
(U)	2,7325	0,75	1,33	15	11,3	7
—5	2,7310	0,91				
(U')	2,7317	1,66		17	28,2	12
6	2,7300	0,75				
U_1	2,7312	2,41	0,41			
—11	—0,0950		1,69			
(Z)	3,6362	0,48	2,10	2	1,0	1
3	2,6360	0,73				
(Z')	2,6361	1,21		29	35,1	17
—4	2,6390	0,83				
Z_1	2,6373	2,04	0,49			
—10	1,1360		2,08			
(Y)	1,5013	0,39	2,57	3	1,2	1
8	1,5010	0,83				
(Y')	1,5011	1,22		41	50	23
—7	1,4970	0,97				
Y_1	1,4993	2,19				

Zatim slijedi račun vrijednosti točaka Y_2, Z_2 i U_2 kao i račun vrijednosti izjednačenih točaka Y, Z i U:

Tablica 29

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\Sigma p}$
X	1,0045		0,00			
9	0,4970		1,79			
Y_2	1,5015	0,56	1,79	22	12,3	4
Y_1	1,4993	2,19				
Y	1,4997	2,75				
10	1,1360		2,08			
Z_2	2,6357	0,48	2,08	16	7,7	3
Z_1	2,6373	2,04				
Z	2,6370	2,52				
11	0,0950		1,69			
U_2	2,7320	0,59	1,69	8	4,7	2
U_1	2,7312	2,41				
U	2,7314	3,00				

Izjednačeni rezultati apsolutnih visina

Tablica 30

Točka	Vlak	h	H
A			108,3140
X	1	1,0045	109,3185
Y	1+9	1,4997	109,8137
Z	1+9+10	2,6370	110,9510
U	1+9+10+11	2,7314	111,0454

Izjednačeni rezultati visinskih razlika

Tablica 31

Točka	vlak	H	h
B		110,6370	
X	2	109,3185	1,3185
Z		110,9510	
B	3	110,6370	0,3140
C	1	111,4560	
Z	4	110,9510	0,5050
E		111,2790	
U	5	111,0454	0,2336
B	6	110,6370	0,4084
Y	7	109,8137	0,8233
D	8	109,1230	0,6907
U		111,0454	
X	12	109,3185	1,7269

Pregled izjednačenih rezultata:

Vlak	h_{mj}	h_{izj}	v	vv	p	pvv
1	1,005	1,0045	— 5	25	1,18	30
2	1,317	1,3185	15	225	1,00	225
3	0,313	0,3140	10	100	0,73	73
4	0,503	0,5050	20	400	0,83	332
5	0,234	0,2336	— 4	16	0,91	15
6	0,407	0,4084	14	196	0,75	147
7	0,826	0,8233	— 27	729	0,97	707
8	0,692	0,6907	— 13	169	0,83	140
9	0,497	0,4952	— 18	324	0,56	181
10	1,136	1,1373	13	169	0,48	81
11	0,095	0,0944	— 6	36	0,59	21
12	1,728	1,7269	— 11	121	0,75	91

2043 = [pvv]

2039 = [pvv]

po metodi najmanjih kvadrata.

Razlika u [pvv] je tako malena, samo 0,2% da se može zanemariti. Uostalom moglo se to unaprijed očekivati, budući da se kvalitete pojedinih vlakova međusobno vrlo malo razlikuju.

Srednja pogreška za kvalitetu jednaku jedinici iznosi

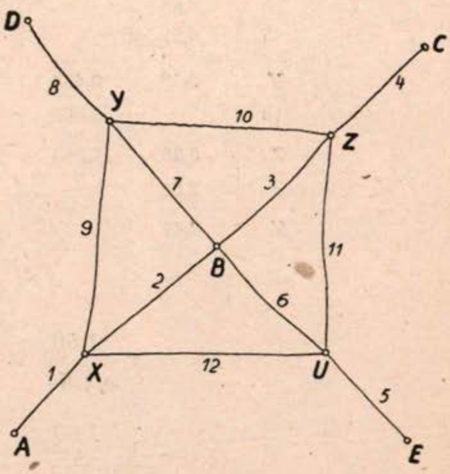
$$m = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-\mu}} = \pm \sqrt{\frac{2043}{12-4}} = \pm 1{,}6 \text{ mm}$$

Za određivanje srednje pogreške nepoznanica potrebno je ići neovisnim putevima, iz suprotnog kraja i po mogućnosti simetrično (sl. 13.) Kod vlakova koji su u seriji, zbrajaju se recipročne kvalitet a kod vlakova koji su paralelni, zbrajaju se kvalitete.

Tablica 32

vlak	p	$\frac{1}{p}$
4		1,204
11		1,694
(U)	0,345	2,898
6	0,75	
5	0,91	
U	2,01	0.498
12		1,333
X_1	0,55	1,831
X_2	2,62	
X	3,17	

vlak	p	$\frac{1}{p}$
3		1,370
10		2,082
(Y)	0,29	3,452
7	0,97	
8	0,83	
Y	2,09	0,478
9		1,786
(X)	0,44	2,264
2	1,00	
1	1,18	
X_2	2,62	



Sl. 13

$$m_x = \pm \frac{1,60}{\sqrt{3,17}} = \pm \frac{1,60}{1,78} = \pm 0,90 \text{ mm}$$

Tablica 33

vlak	p	$\frac{1}{p}$
5		1,100
12		1,333
(X)	0,41	2,433
1	1,18	
2	1,00	
X	2,59	0,386
9		1,786
Y_1	0,46	2,172
Y_2	2,18	
Y	2,64	

vlak	p	$\frac{1}{p}$
6		1,333
11		1,694
(Z)	0,33	3,027
4	0,83	
3	0,73	
Z	1,89	0,528
10		2,082
(Y)	0,38	2,610
7	0,97	
8	0,83	
Y_2	2,18	

Tablica 34

vlak	p	$\frac{1}{p}$
1		0,847
9		1,786
(Y)	0,38	2,633
8	0,83	
7	0,97	
Y	2,18	0,458
10		2,082
Z_1	0,39	2,540
Z_2	2,02	
Z	2,41	

vlak	p	$\frac{1}{p}$
2		1,000
12		1,333
(U)	0,43	2,333
5	0,91	
6	0,75	
U	2,09	0,478
11		1,694
(Z)	0,46	2,172
3	0,73	
4	0,83	
Z_2	2,02	

$$m_y = \pm \frac{1,60}{\sqrt{2,64}} = \pm \frac{1,60}{1,63} = \pm 0,98 \text{ mm}$$

$$m_z = \pm \frac{1,60}{\sqrt{2,41}} = \pm \frac{1,60}{1,55} = \pm 1,03 \text{ mm}$$

Srednje pogreške nepoznanica po metodi najmanjih kvadrata su ove:

Tablica 35

vlak	p	$\frac{1}{p}$
8		1,204
9		1,786
(X)	0,33	2,990
Z	1,00	
1	1,18	
X	2,51	0,398
12		1,333
U_1	0,58	1,731
U_2	2,10	
U	2,68	

vlak	p	$\frac{1}{p}$
7		1,031
10		2,082
(Z)	0,32	3,113
3	0,73	
4	0,83	
Z	1,88	0,532
11		1,694
(U)	0,44	2,226
6	0,75	
5	0,91	
U_2	2,10	

$$m_u = \pm \frac{1,60}{\sqrt{2,68}} = \pm \frac{1,60}{1,64} = \pm 0,97 \text{ mm}$$

$$m_x = \pm 0,89 \text{ mm} \approx \pm 0,9 \text{ mm}$$
$$m_y = \pm 0,98 \text{ mm} \approx \pm 1,0 \text{ mm}$$
$$m_2 = \pm 1,02 \text{ mm} \approx \pm 1,0 \text{ mm}$$
$$m_4 = \pm 0,97 \text{ mm} \approx \pm 1,0 \text{ mm}$$

Razlika između njih i pogrešaka određenih po metodi opće aritmetičke sredine nastaje samo u poslednjoj decimali.

(Nastavak slijedi)