Geodetski list GLASILO SAVEZA GEODETSKIH DRUŠTAVA FEDERATIVNE NARODNE REPUBLIKE JUGOSLAVIJE

GODINA VI. (29) — JANUAR — MART 1952 — BROJ 1-3

Prof. Dr. Ing. N. Čubranić — Zagreb

Prilog poznavanju djelovanja sistematskih pogrešaka

Poznato je da sva mjerenja, bilo kakove vrste ona bila, nisu i ne mogu biti apsolutno točna.

Rezultati mnogih nauka, kao geodezije, astronomije, fizike i t. d. imaju očito za podlogu opažanja, t. j. mjerenja, pa prema tome ne će niti rezultati biti apsolutno točni.

Do spoznaje da mjerenja nisu potpuno točna možemo doći prosto ponavljanjem mjerenja jedne te iste veličine više puta.

Ispitivajući zašto su ta mjerenja više ili manje netočna nalazimo i uzroke:

1. u prvom redu sama pomagala, mjere i instrumenti, nisu apsolutno točni,
2. dalje dolazi nesavršenstvo naših osjetila,
3. zatim nepovoljnost i promljenljivost vanjskih prilika, pri kojima vršimo mjerenja,
4. te konačno nepažnja, nedovoljno stručno znanje opažača.

Pogreška nekog mjerenja može biti rezultat jednog kao i više uzroka.

Imajući više jednako točnih mjerenja za jednu te istu veličinu, možemo mjerenja uspoređivati, pa prema tome i tražiti uzroke njihovih neslaganja.

Nekoji uzroci mogu biti podvrgnuti ispitivanju i tako dobro proučeni, da se njihov utjecaj može u svakom danom slučaju odrediti i iz mjerenja eliminirati. Nekoji bit će takovi, da će dati mjerenja, koja će očito biti sasvim pogrešna. Većinu pak uzroka ne će biti moguće proučiti. Određujući ovako karakter pogrešaka dijelimo pogreške na grube, sistematske i slučajne pogreške.

G r u b e p o g r e š k e. Uzroci grubih pogrešaka bit će svakako nepažnja opažača, loša pomagala, nedovoljno stručno znanje. Najčešći je uzrok njihove pojave nedovoljna pažnja pri mjerenju. Ne mora ta nepažnja biti proizvod nemarnosti, nego čisto fiziološka pojava. Kraj najveće pažnje ista ponekad popusti, a rezultat je gruba pogreška.

Upravo baš da bi uklonili eventualne grube pogreške, da bi dobili neku sigurnost u dobiveni podatak, mi mjerenja ponavljamo. Kod ponavljanja nastojimo raditi pod drugim vanjskim prilikama. Ovo čisto kontrolno mejrenje mora biti iste vrijednosti, točnosti kao ono prvo mjerenje. Takvih ponavljanja t. j. prekobrojnih mjerenja, za jednu veličinu može biti više, pa je očito, da ćemo tako dobiti ne samo kontrolu i sigurnost za mjerenu veličinu, nego i više rezultata za istu. Svi će ti pojedinačni rezultati biti redovito u nekim granicama, koje karakterizira sama metoda rada. U koliko koje mjerenje za veći ili manji iznos pređe granicu karakterističnu za dotičnu vrstu opažanja kažemo da je grubo pogrešno, odnosno da je učinjena gruba pogreška.

Grubo pogrešna mjerenja nastojimo izbaciti, da ne bi imala na rezultat nikakvog utjecaja. No svakako prije izbacivanja jednog takvog mjerenja treba ta mjerenja dobro proučiti i ispitati i naći razlog zašto je napravljena gruba pogreška.

Sistematske pogreške utječu jednostrano (jednoznačno) na mjerenje. Svaki od uzroka prije spomenutih može imati za posljedicu svoju sistematsku pogrešku tzv. elementarnu sistematsku pogrešku. Ukupan njihov učinak utjecat će na mjerenje kao sistematska pogreška mjerenja.

Sve uzroke, koji bi imali za posljedicu sistematske pogreške treba ispitati i sračunati veličinu njihovog utjecaja na samo mjerenje, pa mjerenja za te iznose ispraviti.

Zakone utjecaja drugih izvora pogrešaka, čije smo uzroke na početku spomenuli ne možemo otkriti. Na pr. prosto oko vidi dvije točke, koje se nalaze od oka pod kutom od jedne minute kao jednu točku, što znači da su pri najpažljivijem viziranju na neki predmet pomoću gledača moguće pogreške od —30" do +30", a postanak ove ili one pogreške u tom invervalu zavisi od čiste slučajnosti.

Skup svih ovakovih uzroka rađa pogreške, koje nose karakter slučajnosti. Ove pogreške mogu biti sad pozitivne sad negativne ponajviše vrlo malene, a ponekad i znatne, ali ipak ne tako velike da bi prelazile granicu karakterističnu za dotičnu vrstu mjerenja. Ove pogreške nazivamo slučajnim pogreškama.

Na veličinu ovih pogrešaka djeluju posebice i sumarno raznovrsni uzroci, t. j. u pojedinom mjerenju može biti više elementarnih pogrešaka, koje zbog njihovog karaktera ne možemo ni ispitati ni odvojiti, a još manje odrediti veličinu njihovog utjecaja na samo mjerenje. Zato velimo da ih ne možemo izbjeći, te ih zovemo i neizbježnim pogreškama.

Uzroke takvih pogrešaka možemo naslućivati, a same uzroke možemo prema njihovom karakteru rasporediti na grupe kako smo to učinili na početku ovog razlaganja.

Prvi koji je ispitivao uzroke pogrešaka pri mjerenjima i zakone njihovih utjecaja na rezultate bio je naš naučenjak Ruđer Bošković. Kasnije su se tim zakonima bavili mnogi matematičari, astronomi i geodeti. Najveću je ipak zaslugu stekao Gauss, koji je razmatrajući zakone slučajnih pogrešaka postavio, da je vjerojatnost pojave neke pogreške funkcije veličine te pogreške

$$V(w) = \varphi(w)\,dw,$$

a tražeći oblik te funkcije dobio je konačno da je

$$\varphi(w) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 w^2}$$

Ti se zakoni osnivaju na velikom broju mjerenja neke veličine. Tražeći dalje najpovoljniji rezultat, kod kojeg bi učinjene pogreške bile što povoljnije dolazi do zahtjeva, da suma kvadrata pogrešaka bude minimum:

$$[ww] = \min.$$

Sav naš daljnji rad, traženje najvjerojatnijih vrijednosti za mjerene veličine, bilo da su iste direktno mjerene, ili da su tražene veličine bilo kakve funkcije mjerenih veličina, osniva se na tom zahtjevu. Sav taj rad ima za podlogu slučajnost pogrešaka, odnosno da su pogreške koje su učinjene u mjerenjima samo slučajnog karaktera, t. zv. slučajne pogreške.

Cilj mi je ovdje da iznesem neka svoja zapažanja, nastojeći postaviti stvari kako se one zapravo pojavljuju.

Rekli smo da su sistematske pogreške takove, koje jednostrano djeluju (uvijek sa istim predznakom), da su to takove pogreške, koje se daju i moraju odrediti, odnosno njihov utjecaj mora biti iz mjerenja eliminiran. Razmotrit ćemo ovdje, da li je to zbilja i u stvari tako.

Neke uzroke sistematskih pogrešaka uistinu znamo točno. Na pr. netočno poznavanje veličine same mjere možemo boljom komparacijom sa normalnom mjerom ispitati i naknadno rezultat za odgovarajući iznos popraviti. Mjerenja, koja su podvrgnuta utjecaju temperature možemo popraviti za iznos tog utjecaja. Mjerimo li na pr. kutove ekscentrično, pa znajući to i poznavajući veličinu ekscentričnosti možemo popraviti mjerenja i svesti na centar točke. No mimo tih i takvih uzroka za postanak sistematskih pogrešaka, koji su očiti, ima i takvih uzroka, koje možemo tek naslućivati. Veličinu pogrešaka takvih uzroka ne možemo odrediti pa ih jednostavno ne možemo iz mjerenja eliminirati. Ponekim uzrocima, koje tako naslućujemo možemo odrediti ipak neku zakonitost. Na taj način možemo mjerenja onda tako podesiti, da se samim načinom mjerenja ti uzroci potiru, pa da se poništavaju i eventualno rezultirajuće sistematske pogreške, ili se barem može očekivati, da će se veći dio takve pogreške samim načinom mjerenja ukloniti. Kao jednu od najčešćih sistematskih pogrešaka možemo spomenut ličnu pogrešku. Tako na pr. uho može reagirati uvijek prerano ili uvijek prekasno. Nekoje oko pri viziranju vizirat će uvijek nešto desno, drugo nešto lijevo. Mjereći kutove kao razlike pravaca bit će u tim razlikama eliminirana ovakva pogreška. Spomenut ću još kolimacionu pogrešku, koja se eliminira mjerenjem u dva položaja durbina. Takovih instrumentalnih pogrešaka ima više, koje se onda metodom rada eliminiraju.

Kod nivelmana možemo na pr. pretpostaviti popuštanje tla pod letvom ili instrumentom (pomicanje papuče). Tu se očito ne može ništa konkretno ustanoviti, ali neslaganja u mjerenjima, koja prelaze veličine, koje možemo pripisat samo slučajnim pogreškama upućuju nas u to, da tražimo druge izvore pogrešaka. Dokazuje se da se pomicanje papuče, pa i mnogi drugi uzroci, poništavaju nivelirajući u dva suprotna smjera. Doista okolnosti ne će biti potpuno iste, ali je ipak za očekivati da će se takvim radom barem veći dio ovih pogrešaka ukloniti.

Mogli bi nabrojiti mnogo ovakvih uzroka, koji stvaraju sistematske pogreške, a koje se metodom rada ili potpuno eliminiraju, ili se pak poništava veći dio pogrešaka. Već iz ovih izlaganja biva jasno da će jedan dio makar i malih sistematskih pogrešaka ostati u mjerenjima prikriven. Ima dalje uzroka za stvaranje sistematskih pogrešaka, koje ne samo da naslućujemo, već su nam ti uzroci poznati ali im ne možemo odrediti veličinu, niti ih možemo prosto načinom mjerenja eliminirati. Ovamo na pr. spada pogreška uslijed refrakcije.

Mnoge pak uzroke, vjerojatno niti ne naslućujemo, pa tako niti ne poduzimamo mjere za eventualno njihovo određivanje ili eliminiranje.

Iz svega ovog je jasno, da će u mjerenjima pored slučajnih pogrešaka ostati sakriven i izvjestan dio sistematskih pogrešaka.

Očito te sistematske pogreške, koje su u mjerenjima ostale neeliminirane, redovito ne će biti velike, jer bi bile zapažene, pa bi se tražio uzrok i način za njihovu eliminaciju. One će redovito biti ispod veličina slučajnih pogrešaka. Nekad mogu one biti i znatne, pa po svojoj veličini i prekriti veličine, slučajnih pogrešaka, kao što je to slučaj sa pogreškom u refrakciji kod viziranja na daleke objekte. Nekad ih možemo i ustanoviti, ali post festum, one su u mjerenjima ostale, pa tako su izvršile i jednostran utjecaj na rezultat.

Tako na pr. neslaganja u dugačkim vlakovima preciznog nivelmana ukazuju da je pored slučajnih pogrešaka u mjerenjima ostalo i sistematskih pogrešaka. To se dade i lako dokazati. Prema zakonu o prirastu pogrešaka slučajne pogreške kod nivelmana rastu sa drugim korijenom dužine, a sistematske sa dužinom. Ako su preostale sistematske pogreške po veličini mnogo manje od slučajnih, na kratkim potezima ne će imati utjecaja, pa možemo na kratkim potezima ispitati veličinu slučajne pogreške. Kad istu prihvatimo za dugačak vlak neslaganja su uvijek veća, znači da ih moramo pripisati sistematskim pogreškama, koje će očito na dužoj liniji prema prije spomenutom zakonu jače doći do izražaja.

Mi smo dakle ovdje ustanovili, da u mjerenjima preostaje izvjestan dio sistematskih pogrešaka. Nadalje znamo da je sva teorija vjerojatnosti, teorija pogrešaka i izjednačenja bazirana na zahtjevu, da se predhodno eliminiraju sistematske pogreške t. j. samo na zakonima slučajnih pogrešaka.

Ovdje je stvarno jedan mali, ali ozbiljan, prigovor takovim načinima izjednačenja, pa ćemo razmotriti, kako će preostale sistematske pogreške u mjerenjima utjecati na mjerenjima tražene veličine.

Imamo općenito da je tražena veličina O neka funkcija mjerene veličine

$$O = f(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1$$

gdje je O direktno mjerena veličina, x tražena, a f bilo kakav oblik funkcije. Veličinu O možemo mjeriti više puta, pa zamislimo u izvršenim pojedinačnim mjerenjima izdvojenu veličinu slučajne i sistematske pogreške t. j.:

$$o_1 = O + \varepsilon_1 + \sigma = f(x)$$
$$o_2 = O + \varepsilon_2 + \sigma = f(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$o_p = O + \varepsilon_p + \sigma = f(x)$$

gdje neka ε_1, ε_2 predstavljaju slučajne a σ sistematske pogreške.

Sumiramo li predrnje jednadžbe i podijelimo s brojem mjerenja p, imamo:

$$\frac{[o]}{p} = O + \frac{[\varepsilon]}{p} + \sigma = f(x) \tag{3}$$

Ako zamislimo beskonačno velik broj mjerenja t. j. $p = \infty$, utjecaj slučajnih pogrešaka će po zakonima o slučajnim pogreškama izčeznut t. j.:

$$\frac{[\varepsilon]}{p} = o \tag{4}$$

pa će aritmetska sredina iz p mjerenja biti:

$$O' = \frac{[o]}{p} = O + \sigma = f(x) \tag{5}$$

a inverzijom

$$x = \varphi(O + \sigma) = \varphi\ (O')$$

gdje O predstavlja zamišljene bezpogrešno mjerenu veličinu.

Pošto je σ mala veličina, to razvojem u Taylorov red, zadržavši samo prva dva člana reda, imamo:

$$x = \varphi(O) + \frac{d\varphi}{dO}\sigma \tag{7}$$

Dakle utjecaj sistematske pogreške na rezultat ovisit će direktno o veličini iste, kao i o obliku funkcije.

Očito je, da se ponavljanjem broja mjerenja veličina sistematske pogreške ne smanjuje, pa tako utječe u punom iznosu na računanje veličine x računajući istu kao:

$$x = \varphi(O')$$

Kako je p u praksi većinom konačan broj, $\frac{[\varepsilon]}{p}$ ne će biti nula, pa će veličina O' sadržavati osim sistematske i neku pogrešku kao rezultat slučajnih pogrešaka.

Kod posrednih mjerenja je opažena veličina funkcija više traženih veličina općenito oblika:

$$O = (x, y, z \ldots)$$

gdje neka je broj nepoznanica x, y z... jednak r. Radi njihovog sračunavanja, potrebno je postaviti bar toliko raznih funkcija f koliko imamo i nepoznanica i za njih izvršiti mjerenja. Da bi dobili kontrolu i smanjili utjecaje pogrešaka mjerenja nastojimo postaviti više takovih funkcionalnih odnosa na pr.:

$$\begin{aligned} O_1 &= f_1(x, y, z \ldots) \\ O_2 &= f_2(x,y,z \ldots) \\ &\ldots\ldots \\ O_n &= f_n(x,y,z \ldots) \\ & n > r \end{aligned} \tag{8}$$

U ovim jednadžbama bit će O_i rezultat većeg broja na pr. p direktnih mjerenja, pa jednadžbe 8 možemo obzirom na izraze 3 obilježivši

$$\frac{[\varepsilon]_1}{p}\eta_1; \frac{[\varepsilon]_2}{p} = \eta_2$$

pisati:

$$\begin{aligned} O'_1 &= O_1 + \eta_1 + \sigma_1 = f_1(x, y, z \ldots) \\ O'_2 &= O_2 + \eta_2 + \sigma_2 = f_2(x, y, z \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ O_n &= O_n + \eta_n + \sigma_n = f_n(x, y, z \ldots) \end{aligned}$$

gdje su O'_i direktno izmjerene veličine svake funkcije u p mjerenja (aritmetske sredine), a O_i zamišljene bezpogrešne veličine.

Analizirat ćemo najprije karasteristične osebine pogrešaka η_i i σ_i. Veličine η kao rezultat $\frac{[\varepsilon}{p}$ bit će neke nepoznate male veličine, različite po veličini i preznaku, a imajući pred očima veći broj n možemo reći, da će se sa istom vjerojatnošću pojavljivat pozitivni kao i negativni η i da je vjerojatnost pojave manjeg η veća od vjerojatnosti pojave većeg η. Sa povećanjem broja p mogu se napraviti dovoljno malenim, tako da za $p = \infty$ budu veličine $\eta = o$. Za njih vrijedi sve što je rečeno za slučajne pogreške, pa očito za njih možemo primjeniti sve takove metode (metodu najmanjih kvadrata), koje prema teoriji vjerojatnoće važe za slučajne pogreške. Pojedine veličine σ bit će isto male veličine vjerojatno različite po predznaku. Sa povećanjem broja p njihove se vrijednosti smanjuju. Što je veći broj mjerenja n to će pojavljivanje različitih predznaka biti veće, ali ne možemo tvrditi da će vjerojatnost pojave manjih pogrešaka biti veća od vjerojatnosti pojave većih pogrešaka.

Veliične O, η, σ su nepoznate, a računanje nepoznanica x, y, z možemo provest samo pomoću izmjerenih veličina O'.

Prekobrojna mjerenja (višestruki rezultati $n > r$) omogućuju ipak, da se vodi računa o pogreškama u mjerenjima postavljanjem:

$$
\begin{aligned}
O'_1 + v_1 &= f_1 (x, y, z \cdots) \\
O'_2 + v_2 &= f_2 (x, y, z \cdots) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
O'_n + v_n &= f_n (x, y, z \cdots)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Ovdje σ, prema našem, očito nadomještavaju zbirove $\eta + v_i$ čije prave vrijednosti ne znamo i ne možemo doznati. (Kad je n = r prisiljeni smo postaviti da su v = o i ne možemo suditi o veličinama pogrešaka mjerenja).

Kod rješavanja sistema 10 koristimo metodu najmanjih kvadrata postavljanjem da [vv] bude minimum. Iz tih riješenja dobivamo jednoznačne određene nepoznanice, a i najvjerojatnije vrijednosti za veličine v. Kad bi veličine σ imale sve osobine slučajnih pogrešaka, onda bi veličine v bile zbilja i najvjerojatnije veličine za $\eta + \sigma$. Za veličine σ smo rekli, da će biti različite po veličini i vjerojatno po predznaku, ali da ne možemo usvojiti da su manje pogreške vjerojatnije od većih pogrešaka. Obzirom na ovo metoda najmanjih kvadrata ne će dati najvjerojatnije vrijednosti za pogreške $\eta + \sigma$, a to će utjecati svakako i na veličine sračunatih nepoznanica, pa tu metoda najmanjih kvadrata ne može pružiti ono što od nje očekujemo.

Sistem (10) razvojem na linearni oblik i uvođenjem približnih vrijednosti daje vrijednosti za nepoznanice:

$$
\begin{aligned}
x &= -\alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2 \cdots - \alpha_n l_n \\
y &= -\beta_1 l_1 - \beta_2 l_2 \cdots - \beta_n l_n \\
z &= -\gamma_1 l_1 - \gamma_2 l_2 \cdots - \gamma_n l_n
\end{aligned}
\tag{11}
$$

u kojima sad $l_1, l_2 \ldots l_n$ predstavljaju mjerene veličine (ranije O'), koje sadrže pogreške $\eta + \sigma$ ili v. Kad sistem (10) rješavamo po metodi najmanjih kvadrata, koeficienti α, β, γ biti će:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= Q_{11} a_1 + Q_{12} b_1 + Q_{13} c_1 \\
\alpha_2 &= Q_{11} a_2 + Q_{12} b_2 + Q_{13} c_2 \\
\alpha_n &= Q_{11} a_n + Q_{12} b_n + Q_{12} c_n
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Slični izrazi postavljaju se za koeficiente β i γ. U izrazu 12 su a. b. c. parcijalne derivacije funkcija (10) po x, y, z a Q neki koeficienti težina, koji se mogu na poznati način odrediti. Općenito možemo zaključiti, da će sračunate brojne vrijednosti koeficienata α biti različite po veličini i predznaku. To isto vrijedi i za koeficiente β i γ.

Smatrajući u izrazima (11) veličine $\eta + \sigma$ diferencijalnim veličinama od 1 dobivamo izraze za utjecaje tih pogrešaka na nepoznanice:

$$dx = -\alpha_1(\eta_1 + \sigma_1) - \alpha_2(\eta_2 + \sigma_2) - \cdot \cdot \alpha_n(\eta_n + \sigma_n)$$
$$dy = -\beta_1(\eta_1 + \sigma_1) - \beta_2(\eta_2 + \sigma_2) - \cdot \ \beta_n(\eta_n + \sigma_n)$$
$$dz = -\gamma_1(\eta_1 + \sigma_1) - \gamma_2(\eta_2 + \sigma_2) - \cdot \ \gamma_n(\eta_n + \sigma_n)$$

Na točnost nepoznanica djelovat će po istom funkcionalnom odnosu veličine η, kao i veličine σ, sa razlikom koju smo ustanovili o predznacima η i σ. S istom vjerojatnošću pojavljivat će se pozitivni kao i negativni η, pa dalje obzirom i na razne predznake koeficienata α odnosno β i γ i njihovu veličinu (koja je ovisna i od metode izjednačenja) očekivati je, da će se utjecaji u glavnom iznosu međusobno poništavat i svodit na minimum. Kod veličine σ te vjerojatnosti očito nema, ali ipak možemo sa prilično sigurnosti tvrditi, da će se pojavljivati kako pozitivni tako i negativni predznaci, pa obzirom i na različite predznake koeficienata možemo očekivati i ovdje da će se utjecaj istih pogrešaka u glavnom iznosu poništavati i to ipak tim više čim imamo veći broj n.

Mi smo do sada predpostavljali da se sva mjerenja sistema (8) sastoje iz istog broja pojedinačnih mjerenja p, odnosno da svaka od jednadžbi (8) ima istu težinu, pa uz tu predpostavku vrijede i prednji zaključci. Ako se težine i nešto malo međusobno razlikuju možemo primjeniti iste zaključke. No ako se težine međusobno jako razlikuju, na pr. jedna jednadžba može imati težinu i 10 puta veću od ostalih, što znači da to mjerenje O' smatramo naročito točnim, da smo za istu izvršili 10 puta više pojedinačnih mjerenja, nego za svako od ostalih mjerenja, onda ne možemo više smatrati, da će se utjecaj sistematskih pogrešaka međusobno poništavati.

Težine pojedinim mjerenjima često određujemo i unapred, prije izvršenja mjerenja na osnovu zakona, koji vrijedi za slučajne pogreške. Često su neke težine i po nekoliko, pa i do deset puta veće od drugih. Neke se funkcije i ne uzimaju u obzir, pa se mjerenja O t i h funkcionalnih odnosa i ne mjere, da bi se na račun toga pojačala mjerenja odnosno težine drugih funkcionalnih odnosa. To se događa onda, kad oblik funkcije zahtjeva da se to mjerenje naročito točno izvrši (na pr. mjerenja kutova u bazisnim mrežama).

Mi međutim povećanjem broja pojedinačnih mjerenja za tu funkciju smanjujemo utjecaj slučajne pogreške, pa se može desiti, da je baš u tom mjerenju iznos sistematske pogreške prevelik. Uzevši ovakovo mjerenje sa naročito velikom težinom smatramo ga naročito točnim, skoro bezpogrešnim, što u stvari nije. Ovdje se sistematska pogreška ne će poništavati. Odgovarajuće mjerenje O' dobit će, u usporedbi sa drugima, neznatnu popravku, a rezultat će biti razmjerno pogrešno određivanje nepoznanica x, y, z.

Možemo dakle zaključiti, da će se kod posrednih mjerenja iste ili približno iste točnosti utjecaji sistematskih pogrešaka u mjerenjima na određivanje nepoznanica x, y, z... poništavati, odnosno da će sračunate nepoznanice sa većim brojem n mjerenja O' biti tim više oslobođene i sistematskih pogrešaka. Nadalje da u tom cilju nije preporučivo davati pojedinim mjerenjima bitno različite težine.