P. Rukavina, geometar — Zagreb

Praktični zadaci iz geometrije u geodetskoj praksi

Dioba površina i promjena — regulacija — međa.

U našoj novijoj geodetskoj literaturi i udžbenicima nisu razrađeni praktični zadaci grafičke diobe zemljišta i regulacije međa, koji često dolaze u praksi, naročito kod održavanja katastra zemljišta. Da bi se i mlađi stručnjaci upoznali sa elementarnim načinima grafičke diobe, a na osnovu kojih se mogu rješavati i složeniji slučajevi, prikazat ću sa nekoliko primjera postupak u rješavanju raznih zadataka.

Diobe zemljišnih površina vršimo ili direktno na terenu ili grafički na planu (odakle se prenese na teren) na bazi poznatih geometrijskih pravila (plametrije), za različite oblike geometrijskih likova.

Razlikujemo dvije vrste diobe zemljišta:

a) geometrijska dioba, sa jednakim bonitetom zemljišta, gdje upotrebljavamo samo geometrijska pravila, i

b) ekonomska dioba, sa nejednakim bonitetom zemljišta, gdje se podjela mora izvršiti prema vrijednosti zemljišta.

Ako imamo izvršiti grafičku diobu na bazi nacrta bez originalnih numeričkih mjera, to moramo sve potrebne dužine očitati s pomoću razmjernika sa plana. Svakako te dužine ne odgovaraju dužinama na zemljištu, a koja razlika prema katastarskim propisima (čl. 18. II. dio Pravilnika) mora biti u dozvoljenim granicama. Pošto je najmanja vidljiva dužina za oko 0.10 mm, što znači za jedan i drugi kraj linije 0.20 mm, to se može sa nacrta postići točnosti očitavanja $M \times 0{,}20$ (M = mjerilo) na pr.: za $M = 1 : 2880$ točnost je $2880 \times 0{,}20 = 0{,}57$ m, za koliko može biti duljina kraća ili duža od prave duljine, uzevši u obzir redukciju na horizont kao i promjenu dimenzija papira (usuh). Iz toga vidimo da je relativna pogreška tim manja čim je pravac dulji. Linearni usuh »u« moramo sračunati za jedinicu mjere koliki je u onom pravcu u kome leži naša linija, na pr. po y osovini teoretska dužina
$S = 1000$ hv. $= 1896{,}484$ m, dočim očitana na planu iznaša
$S' = 997{,}20$ hv. ili $1890{,}62$ m.

Razlika »d« = 5,86 m, za 1 m »u« $= \dfrac{d}{S} = \dfrac{5{,}86}{1890{,}62} = 0{,}0031$ ili 0,31%, za taj procenat moramo povećati dužinu očitanu sa plana, a koja leži u pravcu y osovine.

Veličinu »u« za linije koje ne leže usporedno sa y i x osovinom, već u proizvoljnom pravcu, dobijemo na taj način, da izmjerimo na planu što dužu diagonalu D^1 koja je paralelna sa proizvoljnim pravcem, a prolazi kroz cijelu decim. ili palčanu podjelu okvira lista. Teoretska dužina diagonale

$$D = \sqrt{y_p + x_p}$$

x_p, y_p = teoretska dužina kateta diagonale

Razlika $d = D - D'$

$$u = \frac{d}{D'} \text{ (za jedinicu mjere)}$$

Veličina — u — u proizvoljnom pravcu na listu računa se i po formuli: (čl. 17. toč. 6. Instrukcije II. tablica IV.)

$$u = u_{yo} \cos^2\omega + u_{xo} \sin^2\omega$$
$$= u_{yo} \cos^2\omega + u_{xo} \cos^2 (90—\omega)$$
$$u_{yo} = \text{usuh u pravcu y osovine}$$
$$u_{xo} = \text{usuh u pravcu x osovine}$$

ω = kut koji zatvara proizvoljni pravac sa y osovinom, pozitivno

$$u_{yo} = \frac{u_y}{L_y}$$

$$u_{xo} = \frac{u_x}{L_x}$$

uy i ux su stvarne promjene na cijeloj dužini u pravcu y i x, one su jednake razlici između teoretske dužine Ly i izmjerene na planu Lyu:

$$u_y = L_y — L_y u;\ u_x = L_x — L_x u;$$

Granica dozvoljenih odstupanja (△) kod tahim. i graf. snimanja, između mjerene dužine na planu i terenu iznosi cijelo dozvoljeno odstupanje za odgovarajuće dužine i kategorije terena, plus dužina koja odgovara dužini 0,2 mm razmjere plana, (tablica XXXVI—V. dio Prav.):

I. kateg, $\triangle = 0{,}01\ \sqrt{4d + 0{,}005\ d^2}\ + 0{,}2\ M$

II. „ $\triangle = 0{,}01\ \sqrt{6d + 0{,}0075\ d^2}\ + 0{,}2\ M$

III. „ $\triangle = 0{,}01\ \sqrt{8d + 0{,}01\ d^2}\ + 0{,}2\ M$

d = mjerena dužina; M = mjerilo plana.

Kod gradskih planova uzima se ½ dozvoljenog odstupanja za odgovarajuće dužine i kategorije terena, plus dužina koja odgovara dužini od 0,2 mm mjerila plana (tablica XXXV V. dio Pravilnika).

Kod obračuna površina moramo znati koliki je usuh na jedinicu mjere za površine na listu. Katast. mape 1 : 2880 imaju sekcioni pravokutnik:

sa dužinom: y = 1000⁰ = 1896.484 m = 25″ = 65.850 cm;
sa visinom: x = 800⁰ = 1517,187 m = 20″ = 52,680 cm; i
površinu P = 800.000 čhv. = 500 jut. = 287,7321 ha.

Ako ustanovimo prije računanja površina, da je srednja dužina y' =997,20 hv. i srednja visina x' = 796,70 hv, onda je dakle površina P' = 794,469 čhv. = 496 j 869 čhv.

Razlike »d« između teoretske površine lista P i faktične površine lista P':

P = 800.000 čhv.

$$d = \frac{P' = 794.469\ \text{čhv.}}{5.531\ \text{čhv.}} = 3\ \text{j.}\ 731\ \text{čhv.}$$

Prema tome moramo povećati 794.469 čhv. za 5.531 čhv, odnosno za jedinicu mjere:

$$1\ \text{hv.} = \frac{d}{P'} = \frac{5531}{794.469} = 0{,}00696$$

ili svaku površinu povećamo za 0,69%.

Dozvoljena razlika između dviju površina jedne iste parcele dobivene dvostrukim računanjem je: (čl. 104. Prav. V. dio).

$\triangle$ P = 0,2 $\sqrt{P}$ za mjerilo plana 1 : 500

0,4 $\sqrt{P}$ » » » 1 : 1000

1,0 $\sqrt{P}$ » » » 1 : 2500 i 1 : 2880

2,0 $\sqrt{P}$ » » » 1 : 5.000

P = površina parcele izražena u m^2; ako se računa u hvatima onda dozvoljena razlika za 1 : 2880:

$$\triangle P = 0{,}5 \sqrt{P},$$

gdje je P izražena površina u čhv.

A. Geometrijska dioba dužine.

Svaku dužinu možemo geometrijski razdijeliti na »n« jednakih dijelova.

a) u slici 1. razdjelili smo dužinu AB na 5 jednakih djelova tako, da iz jednog kraja A ili B povučemo povoljnu zraku A i na ovu, počevši od točke A nanesemo po volji uzetu dužinu 5 puta. Posljednje djelište 5 spojimo s točkom B i s tom spojnicom povučemo paralele kroz ostala djelišta; te paralele dijele dužinu AB na 5 jednakih djelova.

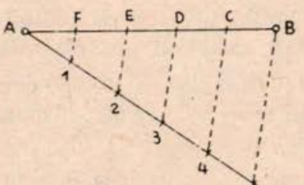
b) Na isti način postupamo ako moramo zadanu dužinu podijeliti u bilo kome omjeru, na pr.: 1 : 3 : 7.

R. Zraka se razdjeli na 1 + 3 + 7 = 11 dijelova; tražene su točke 1 i 4 dijelište brojeći od A.

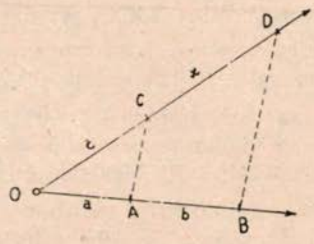
c) Konstrukcija četvrte geometrijske proporcionale.

Trima zadanim dužinama, a, b, c konstruiraj dužinu x tako, da bude a : b = c : x — (Sl. 2)

R. Nacrtaj dvije povoljne zrake ox i oy, nanesi a, b, c, spoji A sa C i povuci BD//AC, na zraci oy dobijemo dužinu x.



Sl. 1.



Sl. 2.

B. Geometrijska dioba likova sa jednakim bonitetom

Kod svake diobe poznamo osnovnu površinu, isto tako moramo znati, na koliko se dijelova dijeli i u kakovom omjeru.

Neka je P površina koja se imade podijeliti u omjeru m : n : p, među vlasnike A, B, C, onda dobije vlasnik A:

$$P_A = \frac{P}{m+n+p}\, m; \text{ vlasnik B: } P_B = \frac{P}{m+n+p}\, n:$$

$$\text{i vlasnik C: } P_C = \frac{P}{m+n+p}\, p$$

Diobe se vrše na bazi poznatih pravila iz geometrije:

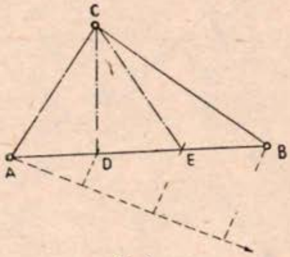
a) Trokuti su jednakih osnovica i jednakih visina među sobom jednaki (Sl.3)
b) Površine trokuta s jednakom osnovicom ali različitim visinama, odnose se kao njihove visine.
c) Površine se sličnih trokuta odnose kao kvadrati dviju homolognih stranica i visina tih trokuta (Sl. 8).
d) Paralelogrami s jednakom osnovicom i visinom imadu jednaku površinu, a kod jednake osnovice ali različite visine odnose se površine kao njihove visine.
e) Narišemo li u trapezu obje diagonale, to su površine trokuta, koji leže na neusporednim stranicama jednake (Sl. 4)

1. Dioba trokuta

a) Razdijeli trokut ABC na tri jednaka trokuta koji imaju zajednički vrh (Sl. 3).

R. Osnovica se razdijeli u jednake dijelove, i djelišta D, E se spoje sa vrhom C.

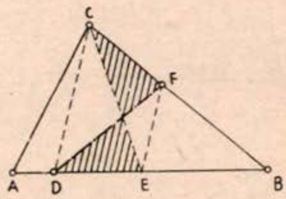
Isti je postupak ako se mora podijeliti u omjeru m : n, s time da stranu AB podijelimo na m + n dijelova.



Sl.3

b) Razdijeli trokut na dva jednaka dijela pravcem, koji ide točkom D stranice AB (Sl. 4).

R. Raspolovimo AB u točki E i spojimo sa C; spojimo C sa D, iz točke E povučemo // sa CD dobijemo F; spojimo FD to je tražena međa.

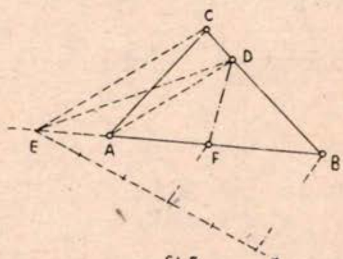


Sl.4

c) Razdijeli trokut u omjeru 3 : 2 da ide diobna crta točkom D (Sl. 5).

R. Trokut ABC pretvorimo u trokut EDB; EB podijelimo u omjeru 3 : 2 u točki F; DF je tražena međa.

d) Razdijeli trokut na tri jednaka dijela, da budu nove međe usporedne sa osnovicom AB (Sl. 6.)



Sl.5

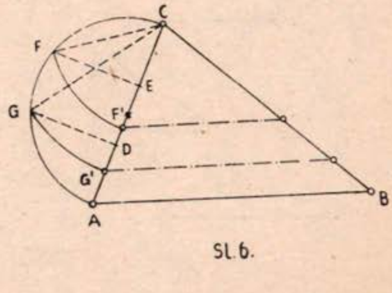
R. Na promjeru AC opiše se polukrug; AC podijeli na tri jednaka dijela, iz djelišta D, E spuste se okomice na polukrug, zatim se na AC prenesu dužine CF i CG, iz točaka F' i G' povučemo // AC i dobijemo tražene međe.

e) Odsijeci od trokuta površinu P1 iz vrha C (Sl. 7)

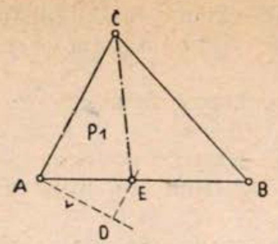
$$\text{R.} \qquad P_1 = \frac{\overline{AC} \cdot v}{2} \qquad v = \frac{2 \cdot P_1}{\overline{AC}}$$

Iz A nanesemo v, povučemo DE paralelno sa AC; ACE je tražena površina.

f) Odsijeci u trokutu od površine P površinu P1 čija je strana paralelna sa AC (Sl. 8).



Sl.6



Sl. 7.

R. $P : P_1 = \overline{AB}^2 : \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{BE}^2 =$
$= \overline{AC}^2 : \overline{DE}^2 = V^2 : VI^2$

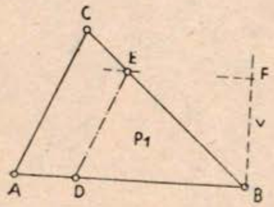
$$\overline{BD}^2 = \frac{\overline{AB}^2 \cdot P_1}{P}$$

g) Odsijeci u trokutu od površine P površinu P1 u omjeru

$$\frac{P_1}{P} = \frac{1}{3}$$

čija je strana paralelna sa AC (Sl. 8.)

R. $P_1 : P = \overline{BD}^2 : \overline{AB}^2$;
$\overline{BD}^2 : \overline{AB}^2 = 1 : 3$; $\overline{BD} = \sqrt{{}^1/_3\, AB^2}$

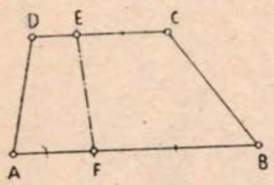


Sl 8

h) Odsijeci u trokutu od površine P površinu P1 koja ide pravcem kroz točku D (Sl. 8)

$$R. \qquad P_1 = \frac{\overline{BD} \cdot v}{2}; v = \frac{2\,P_1}{\overline{BD}}$$

iz B nanesemo v, povučemo FE//AB; BDE je tražena površina.



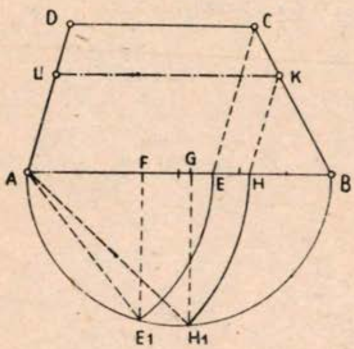
Sl 9

2. Dioba trapeza.

a) Radijeli trapez u omjeru 1 : 2 (Sl. 9)

R. Razdijeli svaku osnovicu na tri jednaka dijela i spoji djelište EF.

b) Odsijeci od trapeza usporedo sa osnovicom CF dio P1 na pr.: $^1/_4$ od površine ABCD. (Sl. 10.)



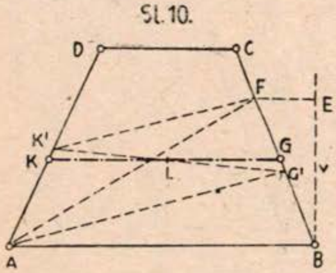
Sl. 10.

I. R. CE//AD, opiši na AB polukrug AE = AE1; iz E1 ⊥ na AB; FB podijeli na 4 dijela, iz G ⊥ do H1; AH1 = AH;

Povuci HK//AD i KL//AB; KL je tražena međa.

II. R. praktično (Sl. 11.)

$$\boxed{P_1 = \frac{\overline{AB} \cdot v}{2};\ v = \frac{2P_1}{\overline{AB}}}$$



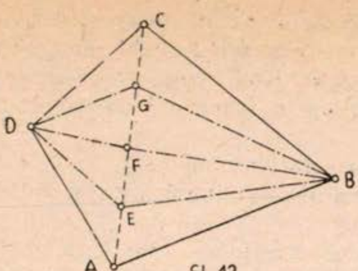
Sl. 11.

iz B nanesemo V ⊥ AB te EF//AB; BF raspolovi u G1; AF premjestimo u G1K1, raspolovimo u točki L kroz koju povučemo // sa AB; GK je tražena međa.

Za kontrolu treba obračunati površine oba dijela.

3. Dioba trapezoida.

Trapezoid ABCD razdijeli na 4 jednaka dijela. (Sl. 12.)



Sl. 12

R. Povuci diagonalu AC, razdijeli na 4 jednaka dijela i djelišta spoji sa BD. Tada je DABE = DEBF = DFBG = $^1/_4$ ABCD.

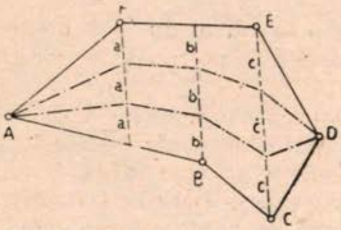
4. Dioba mnogokuta.

Razdijeli parcelu koja je nepravilni mnogokut na 3 jednaka dijela (Sl.13.)

R. Lik razdijelimo u trokute i trapeze i na poznati način ove likove dijelimo na zadane dijelove.

5. Pretvaranje likova u trokute i ispravljanje — regulacija — međa.

Kod grafičkog računanja površina najpovoljniji likovi za obračun jesu trokuti. Kod nepravilnih likova — poligona — nastojimo izlomljene linije pretvoriti u ravne, kako bi dobili prikladne likove trokute ili trapeze kod računanja površina ivičnih kvadrata u palčanoj (rijeđe decimetarskoj) mreži. Dalje se izlomljena međa pretvara u ravnu i kod uređivanja međa u gospodarske svrhe. U tom je slučaju zadatak da se kod zemljišta jednakih boniteta ne mijenjaju površine, a kod različitih boniteta ne mijenja se vrijednost međašnih parcela, dočim površine se mijenjaju.

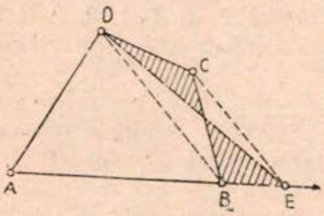


Sl 13.

Zadaci:

a) Ako je parcela konveksni četverokut, onda je njegova površina jednaka zbroju površina onih dvaju trokuta, na koje ga dijeli jedna njegova dijagonala.

$$P = d_1 \frac{v_1 + v_2}{2} \quad \text{za kontrolu} \quad P = d_2 \frac{v_3 + v_4}{2}$$



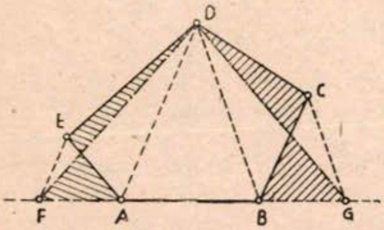
Sl. 14

b) Pretvaranje višekuta u trokut

Ovo se osniva na poznatom svojstvu trapeza da su trokuti a i b jednaki. (Sl. 14.)

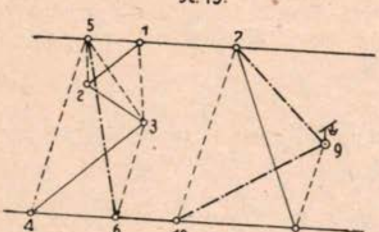
Ovo je temelj za provađanje svakovrsnih dioba i promjena — regulacija — međa kod osnovnih likova. Pretvori trapezoid u trokut (Sl. 14.)

R. Produži AB, povuci. dijagonalu BD i CE//BD, točku E spoji sa D. Tada je ABCD = AED.



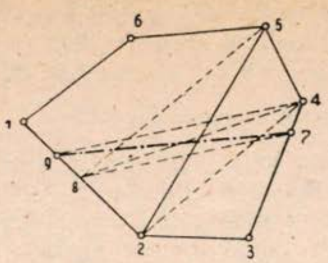
Sl. 15.

c) Pretvori peterokut u trokut (Sl. 15).

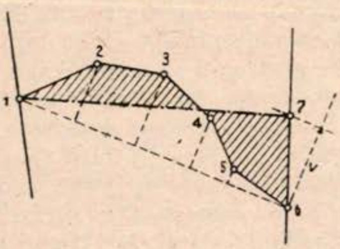


Sl 16

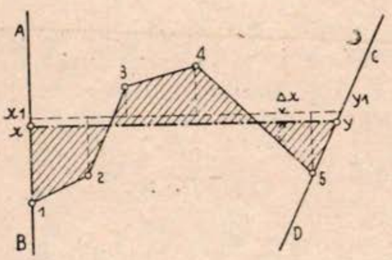
R. Zadani peterokut pretvori najprije u



Sl 17.



Sl 18.



Sl. 19.

četverokut AFDE, a zatim ovaj u trokut GFD. Na isti način možemo svaki mnogokut pretvoriti u trokut. Kod ovoga treba uvijek paziti da se ostane u trapezu i da se prođe svaki kut.

d) Ispravi prelomljenu među 1, 2, 3, 4 u ravnu, s time da se površine čestica ne mijenjaju. (Sl. 16.)

R. Ako imamo među sa više kuteva, to kut po kut odrežemo dok ne dobijemo ravnu među 5, 6.

e) Ako trebamo ravnu među 7—8 premjestiti u zadanu točku 9. postupak je obratan (Sl. 16.)

f) Među 2—5 premesti u točku 7 (Sl. 17.)

R. Najprije prenesemo među 2—5 u točku 4, zatim u 7; 7—9 je tražena međa.

Ako želimo da manja parcela leži do točaka 4, 5, 6, onda među 2—5 prenesemo u točku 3, a zatim u 7.

g) Izlomljenu među, 1, 2, 3, 4, 5, 6 treba izravnati, s time da jedan kraj prolazi kroz točku 1 (Sl. 18.)

R. Pravac 1—6 smatramo kao apscisu na koju snimamo pravokutnim koordinatama točke 2, 3, 4, 5. Izračunamo površinu P poligona 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1.

Treba odrediti površinski jednaki trokut 1, 6, 7. Visina v toga trokuta izračuna se po formuli

$$2P = v \cdot \overline{1{,}6}; \quad v = \frac{2P}{\overline{1{,}6}};$$

h) Izlomljenu među 1, 2, 3, 4, 5 treba izravnati s time da bude okomita na AB. (Sl. 19.)

R. Na AB odredimo okomicu x1—y1 približno. Na nju snimimo pravokutnim koordinatama točke 1—5. Sračunamo površine P1 i Pd koje leže lijevo i desno od x1—y1. Razlika u površinama $\triangle$ P koja se pojavi šinama $\triangle$ P koja se pojavi treba odkloniti na taj način da sračunamo:

$$\triangle x = \frac{\triangle P}{x_1 y_1}$$

zatu veličinu pomaknemo x1y1, paralelno lijevo ili desno, te dobijemo traženu liniju xy.

Na pr.:

Pd = 295 m^2, PL = 173 m^2, x_1y_1 = 61 m^2; $\triangle$ P = 295 — 173 = 122 m^7,

$$\triangle x = \frac{122}{61} = 2{,}0 \text{ m};$$

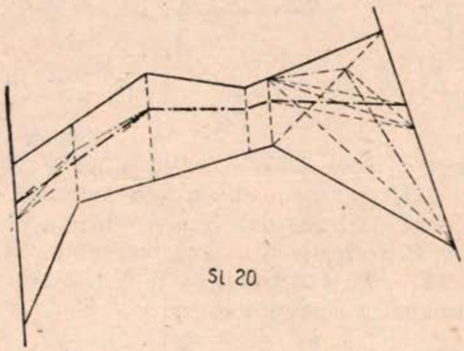
x_1y_1 pomaknemo paralelno u desno za 2,0 m. Za kontrolu ponovo sračunamo površine i mora biti PL = Pd.

i) Razdijeli parcelu nepralnog oblika u omjeru 1 : 2 (Sl. 20.)

R. Podijelimo u trapeze i trokute i ove u zadanom omjeru podijelimo na poznati način, zatim među možemo regulirati da ima što manje preloma.

c) Dioba zemljišta različitih boniteta.

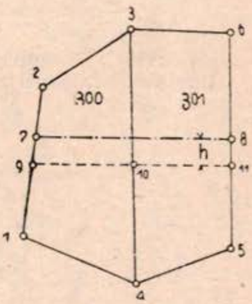
Ako dvije susjedne čestice kod jednake površine P imaju različit bonitet B. t. j. novčana vrijednost V zemljišta nije ista, kod diobe treba uzeti i to u obzir, te podijeliti prema faktičnoj vrijednosti zemljišta (sl. 21.)



Sl 20

$$B = \frac{V}{P}$$

a) Ako imamo zadatak parcelu br. 300 or. sa površinom P1 i bonitetom B1 i br. 301 liv. sa površinom P2 i bonitetom B2, podijeliti na dva dijela jednake vrijednosti linijom 7—8 okomito na 5—6, postupamo na slijedeći način:



Sl 21

Vrijednost čestice br. 300 $V_1 = P_1 \cdot B_1$; za česticu 301 $V_2 = P_2 \cdot B_2$.

U nacrtu povučemo približnu diobnu liniju 9, 10, 11.

Izračunamo površinu $P_{1,\,9,\,10,\,4}$ i $P_{4,\,10,\,11,\,5}$, izračunamo za svaku vrijednost: $V_{7,\,9,\,10,\,4} = P_{1,\,9,\,10,\,4} \times B_1$; $V_{4,\,10,\,11,\,5} = P_{4,\,10,\,11,\,5} \times B_2$.

U nacrtu povučemo približnu diobnu liniju 9, 10, 11.

Izračuna površinu $P_{1,\,9,\,10,\,4}$ i $P_{4,\,10\,11,\,5}$, izračunamo za svaku vrijednost: $V_{1,\,9,\,10,\,4} = P_{1,\,9,\,10\,4} \times B_1$; $V_{4,\,10,\,11,}\,5 = P_{4,\,10,\,11,\,5} \times B_2$.

Te dvije vrijednosti zbrojimo i dobijemo skupnu vrijednost V^1 koja bi trebala biti jednaka polovičnoj vrijednosti cjelokupnog zemljišta

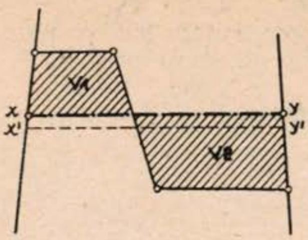
$$V' = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad \text{već dobijemo:} \quad \frac{V}{2} - V' = \triangle\vartheta$$

Toj površini V′ moramo dodati ili oduzeti površinu sa visinom h

$$\frac{V}{2} = V' \pm \triangle\vartheta, \ \triangle\vartheta = \overline{9{,}10} \cdot B_1 \cdot h + \overline{10{,}11}\ B_2 \cdot h$$

$$h = \frac{\triangle\vartheta}{9{,}10 \cdot B_1 + \overline{10{,}11} \cdot B_2}$$

b) Ako imamo zadatak da međa ostane usporedna sa starom međom 3—4, a treba podijeliti na dva dijela jednake vrijednosti (Sl. 21)



Sl 22.

U navedenom primjeru postupamo na slijedeći način na pr.: parcela br. 300 liv. sa 800 čhv, i neka je vrijednost (bonitet) B1 za čhv = 20 Din, tada je vrijednost livade V1 = 800×20 = 16.000 Dinara, a parcela br. 301 oranica sa 800 čhv, B2 za čh = 5 Dinara tada je vrijednost oranice V2 = 800×5 = = 4.000 Din.

Skupna vrijednost V = 20.000 Din; $\frac{V}{2}$ = 10.000.

Prema tome parcela br. 301 dobije još komad livade od parcele br. 300 u vrijednosti 10.000—4.000 = 6.000 ili 6.000 : 20 = 300 čhv; koju površinu odsiječemo.

c) Izravnanje međa kod nejednakih boniteta, vrši se pokusnim načinom, s time da bude dobivena i oduzeta površina jednake vrijednosti (Sl. 22.)

R. Najprije približno podijelimo sa linijom x' y' izračunamo $V1 = P1 \cdot B1$ i $V2 = P2 \cdot B2$; treba da je V1—V2 = 0, ako dobijemo V1—V2 = $\triangle\,\vartheta$ izračunamo h i povučemo xy // x' y'.

LITERATURA

Božićević: Geometrija
Hlavinka: Geodezija II.
Hartner-Doležal: Niedere Geodäsie
Kružić: Praktična geodezija