Rudolf Mlinar, geom. - Kikinda

Račun pogrešaka

(Primena vektora u teoriji pogrešaka)

Da bi mogli pratiti tačnost naših radova potrebno je:
1. uočiti osnovne pogreške direktno opažanih veličina, i
2. poznavati zakone rasprostiranja ovih pogrešaka.

Pogreške se nalaze u području određene tolerancije, pa ako iz ovog područja prelaze u intolerantno, one postaju greške.

Ako su nama poznate direktno merene veličine x, y, z... i ako mi ove veličine upotrebimo za dobivanje neke druge veličine (u) onda je:

$$u = f(x, y, z \ldots)$$

Ako smo osim toga na osnovu opažanih veličina x, y, z... uočili i pogreške ovih direktno merenih veličina $\Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots$ onda je:

$$u + \Delta_1 = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z \cdots)$$

gde bi u graničnom slučaju bilo:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdots$$

Ako su količine $\Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots$ dovoljno male, onda ih možemo identificirati sa odnosnim diferencijalima, pa se pogreška u računom određenoj veličini (u) može smatrati ravnom

totalnom diferencijalu F(u)

i to je *polazni stav* za sve račune pogrešaka.

Da bi mogli saznati ove pogreške i tamo, gde se služimo vektorskim načinom rešavanja naših zadataka, potrebno je poznavanje diferencijalenja vektora.

Najbolja osnova za diferencijalenje vektora u ravni je njegov eksponencijalni oblik

$$\underline{\underline{Z = z\, e^{i\varphi}}}$$

Na osnovu ovog oblika svodi se diferenciranje vektora u ravni na diferencijaciju običnih skalara.

Oznaka za promenljiv vektor je $Z = Z\ (z, \varphi)$, analogno kao kod skalara, gde je $y = f\ (x, z)$.

Pošto za svaki diferencijal možemo odmah naći i njegovu derivaciju, ako ga podelimo sa njegovim odgovarajućim diferencijalnim članom, to su derivacije ovde izostavljene, jer bi nepotrebno zauzimale prostor.

Osim algebarskog proizvoda vektora postoji
a) skalarni proizvod vektora $A \cdot B$
i b) vektorski proizvod vektora $A \times B$

Ovi proizvodi pokazani su u uvodnom članku samo reda radi, jer se oni spominju u svim delima vektorske analize.

Ali — kod vektora u ravni, i sa oznakama, sa kojima mi raspolažemo — nije potrebno ovo razlikovanje.

Mi razlikovanje pojedinih vrsta proizvoda svodimo na određene vektorske izraze, koji u potpunosti definišu ove operacije.

Tako je:

$$A\ \ B = A \cdot B$$

$$A \cdot B = \bar{A} \cdot B_0^{90}$$

$$A \times B = \bar{A} \cdot B_{90}^{0}$$

Izrazi s desne strane očigledniji su od izraza s leve strane. Oni istodobno određuju i smer obrtanja i zato ovde nisu potrebne nikakove daljnje definicije.

Oznaka	Diferencijal vektora	Primedba
$Z = Z(\varphi)$	$dZ = i E d\varphi = z_{\varphi+90} \cdot d\varphi$	
$Z = Z(z, \varphi)$	$dZ = dz_{\varphi} + i Z d\varphi$	
$Z_\alpha = Z_\alpha(\varphi)$	$dZ_\alpha = i Z_\alpha d\varphi = z \cdot d\varphi_{\varphi+\alpha+90}$	
$Z_\alpha = Z(z, \alpha, \varphi)$	$dZ_\alpha = dz_{\alpha+\varphi} + i z_{\alpha+\varphi} d\varphi + i z_{\alpha+\varphi} d\alpha$	
$Z = A_\varphi^\gamma$ $Z = Z(a, \alpha, \gamma, \varphi)$	$dz = dz_\varphi + i Z d\varphi$ gdje je: $dz_\varphi = z \left[\frac{da}{a} + \text{ctg}(\alpha-\gamma)\, d\alpha - \text{ctg}(\varphi-\gamma)\, d\varphi - \text{ctg}(\alpha-\gamma)\, d\gamma + \text{ctg}(\varphi-\nu)\, d\gamma\right]_\varphi$	Diferencijal vektorske komponente
$Z = A_\varphi^\gamma$ $Z = Z(\varphi, \gamma)$	$dZ = dz_\varphi + z\, d\varphi_{\varphi+90}$ gdje je: $dz_\varphi = z_\varphi[+\text{ctg}(\varphi-\gamma)\, d\gamma - \text{ctg}(\alpha-\gamma)\, d\varphi - \text{ctg}(\varphi-\gamma)\, d\varphi]$	Vektor A se nalazi između dve nepromenljive čvrste ačke.
$\bar{Z} = \bar{Z}(z, \varphi)$	$d\bar{Z} = dz_{-\varphi} + z\, d\varphi_{90-\varphi}$	
$A \cdot B = Z$ $Z = Z(a, b, \alpha, \beta)$	$dZ = da_{\alpha+\beta} + db_{\alpha+\beta} + i A B d\alpha + i A B d\beta$	Diferencijal algebarskog proizvoda.

Za njih vredi zakon komutacije i distribucije, što inače za izraze s leve strane obćenito ne vredi.

Tako je:

Oznaka	Diferencijal vektora
$\bar{A} \cdot B_0^{90} = Z$ $Z = Z(a, b, \alpha, \beta)$	$dZ = b \cos(\beta-\alpha)\, da + a \cos(\beta-\alpha)\, db + ab \sin(\beta-\alpha)\, d\alpha - ab \sin(\beta-\alpha)\, d\beta$
$\bar{A} \cdot B_{90}^0 = Z$ $Z = Z(a, b, \alpha, \beta)$	$dZ = [a \sin(\beta-\alpha)\, db + b \sin(\beta-\alpha)\, da + ab \cos(\beta-\alpha)\, db - ab \cos \beta-\alpha)\, d\alpha]_{90}$

Primena

Neka je, kao što je prikazano u uvodnom članku:

1.) $R_{II} = R_I + m A + B$

Ako je $\beta = \alpha + 90$, onda se ovaj slučaj svodi na obično određivanje malih tačaka, a ako je β proizvoljno, onda se to svodi na određivanje malih i slepih tačaka. Neka je

2.) $$R_n = R\ (a,\ \alpha,\ b,\ \beta)$$

slučaj koji se uvek pojavljuje kod određivanja takvih tačaka, i neka je u ovom slučaju

3.) $$\beta = \alpha + 90$$

onda imamo sledeći

Zadatak:

Traži se pogreška položaja tačke ⊙ n dakle

$$I.)\quad W = d\,Rn$$

a) $dR_n = mda_\alpha + imAd\alpha + db_\beta + iBd\beta = W$

b) $W = U_1 + U_2$

Ako iz koordinatnog sistema (x, y) prelazimo u koordinatni sistem (x', y'), određen ortovima $(1_\alpha,\ 1_{\alpha+90})$ onda će biti na osnovu obrasca, pokazanog u uvodnom članku

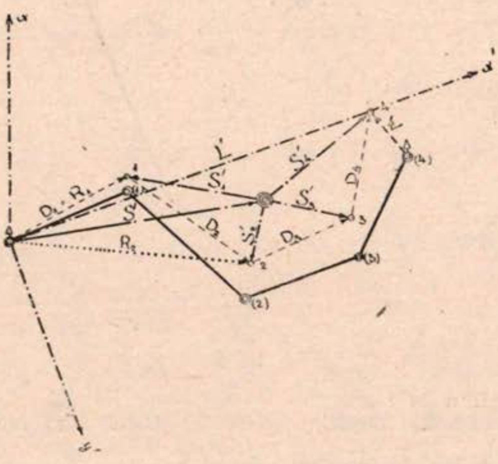
c) $W' = W_{-\alpha}$ odnosno

d) $W' = U'_1 + U'_2$ i sada će biti, usled $\beta = \alpha + 90$

$$\text{I.}\quad \boxed{+\ \begin{array}{l} U' = da + i\,ad\alpha \\ U'_2 = (-bd\beta) + i\,db \end{array}} = W'$$

Uzdužna i poprečna pogreška proizvoljnog poligonog vlaka.

Rasmatranja ćemo vršiti analogno Ing. Janković — »Poligonometrija«, izdanje »Tehnička knjiga« Zagreb 1951, strana 16—21 u celini i delimično od strane 22—38.



Sl. 1

Tamo, gde bude moguće, služićemo se istim oznakama, sa kojima se autor gornje knjige služio.

Uvodno ćemo postaviti sve identitete, koji očigledno proizlaze iz same slike. Početak je kod nas *nulta* tačka — početni trigonometar.

Prelazimo dakle na identitete, koji slede iz same slike:

a.) $L = L'_{\varphi}$ Obrazac za transformaciju.

b.) $L = \Sigma D$ Obrazac za računanje poligonog vlaka.

c.) $dL = W$ Diferencijal vektora L — srednja pogreška položaja krajne tačke u vlaku.

d.) $dL' = W'$ Srednja uzdužna i poprečna pogreška.

e.) $R'_i = \sum_{i=1}^{i=i} D'_i$ Vektori položaja pojedinih poligonih tačaka sa ishodištem u tački nul — početni trigonometar.

f.) $S' = \frac{\Sigma m R'}{\Sigma m}$ Vektor položaja težišta poligonog vlaka.

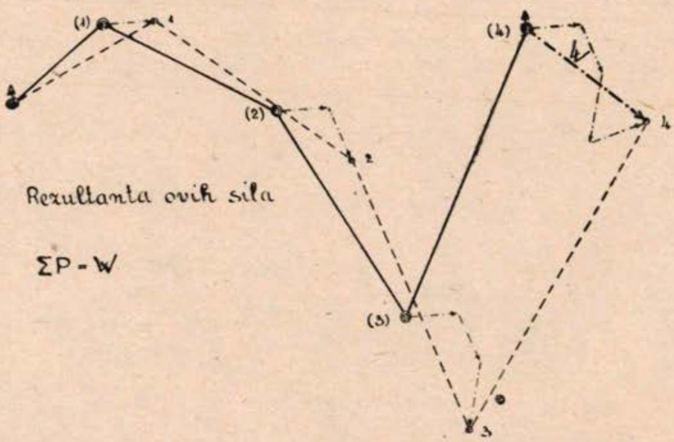
g.) $m = 1$ Masa pojedinih poligonih tačaka, uključno početnu i završnu. Odgovara form. (28) (29) cit. pisca.

h.) $S'_i = R'_i - S'$ $(i = 0, 1, 2 \ldots n)$ Vektori položaja pojedinih poligonih tačaka sa ishodištem u težištu.

Osim toga stavićemo:

i.) $m\,d = \partial d$

j.) $\frac{(m\beta)}{\varrho} = \partial y$



Sl. 2a

Posmatrajmo sliku 2a i 2b.

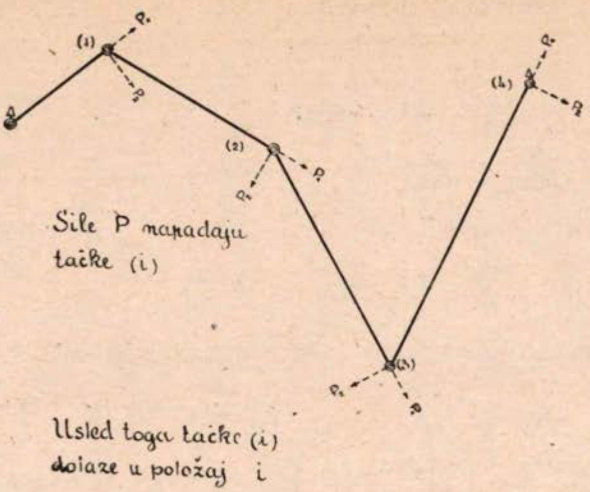
Sile P (naše pogreške) napadaju tačke (i). Usled toga tačke (i) dolaze u položaj = i =.

Rezultanta ovih sila, vektor W napada krajnu tačku (n).

Z a d a t a k :

Traži se vektor $W_1 = \overline{WW_{\xi}}$ dakle

I.) $$\underline{\underline{W_1 = \overline{d\Sigma D} \cdot d\Sigma D_{\xi}}}$$



Sl. 2b

Rešavanje:

Na osnovu a.) i b.) imamo:

1.) $L' = \Sigma D_{-\varphi}$ i to su formule (21), (22) cit. pisca.

Iz 1.) dobivamo neposredno totalnu derivaciju:

2.) $L' = \Sigma (1_{\nu-\varphi} + i D_{-\varphi}$

a to su sve derivacije u formulama (26)—(29) istog pisca.

Derivacija vektora L' je dakle suma dva vektora. Uzmimo prvi! On je:

3.) $U'_1 = 1\Sigma_{\nu-\varphi}$

On pretstavlja tačke na jediničnom krugu. Centar ovoga kruga je početni trigonometar. Tačke idu po krugu od 1 . . . n.

Ako ovaj vektor razvijemo, imaćemo:

3a.) $U'_1 = \Sigma\ [\cos\ (\nu-\varphi) + i \sin\ (\nu-\varphi)]$

Ako kvadriramo skalarno njegove komponente, imaćemo:

3b.) $j_x = \Sigma \cos^2\ (\nu-\varphi)$

3c.) $j_y = \Sigma \sin^2\ (\nu-\varphi)$

a, ako sumiramo, onda će biti

4a.) $j_x + j_y = \Sigma 1$

ako međutim oduzmemo 3c.) od 3b.) onda će biti

4b.) $j_x - j_y = \Sigma \cos 2\ (\nu-\varphi)$

Izraz 4a.) pretstavlja polarni moment inercije.

Prema tome ovde su u pitanju inercijalni momenti, koje treba ustanoviti. Postavimo u tu svrhu:

5.) $\Sigma 1_{2(\nu-\varphi)} = G_1$

a to je vektorski polarni moment inercije.

Ako razvijemo 5.) imaćemo:

5a.) $\Sigma \cos 2\ (\nu-\varphi) + i\, \Sigma \sin 2\ (\nu-\varphi) = g_1 \cos \gamma_1 + i\ g_1 \sin \gamma_1$

Realne komponente od 5a.) identične su sa 4b.) Prema tome je:

5b.) $\Sigma \cos 2\ (\nu-\varphi) = g_1 \cos \gamma_1 = j_x - j_y$

Iz toga, na osnovu 4a.) i 5b.) sledi

6a.) $$j_{x1} = \frac{\Sigma 1 + g_1 \cos \gamma_1}{2}$$

7a.) $$j_{y1} = \frac{\Sigma 1 - g_1 \cos \gamma_1}{2}$$

ili, unutar same elipse inercije:

6.) $$j_{x1} = \frac{\Sigma 1 + g_1}{2}$$

7.) $$j_{y1} = \frac{\Sigma 1 - g_1}{2}$$

Ako ove veličine pomnožimo sa kvadratom srednje uzdužne pogreške, imaćemo

8.) $$\overline{U}'_1 U'_1 \partial J^2_\xi = \frac{m^2 d}{2} \left[(\Sigma 1 + g_1) + i (\Sigma 1 - g_1) \right] = m^2 d \, (j_{x1} + i j_{y1})$$

a to su $\left[\frac{\Delta l \, \Delta l}{d^2} m^2 d\right]$, $\left[\frac{\Delta q \, \Delta q}{d^2} m^2 d\right]$ u form. (32), (33) cit. pisca, sa tom razlikom, što pisac ostaje kod naših 6a.), 6b.) dok se mi krećemo unutar elipse inercije.

Iz 8.) zaključujemo, da su gornje veličine

a.) zavisne samo o broju strana i

b.) o vektoru G, koji opet potpuno zavisi o iskrivljenosti vlaka.

c.) na poprečnu pogrešku utiče imaginarni deo, a na uzdužnu realni deo.

Prema tome prvi deo naše derivacije je određen i mi prelazimo na drugi deo. On je:

9.) $$U'_2 = \Sigma \, i \, D_{-\varphi}$$

Na osnovu uvodnog identiteta pod e.) je:

10.) $$R'_i = \sum_{i=i}^{i=i} D_{i-\varphi}$$ analogno l', q' kao kod pisca.

Sa vrednostima 10.) prelazimo na osnovu f.) i g.) na težište sa vektorom

11.) $$S' = \frac{\Sigma R'_i}{n+1}$$

a sa vektorom S' određujemo pojedine S'i na osnovu pod h.) i to:

12.) $$S'_i = R'_i - S' \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots n)$$

Ako saberemo sve S'i imaćemo:

13.) $$\Sigma S'_i = 0$$ a, ako kvadriramo

14.) $$\Sigma S^2_{i_{2\rho i}} = G_1$$ kao pod 5.)

a na osnovu istih dokaza, kao ranije, unutar elipse inercije

15a.) $$jx_{maks} = \frac{\Sigma S_i^2 + g_2}{2}$$

15b.) $$jy_{min} = \frac{\Sigma S_i^2 - g_2}{2}$$

analogno [qq], [ll] sa tom razlikom, što se mi opet krećemo unutar elipse inercije, dok pisac ostaje van nje. Ako međutim hoćemo baš isti rezultat, onda ćemo mesto g uvrstiti $g \cos \gamma$.

Cela, glomazna formula (24) na strani 18 cit. pisca, nije dakle ništa drugo, nego Steinerov J, koga mi izvodimo preko vektora G.

Vektor G, to je vektor kvalitatis naših radova uopšte i on se provlači, kako u teoriji pogrešaka, u obliku, koji smo upoznali, tako i u teoriji izravnanja, u obliku $\frac{\Sigma R^2}{\Sigma r^2}$ i on svuda postaje glavno merilo naših radova.

Sada nastavljamo i vraćamo se na 9.). Tamo je bilo:

9.) $$U'_2 = \Sigma \, i \, D_{-\varphi}$$

Na osnovu toga će dakle biti, ako supstituiramo vrednosti iz 15a.) i 15b.)

16.) $$\overline{U'}_2 \, U'_{2\xi} = j y_2 + i \, j \, x_2$$

a ako stavimo $\overline{W}W = w_1$ onda dobivamo konačno rešenje za I., sumiranjem zasebno realnih, a zasebno imaginarnih vrednosti iz 8.) i 16.)

I. $$\boxed{W'_1 = \left[j x_1 \, m^2 d + j x_2 \frac{(m^2 \beta)}{\varrho^2} \right] + i \left[j x_1 \, m^2 d + j x_2 \frac{(m^2 \beta)}{\varrho^2} \right]}$$

analogno form. (32) (33) cit. pisca u celosti. Ovde naravno zagrade [ ] ne pretstavljaju nikakve sume.

Za prelaz u koordinatni sistem u kome radimo, važi opet

$$W_1 = W'_{1\varphi}$$

a mi to postižemo jednostavnim obrtanjem vektora za veličinu φ, bez ikakvih daljnih formula i računa, kod ove vrste radova.

Srednja pogreška proizvoljne tačke u proizvoljnom vlaku.

Neka je ⊙n uočena proizvoljna tačka. U tom slučaju idemo sa vektorima $1_{2(\nu-\varphi)}$ po jediničnom krugu od $1 \to n$.

Sumiramo ove vektore i dobivamo

1.) $$G_1 = \sum_n 1_{2(\nu-\varphi)}$$

Sa vektorima R'i (i = 1, 2, 3 . . n) dolazimo u težište

2.) $$S' = \frac{\sum_n R'_i}{n+1}$$

Ovo težište nije težište celog vlaka, nego težište, koje odgovara osmatranom delu vlaka, sa tačkom ⊙n kao krajnom tačkom. I sada se vektorima

3.) $S'_i = R'_i - S'$ mora biti

4.) $\Sigma S'_i = 0$ (i = 0, 1, 2 . . . n)

Kvadriramo sve S'i i sumiramo, pa dobivamo

5.) $$G_2 = \Sigma \, S'^2_i$$

a na osnovu toga dobivamo

$$W_n = \frac{1}{2} \left[(n + g_1) \, m^2 d + (\Sigma S^2 - g_2) \frac{(m^2 \beta)}{\varrho^2} \right] +$$

$$+ i \frac{1}{2} \left[(n - g_1) \, m^2 d + (\Sigma S^2 + g_2) \frac{(m^2 \beta}{\varrho^2} \right]$$

a u koordinatnom sistemu, koji određuje dijagonala od nule do n

6.) $$W''_n = W'_{n_{-\rho' n}}$$

vektor, koji određuje kvadrate uzdužne i poprečne pogreške za uočenu tačku n.

Iskrivljenost poligonog vlaka.

Kriterijum za iskrivljenost poligonog vlaka daju vektori G.

Napišimo vektor W u ovom obliku:

$$W = [(a + g_1)\,\partial d^2 + (b + g_2)\,\partial \nu^2] + i\,[(a - g_1)\,\partial d^2 + (b + g_2)\,\partial \nu^2]$$

Maksimalna vrednost vektora G je:

$$g_1 \text{ maks} = \Sigma_1 = n$$
$$g_2 \text{ maks} = \Sigma s^2$$

Za maksimalnu vrednost vektora G vlak je potpuno ispružen. Vektori G postaju skalari.

Istovremeno je: $\nu - \varphi = 0$

Formula I. postaje:

I.) $W'_1 = n \cdot d^2 + i \Sigma s^2 \cdot \partial y^2$

Minimalna vrednost vektora G je:

g_1 min. = 0

g_2 min. = 0

U tom slučaju vlak je potpuno iskrivljen i osim toga zatvoren.

Mi nemamo više merila za naš rad i pogreške ostaju neodređene.

Granicu tolerantnosti iskrivljenosti određujemo sa veličinom G na jediničnom krugu. Na tom krugu očigledno ocenjujemo tolerantnost i kvalitet.

Što su bliže tačke (i = 1, 2, 3... n) to bolja je odredba, tim bolji je vlak. Ako sve tačke padaju u jednu, postignut je najbolji položaj. U tom slučaju postaje

$(a - g_1)$ = min. = 0 i istodobno

$(b - g_2)$ = min. = 0

Ako su pak tačke na jediničnom krugu diametralno jedna prema drugoj, prestaje mogućnost ocene. G postaje nula. Vlak je zatvoren i potpuno iskrivljen.

Prema tome, sa intervalom na jediničnom krugu ocenjujemo i ograničavamo po volji vektor G_1. Usled uzajamnosti, koja postoji između G_1 i G_2, biće istovremeno određena i vrednost G_2, koja će odgovarati kvalitetu G_1. Ako je G_1 dobar, biće i G_2. Prema tome u većini slučajeva G_2 ne moramo uopšte više ocenjivati.

Ograničavanje intervala na jediničnom krugu prema postavljenim uslovima daje Q pisca (strana 36) kao i pojas u kome možemo da se krećemo

Dokaz može čitalac sam da izvede, ako računa m_{dL} i Q prema odnosnim veličinama na str. 36 »Poligonometrija« na osnovu naših obrazaca prema realnom delu vektora W'_1, iako ima u vidu, da je uslov za ispruženi vlak $\Sigma 1 = g_1$.