Prof. Dr. Ing. Josip Baturić - Zagreb

Pogreška središnje točke i središnjeg smjernika zaključnog poligona

Izjednačenje ispruženog poligonskog vlaka uobičajenom približnom metodom je jednostavno i skoro jednako vrijedno strogom izjednačenju. Zato su u praksi uvedeni propisi da se poligonski vlakovi moraju postavljati po mogućnosti u što ravnijoj liniji između dviju zaključnih točaka, što dovodi do toga, da se poligonske točke u nepovoljnom terenu postavljaju tamo, gdje je zato najmanja potreba.

Krivudavi poligonski vlakovi, ako se izjednačuju uobičajenom približnom metodom u većini slučajeva direktno kvare rezultate mjerenja, te takovo izjednačenje služi samo zato da se postigne brojčana suglasnost izračunatih rezultata, a ne da se poboljšaju mjerene vrijednosti.

Izjednačenje po metodi najmanjih kvadrata, koje poboljšava mjerene vrijednosti traži povećanje kancelarijskog rada, ali zato omogućuje slobodnije postavljanje poligona na terenu.

Pored smanjenja rada na terenu, prednost slobodnog postavljanja poligonskih vlakova je ta, da se isti mogu prilagoditi važnijim objektima kao putevima, trasama i t. d., što je povoljno ne samo za stabilizaciju točaka, nego i za kasnije korištenje za daljnju izmjeru.

Da se dobije uvid kako djeluju različiti oblici poligonskih vlakova na točnost određivanja središnje točke i središnjeg smjernika, kada se vrši izjednačenje po metodi najmanjih kvadrata, ovdje je razrađena tabela s predočenjem pomoću elipse pogrešaka.

Jednadžbe pogrešaka za umetnuti poligon među dvije poznate točke sa početnom i završnom orijentacijom glase

$$
\begin{aligned}
[a\,v] \quad\quad\quad &= \omega_1 \\
[b\,\lambda] + [bv] &= \omega_2 \\
(c\,\lambda] + [cv] &= \omega_3
\end{aligned}
$$

K njima dodamo još jednadžbe koje se odnose na pogreške u poligonu do središnje točke S

$$
\begin{aligned}
[f\lambda] + [fv] &= [f\varepsilon] - dF \qquad \text{za os Y} \\
[g\lambda] + [gv] &= [g\varepsilon] - dG \qquad \text{za os X}
\end{aligned}
$$

Ovdje su λ i v vjerojatne pogreške, a ε prave pogreške. dF i dG su koordinatna odstupanja izjednačenog položaja središnje točke poligona od pravog položaja.

Iz navedenih pet jednačaba sastavimo normalne jednadžbe, kod kojih će koeficijenti biti ovako poredani:

$$
\begin{array}{ccccc}
[aa] & & & [af] & [ag] \\
 & [bb] & & [bf] & [bg] \\
 & & [cc] & [cf] & [cg] \\
[af] & [bf] & [cf] & [ff] & [fg] \\
[ag] & [bg] & [cg] & & [gg]
\end{array}
$$

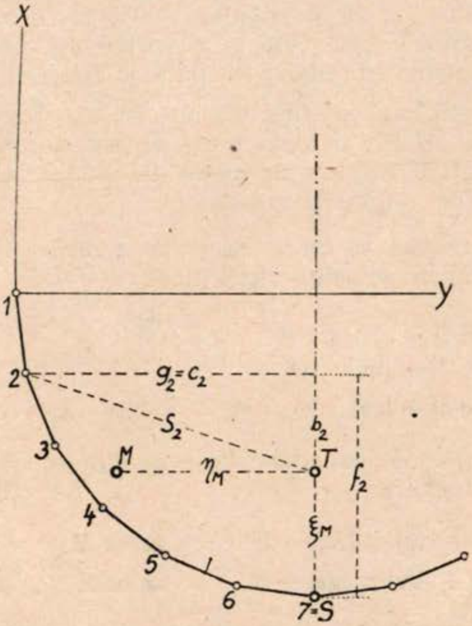
[ab] i [ac] su jednaki nuli kada izaberemo težište čitavog poligona.

[bc] je jednaka nuli, kada postavimo da koordinatne osi X i Y prolaze kroz veliku i malu os izravnavajuće elipse.

Za kutne pogreške su koeficijenti b i c srazmjerni sa koordinatnim udaljenostima težišta čitavog poligona T od pojedinih točaka. Za kutne pogreške su koeficijenti f i g srazmjerni koordinatnim udaljenostima središnje točke S od pojedinih točaka. Uvedimo težište M prve polovice poligona do točke S.

U daljnim jednadžbama ispuštene su sve oznake za kvalitete, iako ih se u praktičnom primjeru upotrebljava. Još se u jednadžbama govori samo o koeficijentima za kutne pogreške, a ništa o straničnim jer za njih je redukcija jednostavna te u konačnim rezultatima šutke uključena.

Zrcalno simetričan poligon. (Sl. 1.)



Slika 1

Za određenje srednje pogreške središnje točke poligona u smjeru osi Y vrijedi jednadžba

$$m_y^2 = m^2 \, [ff \cdot 3] \tag{1}$$

Redukcijom temeljnih normalnih jednačaba dobijemo

$$[ff \cdot 3] = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf]^2}{[bb]} - \frac{[cf]^2}{[cc]}$$

Kod zrcalno simetričnih poligona vrijedi za koeficijente kutnih pogrešaka

$$[b]_1^S = 0 \qquad [aa] = n = 2n_1$$

pri čemu je n broj svih mjerenih kutova

$$[af] = [f] = [b]_1^S + \frac{n}{2}\,\xi_M = \frac{n}{2}\,\xi_M$$

$$[bf] = [b\,(b + \xi_M)]_1^S = [bb]_1^S + [b]_1^S\,\xi_M = \frac{[bb]}{2}$$

$$[ff] = [(b + \xi_M)\,(b + \xi_M)]_1^S = \frac{[bb]}{2} + \frac{n}{2}\,\xi_M^2$$

uvrštenjem ovih vrijednosti u jednadžbu (1) dobijemo

$$[ff \cdot 3] = \frac{[bb]}{2} + \frac{n}{2}\,\xi_M^2 - \frac{n^2}{4n}\,\xi_M^2 - \frac{[bb]^2}{4[bb]} - \frac{[cf]^2}{[cc]} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{[bb]}{2} + n_1\,\xi_M^2\right) - \frac{[cf]^2}{[cc]}$$

Vrijednost [cf] se odnosi na koeficijente koji su srazmjerni koordinatnim udaljenostima od pojedinih točaka poligona do točke S.

Srednja pogreška u smjeru osi X je

$$m_X^2 = m^2\,[gg \cdot 3]$$

Istim postupkom redukcije kao prije odredimo

$$[gg \cdot 3] = [gg] - \frac{[gg]^2}{[aa]} - \frac{[bg]^2}{[bb]} - \frac{[cg]^2}{[cc]} \tag{2}$$

Kod zrcalno simetričnih poligona vrijedi za koeficijente kutnih pogrešaka

$$[b]_1^S = 0 \qquad [aa] = n = 2n_1 \qquad [ag] = [g] = [c]_1^S = \frac{n}{2}\,\eta_M$$

$$[cg] = [gg] = \frac{[cc]}{2}$$

Uvrštenjem u jednadžbu (2) dobijemo

$$[gg \cdot 3] = \frac{[cc]}{2} - \frac{n^2}{4n}\,\eta_M^2 - \frac{[bg]^2}{[bb]} - \frac{[cc]^2}{4[cc]} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{[cc]}{2} - n_1\,\eta_M^2\right) - \frac{[bg]^2}{[bb]}$$

Vrijednost [bg] se odnosi na koeficijente koji su srazmjerni koordinatnim udaljenostima od pojedinih točaka poligona do točke T.

Još je potrebno ispitati kolika je vrijednost [fg. 3] za koju nakon redukcije vrijedi ova jednadžba

$$[fg \cdot 3] = [fg] - \frac{[af]\,[ag]}{[aa]} - \frac{[bf]\,[bg]}{[bb]} - \frac{[cf]\,[cg]}{[cc]} \tag{3}$$

Za zrcalno simetričan poligon su koeficijenti kutnih pogrešaka

$$\frac{[af]\,[ag]}{[aa]} = \frac{n}{2}\,\xi_M \times \frac{n}{2}\,\eta_M \frac{1}{n} = \frac{n}{4}\,\eta_M\,\xi_M$$

$$[fg] = [(b + \xi_M)\,c] = \frac{[bc]}{2} + \frac{[c]}{2}\,\xi_M = \frac{[bc]}{2} + \frac{n}{2}\,\eta_M\,\xi_M$$

$$\frac{[bf]\,[bg]}{[bb]} = \frac{[bb]}{2[bb]}\,\frac{[bc]}{2} = \frac{[bc]}{4}$$

$$\frac{[cf]\,[cg]}{[cc]} = \frac{[fg]}{[cc]}\,\frac{[cc]}{2} = \frac{[fg]}{2}$$

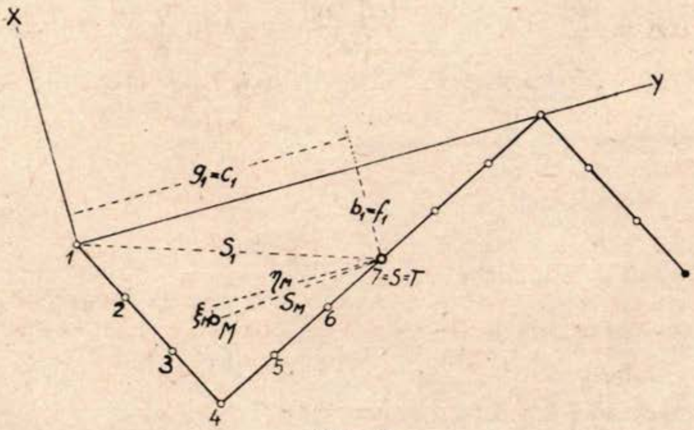
Uvrštenjem u jednadžbu (3) dobijemo

$$[fg \cdot 3] = [fg]\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{n}{4}\,\eta_M\,\xi_M - \frac{[bc]}{4} =$$

$$= \frac{[bc]}{4} + \frac{n}{4}\,\eta_M\,\xi_M - \frac{n}{4}\,\eta_M\,\xi_M - \frac{[bc]}{4} = 0$$

Kako je vrijednost [fg. 3] jednaka nuli, onda to znači da se velika i mala os elipse (kvadrata) pogrešaka poklapa sa koordinatnim osima.

Centralno simetričan poligon. (Sl. 2.)



Slika 2

Za ovakav poligon vrijede iste jednadžbe. Razlika je u tome da točka S pada zajedno sa točkom T, i da koeficijenti kutnih pogrešaka za određenje srednje pogreške u smjeru osi Y daju ove vrijednosti:

$$[aa] = n = 2n_1 \qquad [af] = [f] = \frac{[b]}{2} = \frac{n}{2}\xi_M \qquad [ff] = \frac{[bb]}{2}$$

$$[bf] = \frac{[bb]}{2} \qquad [cf] = \frac{[bc]}{2} = 0$$

i to zato jer os Y izaberemo tako da nam se poklapa sa jednom osi izravnavajuće elipse, koja bi odgovarala čitavom poligonu.

Iz toga proizlazi da je

$$[ff \cdot 3] = \frac{[bb]}{2} - \frac{n^2}{4n}\xi_M^2 - \frac{[bb]}{4} - 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{[bb]}{2} - n_1\xi_M^2\right)$$

Za srednju pogrešku u smjeru osi X biti će

$$[aa] = n = 2n_1 \qquad [ag] = [g] = \frac{[c]}{2} = \frac{n}{2}\eta_M$$

$$[bg] = \frac{[bc]}{2} = 0 \qquad [cg] = \frac{[cc]}{2} \qquad [gg] = \frac{[cc]}{2}$$

Iz toga uvrštenjem u jednadžbu (2)

$$[gg \cdot 3] = \frac{[cc]}{2} - \frac{n^2}{4n}\eta_M^2 - 0 - \frac{[cc]^2}{4[cc]} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{[cc]}{2} - n_1\eta_M^2\right)$$

Kod centralno simetričnog poligona bit će koeficijenti

$$[fg] = \frac{[bc]}{2} = 0 \qquad \frac{[af]\,[ag]}{[aa]} = \frac{n}{2}\xi_M \frac{n}{2}\frac{\eta_M}{n} = \frac{n}{4}\xi_M\eta_M$$

$$\frac{[bf]\,[bg]}{[bb]} = 0 \qquad \frac{[cf]\,[cg]}{[cc]} = 0$$

iz toga

$$[fg \cdot 3] = -\frac{n_1}{2}\xi_M\eta_M,$$

ovaj izraz nije dakle jednak nuli kao kod zrcalno simetričnog poligona, prema tome se osi elipse pogrešaka ne poklapaju sa koordinatnim osima.

Za određenje s r e d n j e p o g r e š k e s r e d i š n j e g s m j e r n i k a glasi jednadžba $m_o^2 = m^2\,[f'f' \cdot 3]$

analognom redukcijom temeljnih normalnih jednačaba dobijemo

$$[f'f' \cdot 3] = [f'f'] - \frac{[af']^2}{[aa]} - \frac{[bf']^2}{[bb]} - \frac{[cf']^2}{[cc]} \tag{4}$$

pri čemu su koeficijenti $f'_1 = f'_2 = f'_3 = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = f'_{n_1} = 1$

$$[f'f'] = \frac{n}{2} = n_1 \qquad [aa] = n = 2n_1$$

$$\frac{[af']^2}{[aa]} = \frac{n^2}{4n} = \frac{n_1}{2} \qquad \frac{[bf']^2}{[bb]} = \frac{[b]_1^{S2}}{[bb]} = 0$$

$$\frac{[cf']^2}{[cc]} = \frac{[c]_1^{S_2}}{[cc]} = \frac{n_1^2 \eta_M^2}{[cc]}$$

Uvedeni koeficijenti vrijede za zrcalno simetričan poligon, te uvrštenjem u jednadžbu (4) dobijemo

$$[f'f' \cdot 3] = n_1 - \frac{n_1}{2} - \frac{n_1^2 \eta_M^2}{[cc]} = n_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{n_1 \eta_M^2}{[cc]} \right)$$

Za centralno simetričan poligon biti će

$$[f'f' \cdot 3] = n_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{n_1}{[bb]} \xi_M^2 - \frac{n_1 \eta_M^2}{[cc]} \right)$$

i to zato jer je

$$\frac{[bf']^2}{[bb]} = \frac{[b]_1^{S2}}{[bb]} = \frac{n_1^2 \xi_M^2}{[bb]}$$

dočim su ostali koeficijenti jednaki.

Uputa za grafičko određenje pogreške središnje točke.

Zrcalno simetrični poligon (Tabela I.)

Ako je jedna koordinatna os paralelna sa simetralom poligona onda se velika i mala os elipse pogrešaka poklapaju sa koordinatnim osima.

Za stranične srednje pogreške je predpostavljeno

$$m_n = 2 \sqrt{\frac{s_n}{1000}} \text{ iz toga } r'm_n^2 = z_n = s_n = \frac{r' 4 s_n}{1000} \text{ ili}$$

$$r' = \frac{1000}{4} = 250$$

Tim je z-poligon već dani stranični poligon, kojim konstruiramo konjugirane polumjere prve polovice poligona.

Za kutne pogreške $m_v = 8''$ biti će $\frac{r'}{p} = r'm_v^2 = 250 . 64 = 16000.$

Sve spojnice od pojedinih točaka prve polovice poligona do težišta T, dakle dužine S_n upotrebiti ćemo za konstrukciju Z-poligona, s kojim ćemo konstruirati konjugirane polumjere. Vrijednost Z_7 uzimamo samo polovičnu, jer se druga polovica odnosi na drugu polovicu poligona.

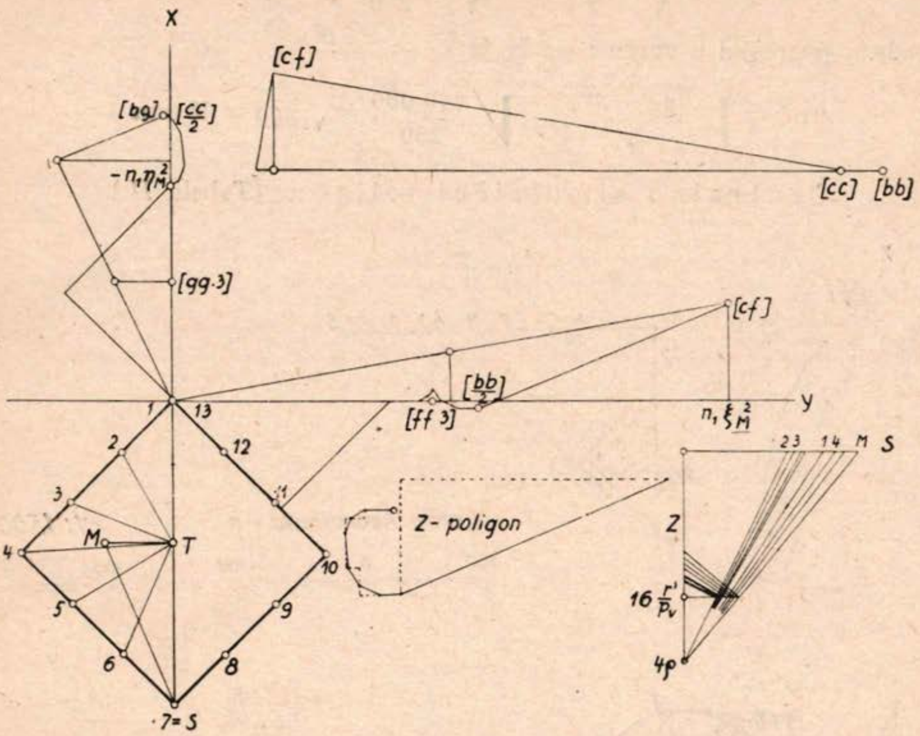


Tabela I

Odredimo stranicu S_M, koju u pomoćnom diagramu koristimo za određenje Z_M. Ovu vrijednost uzimamo šest i po puta, i nanosimo je u odgovarajućem smjeru. Za smjer Y njezinu projekciju dodamo konjugiranom polumjeru, a za smjer X odbijemo konjugiranom polumjeru, to jest nanosimo je tako da se projekcija na os X smanjuje.

Rezultate projekcija na os X i Y smanjim na polovicu.

Za smjer Y treba još odbiti $\frac{[cf]^2}{[cc]}$ koju vrijednost konstruiramo u posebnom diagramu nomografički.

Isto tako za smjer X treba još odbiti vrijednost $\frac{[bg]^2}{[bb]}$ koja se konstruira slično kao prethodna veličina. U ovom slučaju ona je tako malena da ne dolazi do izražaja.

Vrijednostima u nacrtu pripada još umnožak sa r′, koji nije pisan, iako su sve vrijednosti pomoću njega konstruirane.

Srednja pogreška u smjeru osi Y je

$$m_y = \sqrt{\frac{[ff \cdot 3]r'}{r'}} = \sqrt{\frac{1\,030\,000}{250}} = 64 \text{ mm}$$

Srednja pogreška u smjeru osi X je

$$m_x = \sqrt{\frac{[gg \cdot 3]\, r'}{r'}} = \sqrt{\frac{470\,000}{250}} = \sqrt{1880} = 43 \text{ mm}$$

Centralno simetrični poligon (Tabela II.)

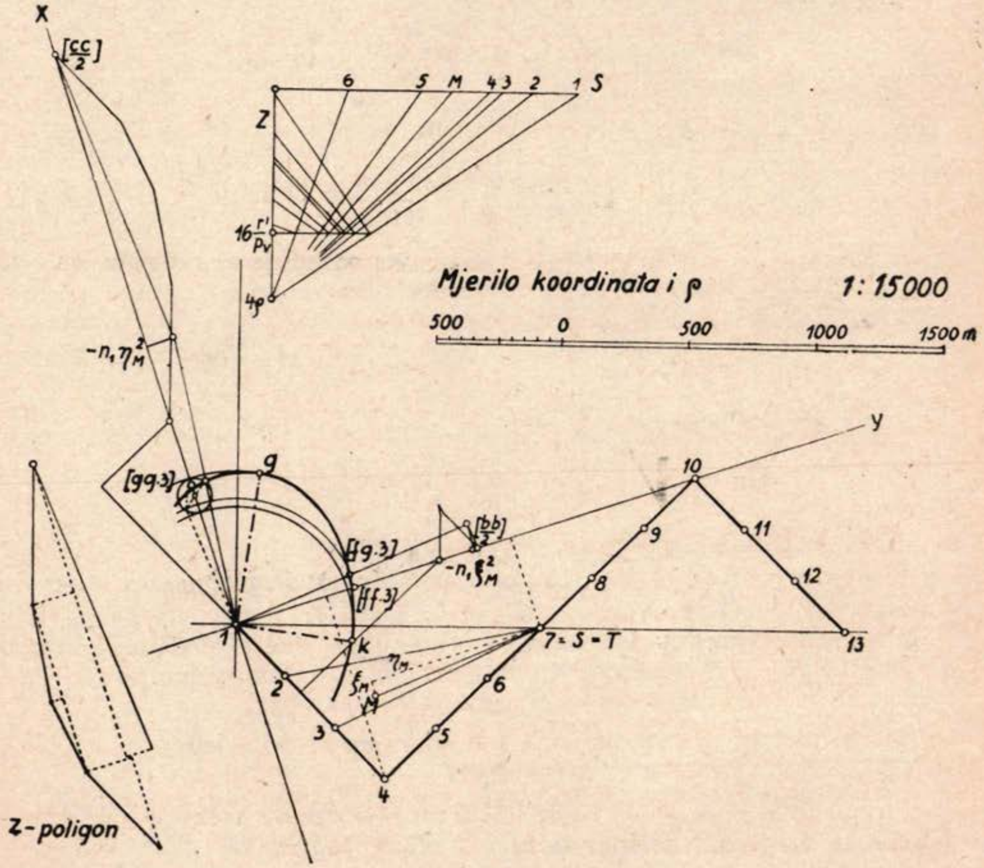


Tabela II

Za ovaj primjer treba prethodno znati smjer velike i male osi izravnavajuće elipse čitavog poligona da se mogu koordinatne osi usmjeriti tako da se poklapaju sa osima navedene elipse.

Za stranične srednje pogreške je pretpostavljeno sve isto kao i kod zrcalno simetričnog poligona.

Za kutne pogreške također. Konstrukcija z-poligona i Z-poligona je prema tome analogna konstrukciji zrcalnog poligona.

Konstrukcija i nanašanje vrijednosti Z_M je analogno, samo se njezina projekcija za smjer Y odbija konjugiranom polumjeru, a također se odbija i za smjer X.

Rezultate projekcija na os X i Y smanjim na polovicu.

Vrijednost [fg. 3] u ovom slučaju nije nula, zato elipsa pogrešaka ne će imati svoju veliku i malu os u smjeru preuzetih koordinatnih osi nego će elipsa biti malo zaokrenuta.

Srednja pogreška u smjeru osi Y i X nije od važnosti, nego je potrebno znati pogreške u smjeru velike i male osi elipse pogrešaka. Srednja pogreška u smjeru velike osi je

$$m_g = \sqrt{\frac{g}{r'}} = \sqrt{\frac{600\,000}{250}} = 49 \text{ mm}$$

Srednja pogreška u smjeru male osi je

$$m_k = \sqrt{\frac{k}{r'}} = \sqrt{\frac{460\,000}{250}} = 43 \text{ mm}$$

Srednja pogreška središnjeg smjernika određuje se računanjem s tim da se potrebne veličine uzmu iz nacrta.

Za zrcalno simetričan poligon je veličina

$n_1 \eta_M^2 r' = 175\,000$ a veličina $[cc]\, r' = 2\,240\,000$

Prema tome je

$$m_o = m \sqrt{n_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{175}{2\,240}\right)} = m \sqrt{\frac{n}{4{,}8}} = 13{,}2''$$

Za centralno simetričan poligon je veličina

$n_1 \eta_M^2 r' = 1\,200\,000$ $n_1 \xi_M^2 r' = 15\,000$

$[cc]\, r' = 4\,700\,000$ $[bb]\, r' = 2\,000\,000$

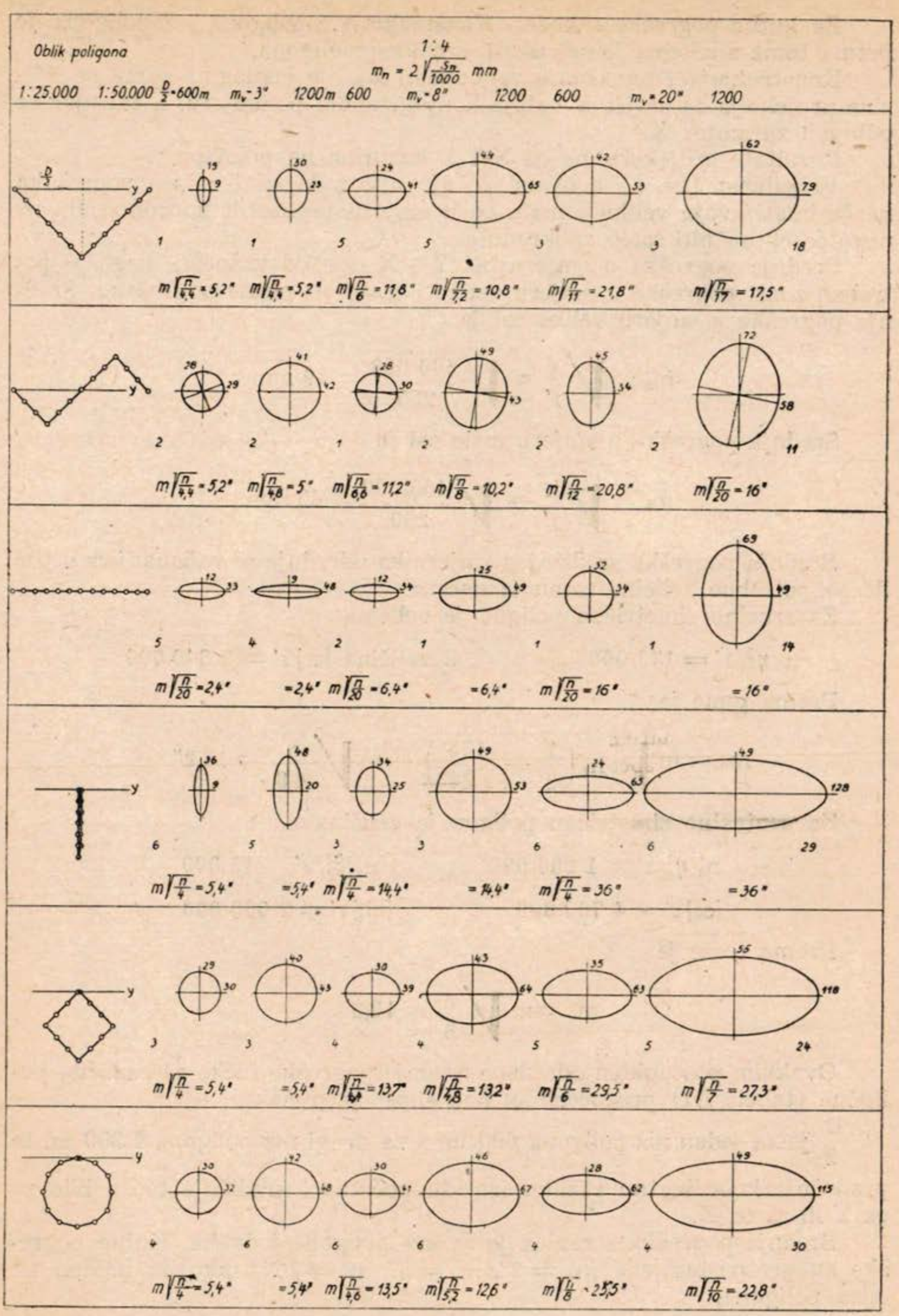
Prema tome je

$$m_o = m \sqrt{\frac{n}{8}} = 10{,}2''$$

Ovakvim postupkom određene srednje pogreške točke za različite poligone (tabela III) predočene su kao elipse pogrešaka.

$\frac{D}{2}$ je za jedan niz poligona 600 m, a za drugi niz poligona 1 200 m, te predočuje koordinatnu razliku između početne i središnje točke bilo za os Y ili za os X.

Srednja pogreška stranica je za sve poligone jednaka. Kutne pogreške su pretpostavljene $m_v = 3''$, $m_v = 8''$, $m_v = 20''$, tako da imamo tri niza poligona.


Oblik poligona
1 : 4
m_n = 2 √(S_m/1000) mm
1:25.000 1:50.000 D/2 = 600m m_v = 3" 1200m 600 m_v = 8" 1200 600 m_v = 20" 1200
m √(n/4,4) = 5,2" m √(n/4,4) = 5,2" m √(n/6) = 11,8" m √(n/7,2) = 10,8" m √(n/11) = 21,8" m √(n/17) = 17,5"
m √(n/4,4) = 5,2" m √(n/4,8) = 5" m √(n/6,6) = 11,2" m √(n/8) = 10,2" m √(n/12) = 20,8" m √(n/20) = 16"
m √(n/20) = 2,4" = 2,4" m √(n/20) = 6,4" = 6,4" m √(n/20) = 16" = 16"
m √(n/4) = 5,4" = 5,4" m √(n/4) = 14,4" = 14,4" m √(n/4) = 36" = 36"
m √(n/4) = 5,4" = 5,4" m √(n/4,4) = 13,7" m √(n/4,8) = 13,2" m √(n/6) = 29,5" m √(n/7) = 27,3"
m √(n/4) = 5,4" = 5,4" m √(n/4,6) = 13,5" m √(n/5,2) = 12,6" m √(n/8) = 23,5" m √(n/10) = 22,8"

Brojevi pored elipsa označuju veličinu velike i male osi elipse pogrešaka u mm.

Brojevi lijevo pod elipsom označuju razmjer veličina velike osi elipse po rednom broju od 1 do 6 sravnavajući različite poligone međusobno za iste srednje kutne pogreške.

Brojevi desno pod zadnjom elipsom jednog poligona označuju zbroj rednih brojeva. Čim je taj broj manji tim je poligon općenito povoljniji.

Iz tabele se dadu izvesti slijedeći zaključci:

Ako se uključeni poligon izjednačuje po metodi najmanjih kvadrata, onda je pogreška središnje točke općenito najmanja kod drugog poligona oblika slova S.

Inače prva tri poligona koja se uključuju među dvije poznate točke imaju manju pogrešku središnje točke nego li druga tri poligona, koji su zatvoreni poligoni.

Prva tri poligona odlikuju se malom srednjom pogreškom središnjeg smjernika, koja je kod ispruženog poligona (trećeg) u svim slučajevima manja i od srednje pogreške jednog kuta m_v.

Prof. Dr. Ing. Josip Baturić

ERREUR DU POINT CENTRAL E DE L'ANGLE CENTRAL DIRIGÉ DU CHEMINEMENT ENCADRÉ

La compensation du cheminement poligonal peut être effectuée avec la méthode aproximative et celle de moindre carré. La premier méthode demande des formes speciales tandis qu'avec la seconde on peut égaliser les cheminements des formes differentes. Les cheminements poligonaux peuvent mieux s'adapter an but pour lequel ils sont place c'est leur avantage pratique. Sur le tableau l'action des formes differentes du cheminement sur l'exactitude du point central dans le même cheminement et de l'angle dirigé central est presenté d'une manier graphique. Le resultat graphique est fondé sur l'ellipse des erreurs.