

Vektori u ravni

njihov značaj, njihova simbolika i njihova primena u geodeziji

Imajući u vidu, da se u našoj stručnoj literaturi vrlo retko ili skoro nikako ne primenjuju vektori kao sredstvo za rešavanje raznih problema na polju geodezije, pokušaću da ukratko prikažem prednosti, koje pruža ova metoda pri rešavanju raznih zadataka u našoj struci.

Pri tome nije mi namera da ovde detaljno izložim neku teoriju vektora jer zato ima drugih izvora (n. pr. Dr. Željko Marković, Uvod u višu analizu, Teorija vektora od Dr. Tatomira Anđelića ili Osnovi teorije vektora od Ing. Dragiše Ivanovića, i t. d.) iz kojih se ova može crpsti.

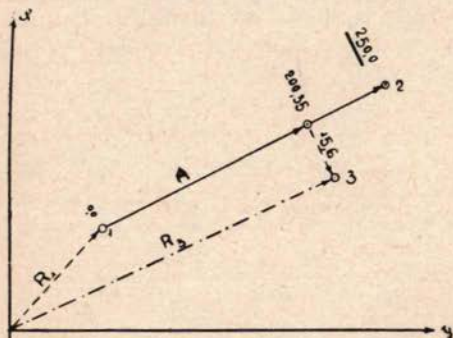
Ali — i pored toga, biću gdegde, a naročito u vezi sa simbolikom primoran, da bar u glavnim crtama izložim najvažnije identitete, koji omogućavaju operacije sa vektorima i njihov prelaz na skalarne veličine.

Već u samoj algebri mogli smo opaziti, da nije svejedno, kakve smo oznake upotreabili, da bi izrazili izvesne veličine. Naprotiv — potrebno je i nužno da ove oznake po mogućnosti karakterišu neku izvesnu veličinu, jer od toga u mnogome zavisi praktično rešenje izvesnog zadatka i brzo snalaženje u istom. I nije mnogo rečeno, ako se kaže, da rešavanje mnogih problema zavisi u glavnom od izbora odgovarajućih oznaka.

Ovo naročito važi za vektore. Pokretna snaga vektorskog obrasca, kao rezultat jedne izražene vetorske misli, leži u glavnom u zgodno izabranoj simbolici, t. j. u dobro i zgodno izabranim znacima za vektorske misli, znacima, koji ocrtavaju i u celosti izražavaju tu misao.

U nastavku navešću oznake, koje potiču od K. Friedricha i koje se donekle približuju tom idealu. Ove oznake nisu, navedene ni u jednom od uvodno citiranih udžbenika — no njima ću se služiti u svojim izlaganjima.

U primenama, koje su mahom originalne prirode, mogla se lako potkrasti po koja greška i zato molim svakoga, koji bi to mogao opaziti da me na to upozori. Ja ću mu biti veoma zahvalan.



Traže se koordinate tačke 3.

Rešenje:

$$\underline{R_3 = R_1 + 200,35\alpha + 15,6^{\alpha+90}}$$

T su u glavnom oznake, kojima se služimo u našim računima sa vektorima u ravni.

Koliko su one plodonosne videćemo na nekoliko primera u primenama.

Primene

Poznate su koordinate:

$$\begin{aligned} \odot 1 & \{x, y\} \equiv (A + R_1 = R_2) \\ \odot 2 & \end{aligned}$$

Mereni su upisani elementi.

Vektori u ravni, njihovi simboli i identiteti.

Oznaka	Analitički identiteti	Objašnjenje
$A = a_\alpha$ $B = b_\beta$ $V \doteq v_\varphi$	$v_\varphi = v (\cos \varphi + i \sin \varphi) =$ $= (x_n - x_{n-1}) + i (y_n - y_{n-1}) =$ $= \Delta x + i \Delta y =$ $= \Delta x_0 + \Delta y_{90} =$ $= a + i b =$ $= v e^{i\varphi}$	<p>Vektori u opšte. Kao oznake za ove vektore možemo upotrebiti sva uspravno položena velika slova latinice.</p> <p>Mala, ista slova, označuju absolutnu vrednost, intenzitet ili modulus vektora.</p> <p>Grčka mala slova označuju nagib vektora i obično se biraju tako, da vektor A sadržava nagib α, vektor B nagib β, vektor V nagib ϑ i t. d.</p>
$V^1 = v_{1\varphi_1} =$ $= v^1_{\varphi_1} =$ $= v^1_{\varphi_1} =$ φ_1	Kao gore	Za razlikovanje raznih vektora, označenih istim slovom, upotrebljavamo i odgovarajuće indekse, kao što je ovde navedeno.
$R = r_\rho$	$R = r_\rho = r (\cos \varrho + i \sin \varrho) =$ $= x - i y =$ $= x_0 + y_{90} =$ $= r \times e_{i\rho}$	<p>Sa R označavamo radius-vektore, za razliku od običnih vektora.</p> <p>Veličinu R nazivamo i vektorom položaja izvesne tačke, jer kraj vektora R nedvosmisleno određuje položaj odgovarajuće tačke.</p>
$A_\beta = a_{\alpha+\beta}$	$A_\beta = a [\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta)] =$ $= \Delta x_\beta + \Delta y_{\beta+90} =$ $= \Delta x (\cos \beta + \Delta y \sin \beta) +$ $+ \Delta y (-\sin \beta + i \cos \beta) =$ $= a e^{i(\alpha+\beta)}$	Vektor A_β je vektor intenziteta a i argumenta $(\alpha + \beta)$, dakle vektor a^α zakrenut za β .
$A_{-\beta} = a_{\alpha-\beta}$	$A_{-\beta} = a [\cos(\alpha-\beta) + i \sin(\alpha-\beta)] =$ $= \Delta x_{-\beta} + \Delta y_{90-\beta} =$ $= (\Delta x \cos \beta + \Delta y \sin \beta) +$ $+ i(\Delta y \cos \beta - \Delta x \sin \beta) =$ $= a e^{i(\alpha-\beta)}$	$A_{-\beta}$ je vektor a^α zakrenut za $(-\beta)$.
$\bar{A} = a_{-\alpha}$	$\bar{A} = a (\cos - i \sin \alpha) =$ $= \Delta x - \Delta y_{90} =$ $= \Delta x + \Delta y_{270} =$ $= a e^{-i\alpha}$	Konjugirani vektor vektoru A.
$iA = A_{90} =$ $= a_{\alpha+90}$	$iA = a [\cos(\alpha+90) + i \sin(\alpha+90)]$ $= \Delta x_{90} + \Delta y_{180} =$ $= -\Delta y + i \Delta x$	iA je vektor a^α zakrenut za 90° .

Oznaka	Analitički identiteti	Objašnjenje
$A_{180} = -A$	Proizlazi iz napred navedenog	
$A_{-\alpha} = a = A $..	Absolutna vrednost vektora A.
$\ A\ = a$		Pravac vektora A. Pri tome a, t. j. absolutna vrednost, može biti pozitivna ili negativna.
$(\alpha), (\beta), (\varphi)$		Ugao $(\alpha), (\beta), (\varphi) \dots$ za razliku od pravca $\alpha, \beta, \varphi, \dots$ Uglovi $(\alpha), (\beta) \dots$ odabiru se obično tako, da oni leže naspram odgovarajućih vektora, no time to ne mora uvek biti.
$1_\alpha, 1_\beta, 1_\varphi$	$1_\varphi = \frac{V}{v} = \frac{\Delta x + i \Delta y}{v} = \cos \varphi + i \sin \varphi$	Jedinični vektori
$AB = ab_{\alpha+\beta}$	$AB = ab [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]$	Algebarski proizvod vektora bez međuznaka.
$A \times B = c$	$A \times B \text{ ab c, s } (\beta - \alpha) = c$	Skalarni proizvod vektora u ovom slučaju skalar c.
$A \times B = C = -c_{090}$	$ C = ab \sin(\beta - \alpha) = a_{ik} = \text{aps.} \begin{vmatrix} \Delta x_a & \Delta y_a \\ \Delta x_b & \Delta y_b \end{vmatrix} = \Delta $	Vektorski proizvod vektora (izlazi samo vektor u prostoru) nas će kod primena interesirati uglavnom samo njegova absolutna vrednost.
$\frac{A}{B} = \frac{a_\alpha}{b_\beta} = \left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta}$	Izlazi iz napred navedenog	Delenje vektora vektorom u ravni.
$A_\gamma^\beta = a_{\alpha\gamma}^\beta = c_\gamma = C$	$A_\gamma^\beta = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \gamma)} 1_\gamma$	Komponente. Čitamo: Komponenta za A od β na γ .
$C_\alpha^\beta = a = c_{\gamma\alpha}^\beta$	Izlazi iz napred navedenog	Absolutna vrednost komponente, koja se skraćeno piše kao C_α^β umesto $\frac{C_\alpha^\beta}{1_\alpha}$

Primer: Ako je $A = B + C$ onda su B i C komponentne vektora A.

Pritome je: $B = A_\beta^\gamma, C = A_\gamma^\beta$ pa je $A = A_\beta^\gamma + A_\gamma^\beta$.

Oznake	Analički identiteti	Objašnjenje
$1_{0\beta}^{\alpha} = 1_{\beta}^{\alpha}$	Izlazi iz napred navedenog	Jedinična komponenta
$e_{\varphi_2}^{\delta \gamma \beta} = \Lambda$	„	Komponenta vektorskog poligona i to: $e_{\varphi_2}^{\delta} =$ komponenta vektora E od δ na φ_2 $e_{\varphi_2 \varphi_1}^{\delta \gamma} =$ „ „ $E_{\varphi_2}^{\delta}$ „ γ „ φ_1 $e_{\varphi_2 \varphi_1}^{\delta \gamma \beta} =$ „ „ $E_{\varphi_2 \varphi_1}^{\delta \gamma}$ od β na α — dakle $A = a_{\alpha}$.
$\overline{A}_{-\gamma}^{\beta} = \overline{C}$	„	Konjugirana komponenta
U(x)		n. pr. sinusoida: $x + i \sin x = U(x)$ Vektorska funkcija po x — u
\dot{U}		Tangenta na gore označenu vektorsku funkciju, odnosno na njen hodograf — prvi izvod vektora po njegovom skalornom argumentu
\ddot{U}		Normala na tangentu
$\dot{U} = u + io$		Uslov za ekstrem

Objašnjenje: Rešenje je očigledno. Prema uvodno navedenim identitetima imamo

$$\text{odmah: a) } x_3 = x_1 + 200,35 \cos \alpha + 15,6 \cos (\alpha + 90)$$

$$y_3 = y_1 + 200,35 \sin \alpha + 15,6 \sin (\alpha + 90)$$

ili

$$\text{b) } x_3 = x_1 + \frac{200,35 \Delta x}{250,0} + \frac{-15,6 \Delta y}{250,0}$$

$$y_3 = y_1 + \frac{200,35 \Delta y}{250,0} + \frac{15,6 \Delta x}{250,0}$$

što sledi iz identiteta:

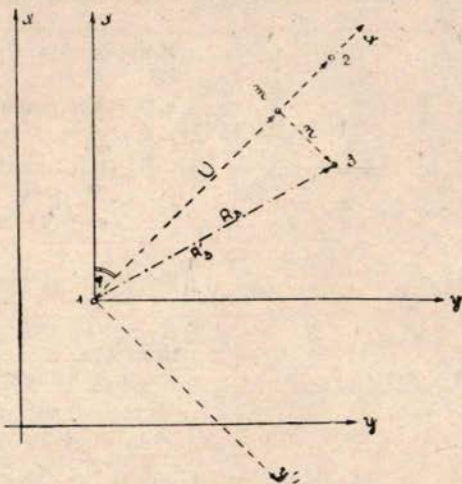
$$R_3 = x_3 + iy_3 = (x_1 + iy_1) + \left(\frac{200,35 A}{a} \right) + \left(\frac{15,6 A_{90}}{a} \right).$$

Prema tome se u izrazu: $\underline{R_n R_1 + a_{n\alpha} + b_{n\alpha+90}}$ nalazi iscrpno i očigledno objašnjenje za ceo račun malih tačaka.

2. Primer

Poznate su koordinate tačkaka $\odot 1$, $\odot 2$, $\odot 3$

Traže se ortogonalni elementi (m, n) u svrhu iskolčenja.



Slika 1.

1. Rešenje

Pomaknimo prethodno naš koordinatni sistem (x, y) u tačku $\odot 1$

U tom slučaju ćemo umesto $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\}$ imati $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x_n - x_1 \\ y_n - y_1 \end{matrix} \right\}$ dakle —

koordinatne razlike. Sada dolazi u pitanje samo čista vrtnja prvobitnog koordinatnog sistema

(x, y) za ugao φ , sa $\text{tg } \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ u novi koordinatni sistem (x', y') .

Na osnovu toga rešenje glasi:

$${}_3R' = {}_3R_{-\varphi}$$

(Uporedi ovo rešenje sa »Uvodom u višu analizu od Dr. Željka Markovića, str. 175, 176, pa će se moći oceniti značaj dobre simbolike.)

Objašnjenje:

Rešenje je očigledno. Mi iz toga odmah čitamo i pišemo:

$${}_3R' = x'_3 + i y'_3 = r_3 [\cos(\varrho - \varphi) + i \sin(\varrho - \varphi)]$$

odnosno skalarno, cepanjem desne strane i to:

$$x'_3 = r_3 \cos(\varrho - \varphi) = r_3 \cos \varrho \cos \varphi + r_3 \sin \varrho \sin \varphi = \underline{\underline{x_3 \cos \varphi + y_3 \sin \varphi = m}}$$

i

$$y'_3 = r_3 \sin(\varrho - \varphi) = r_3 \sin \varrho \cos \varphi - r_3 \cos \varrho \sin \varphi = \underline{\underline{y_3 \cos \varphi - x_3 \sin \varphi = n}}$$

gde su (x_3, y_3) uzeti u koordinatnom sistemu (x, y) , pomaknutom za R_1 .

2. Rešenje

Koordinatni sistem (x, y) pomaknut je, kao u prvom slučaju sa svojim iskodištem u točku $\odot 1$.

Sistem (x', y') određen je svojim ortovima 1_φ te $1_{\varphi+90}$

Pošto su x', y' skalarne komponente vektora R' , to možemo upotrebiti skalarni proizvod vektora, dakle:

$$\underline{\underline{R'_3 = R_3 \times 1_\varphi + R_3 \times 1_{\varphi+90} = \frac{R_3 U}{v} + \frac{R_3 U_{90}}{v}}}$$

i to je drugo rešenje našeg zadatka.

Objašnjenje:

Pročitajmo 1. stav i pišimo ono, što možemo direktno čitati:

$$\underline{\underline{R'_3 = R_3 \times 1'_\varphi + R_3 \times 1_{\varphi+90}}}$$

znači:

$$R_3 \times 1_\varphi = {}_3x'_0 = ({}_3x_0 + {}_3y_{90}) \times 1_\varphi = {}_3x_0 \times 1_\varphi + {}_3y_{90} \times 1_\varphi = x_3 \cos(\varphi-0) + y_3 \cos(\varphi-90)$$

dakle odmah $\underline{\underline{x_3 = x_3 \cos \varphi + y_3 \sin \varphi = m}}$ analogno dobivamo iz

$R_3 \times 1_{\varphi+90} = {}_3y'_{90}$ odmah skalarno: $y_3 = y_3 \cos \varphi - x_3 \sin \varphi = n$

Pročitajmo sada 2. stav (ispustićemo indekse, jer smetaju preglednosti)

$$\text{On glasi: } R' = \frac{R \times U}{v} + \frac{R \times U_{90}}{v}$$

dakle:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \frac{R \times U}{v} = \frac{(x_0 + y_{90}) \times (\Delta x_0 + \Delta y_{90})}{v} = \\ &= \frac{x \cdot \Delta x \cos(0-0) + x \Delta y \cos(90-0) + y \Delta x \cos(90-0)}{v} + \\ &+ \frac{y \Delta y \cos(90-90)}{v} = \frac{x \Delta x}{v} + \frac{0}{v} + \frac{0}{v} + \frac{y \Delta y}{v} \end{aligned}$$

odnosno skalarno

$$\underline{\underline{x' = \frac{x \Delta x + y \Delta y}{v} = m}}$$

i analogno

$$\underline{\underline{y' = \frac{y \Delta x - x \Delta y}{v} = n}}$$

gdje je

$$\left. \begin{aligned} (y, y) &= (y_3, y_3) \\ (\Delta x, \Delta y) &= (x_2, y_2) \end{aligned} \right\} \text{ u sistemu } (x, y) \text{ sa ishodištem u točki } \odot 1.$$

Sve što je navedeno u 2. rešenju sledi i iz 1. rešenja. Tako je prema 1. rešenju: $R' = r \cos(\varrho - \varphi) + i \sin(\varrho - \varphi)$, te iz

$$r \cos(\varrho - \varphi) \text{ sledi: } r \cos(\varrho - \varphi) = R \cdot 1_{\varphi}, \text{ a iz}$$

$$r \sin(\varrho - \varphi) \text{ sledi: } r \sin(\varrho - \varphi) = r \cdot \cos[(\varrho - \varphi) + 90] = R \cdot 1_{\varphi+90}$$

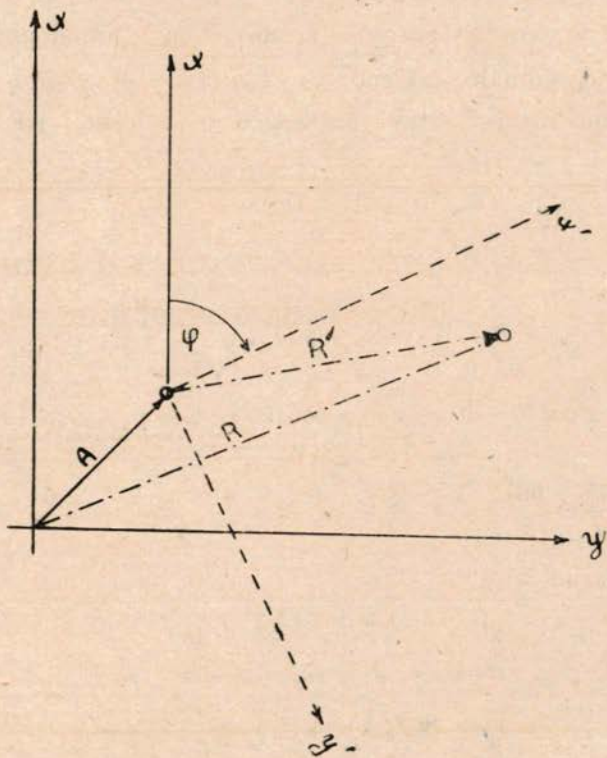
$$\text{dok iz } R \times 1_{\varphi} \text{ sledi: } R \times 1_{\varphi} = \frac{R \times U}{v} \text{ te iz}$$

$$R \times 1_{\varphi+90} \text{ sledi: } R \times 1_{\varphi+90} = \frac{R \times U_{90}}{v}$$

Prema tome se izraz $R' = R_{-\varphi}$ može smatrati kao osnovno, dovoljno i precizno rešenje problema za transformaciju koordinata, gde je u pitanju samo vrtnja. Osim toga on važi za oba prelaza, jer iz $R' = R_{-\varphi}$ rezultira $R = R_{\varphi}$.

Ako je u pitanju i pomak koordinatnog sistema za veličinu A , dakle direktan prelaz iz jednog sistema u drugi, onda rešenje glasi:

$$\underline{R' = (R - A)_{-\varphi}}$$



Slika 2.

i to je opšti obrazac za transformaciju koordinata u ravni. On važi isto tako za oba prelaza, jer iz $R' = (R - A)_{-φ}$ izlazi $R'_{φ} = R - A$ odnosno

$$R = R'_{φ} + A$$

Naravno, da $φ$ može biti pozitivan ili negativan, već prema tome, u kome je smislu usledilo obrtanje jednog sistema u odnosu na drugi sistem.

Ako ponovno uporedimo »Uvod u višu analizu« od Dr. Željka Markovića, onda možemo opaziti, da se sa onom simbolikom, koja je ovom autoru stajala na raspoloženju ovaj problem nije mogao obuhvatiti u celini, nego se on morao razmatrati odvojeno, dakle rastrgano. A to samo potvrđuje ono što je uvodno navedeno, a to je da rešavanje mnogih problema zavisi u velikom delu od izbora odgovarajućih oznaka.

**Drugovi pišite nam sa terena
o Vašim stručnim zapažanjima
i radu.**
