Đura Berković v. geom. - Novi Sad

Hayfordova metoda računanja otklona vertikale

Otklon vertikale jeste otstupanje vertikale fizičkog viska t. j. normale geoida od normale zemljinog sferoida ili usvojenog rotacionog elipsoida. On je prouzrokovan nepravilnom raspodelom masa na površini i u unutrašnjosti zemljine kore. Njegova se veličina može odrediti:

1. Upoređivanjem rezultata astronomskih i geodetskih merenja tj. geografskih koordinata određenih astronomskim i geodetskim putem. Pri tome se dobija samo relativni otklon, dakle razlika prema otklonu na drugim tačkama.

2. Iz gravimetriskih merenja EÖTVÖS-ovom torzionom vagom-variometrom.

3. Računanjem privlačnog delovanja vidljivih okolnih masa na vertikalu.

Prvi se način primenjuje samo na relativno malom broju tačaka, na t. zv. Laplace-ovim tačkama u svrhu strogog izravnavanja astronomske — geodetske mreže, i izložen je u priručnicima i udžbenicima više geodezije Jordana, Helmerta, Eggerta L. Krügera i drugih.

Drugi način je opširno obrađen i u našoj stručnoj literaturi: Ing. B. Apsen, Geodetski priručnik II deo, Gravimetrija s obzirom na Eötvös-ov varijometar (Zagreb 1949).

Kao što se vidi iz naslova, Eötvös-ov varijometar služi za merenje varijacija sile teže. Otklon vertikale dobija se računskim putem iz podataka merenja.

Trećim načinom određuje se otklon vertikale iz privlačnog delovanja vidljivih okolnih masa. Pri tome se zanemaruje uticaj podzemnih, nepravilno raspoređenih masa koji se ovim načinom ne može ustanoviti. S obzirom na to, što je uticaj podzemnih masa, koji je od silnog značaja za geofiziku znatno manji od uticaja vidljivih masa — planinskih masiva — ovaj se način primenjuje u slučaju, kada se traži približna vrijednost otklona vertikale radi popravljanja merenih uglova. Praktična primena ove metode izložiće se u ovome članku.

Gravimetrijska merenja su dokazala da postoji otklon vertikale i u predelima bez vidljivih masa u okolini, dakle i u ravnici, što je svakako posledica uticaja nepravilno raspoređenih podzemnih masa, odnosno masa nejednakih gustina. Prema tome može se zaključiti: Ako se računskim putem iz vidljivih masa nedobija otstupanje, to još ne znači da ne postoji otklon, ali obratno, ako se računskim putem dobija izvesno otstupanje, onda je sigurno da postoji otklon vertikale.

Teoriju računanja otklona vertikale iz vidljivih okolnih masa obradili su u stručnoj literaturi pored ostalih i Helmert »Viša geodezija« i Jordan, III knjiga, izdanje 1907 godine, još opširnije u izdanju 1926 god., gde je izvedena i Hayfordova formula za sastav dijagrama, koji će se u ovome članku prikazati.

Da bi se ukazalo na potrebu proračunavanja otklona, ispitaće se najpre uticaj otklona vertikale na merenje horizontalnih i vertikalnih uglova. U navedenoj literaturi je istaknuto, da otklon vertikale koji u planinama srednje visine iznosi 5—10″, može da dostigne u visokim planinama vrednost od 1′.

Greška opažanog pravca prouzrokovana otklonom vertikale istovetna je sa greškom, koja nastaje kada instrumenat nije potpuno vertikalno postavljen. Ta se greška može sračunati po obrascu:

$$\delta'' = \Theta \sin u \operatorname{tg} h$$

gde je „Θ“ vrednost otklona u sekundama, »u« njegov azimut a »h« vertikalni ugao vizure. (Izvođenje ove formule u udžbenicima geodezije). Greška raste sa veličinom vetikalnog ugla i dostiže maksimum, kada je pravac vizure uspravan na pravac azimuta otklona.

Primer: U planinskom terenu srednje visine Θ neka bude $= 10''$, $u = 90^0$, a $h = 30^0$. Uticaj otklona vertikale biće $10''.0{,}577 = 5{,}7''$ koje se otstupanje s obzirom na tačnost kojom se danas mere horizontalni uglovi ne bi smelo zanemariti.

Uticaj otklona na merenje vertikalnih uglova biće $\iota'' = \Theta \cos u$, što znači da će uticaj biti maksimalan u slučaju, kada je vizura u pravcu azimuta otklona, kada će $\iota'' = \Theta''$.

Kod triangulacija viših redova, kada se trigonometriske tačke nalaze na većoj međusobnoj udaljenosti i na uvišicama terena, elevacioni uglovi su obično maleni a prema tome i uticaj otklona vertikale biće neznatan. Međutim kod detaljne triangulacije, a naročito kod samostalne triangulacije u specijalne svrhe na pr. kod rudničke triangulacije uticaj otklona vertikale može biti osetan, te bi ga trebalo uzeti u obzir. Rudnici se obično nalaze u planinskim predelima. Radi davanja pravca za potkope i tunele potrebno je da se trigonometrijska mreža rudničke triangulacije, koja je vezana za mrežu višega reda, svede po strmim padinama do samog ulaza u potkop koji se obično nalazi u dolini. Posljednja trigonometriska tačka pred ulazom vezana je sa ostalim tačkama često sa vrlo strmim vizurama. U takvom slučaju trebalo bi voditi računa o eventualnom otklonu vertikale i isti barem aproksimativno proračunati radi popravljanja merenih uglova. Prema specijalnom izveštaju M. Rosenmund-a, Bern 1901 god., o proboju simplonskog tunela, otstupanje zbira uglova u trouglovima trigonometrijske mreže smanjilo se nakon uvađanja popravaka zbog otklona vertikale od $\pm 3{,}1''$ na $\pm 1{,}7''$ prosečno.

Osnovni obrazac za računanje otklona jeste relacija:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{m}{S^2} : \frac{M}{R^2} = \frac{mR^2}{MS^2}$$

gde je Θ izražen u uglovnoj meri, M masa cele zemljine lopte, m masa obližnje planine a S otstojanje stanice od težišta odnosne planine. Ako se srednja gustina zemlje označi sa D onda se za njenu masu dobija izraz

$M = \frac{4}{3} D \pi R^3$. Volumen planine neka bude V, njena gustina d, te prema tome njena će masa biti $m = V \cdot d$

Iz gornjih jednačina dobija se otklon kao mali ugao:

$$\Theta'' = \frac{3\,d\,V\,\varrho''}{4\,D\,R\,S^2\,\pi}$$

Za srednju gustinu zemlje uzima se obično $D = 5{,}6$ a za srednji poluprečnik $R = 6{,}370.000$ te se dobija

$$\Theta'' = 0{,}00138\,\frac{Vd}{S^2} \quad \text{(V u km, a S u metrima)}$$

Da bi se ova formula mogla primeniti zamišlja se da je teren oko stanice (za koju se želi odrediti otklon) podeljen na prizmatične stubove sa bazisom f i sa nadmorskom visinom h, koja se uzima iz topografskih karata. Volumen jednoga stuba će biti $V = f \cdot h$ a otklon koji on prouzrokuje biće:

$$\Theta'' = 0{,}00138\,\frac{h_n\,f_n}{S_n^2}$$

Kada se za gustinu površinskih masa uzima $\frac{1}{2}\,D = 2{,}8$ (ovo je zapravo samo pretpostavka) onda sledi da je

$$\Theta'' = 0{,}00386\,\frac{h_n\,f_n}{S_n^2}$$

Θ se pretstavlja kao rezultanta komponente ξ u pravcu meridijana, i η u pravcu paralele. Azimut težišta bazisa f_n je α. Prema tome za komponentu u pravcu meridijana dobija se:

$$\xi'' = 0{,}00386\,\frac{h_n\,f_n \cos\alpha_n}{S_n^2}$$

a u pravcu paralele

$$\eta'' = 0{,}00386\,\frac{h_n\,f_n \sin\alpha_n}{S_n^2}$$

Ove su komponente otklona prouzrokovanog privlačnim delovanjem jednog stuba, a komponente otklona usled delovanja svih okolnih stubova biće ravne algebarskom zbiru svih parcijalnih komponenata

$$\xi = [\xi_n] \text{ i } \eta = [\eta_n]$$

Da bi se uprostile računske operacije koje se stalno ponavljaju, ovo računanje treba vršiti tabelarno po nekoj šemi. U tu svrhu zamišljamo da je teren oko stanice podeljen koncentričnim krugovima na zone (prstenove) koje ćemo radijalnim pravcima podeliti na trapeze sličnim trapezima na kartama u azimutalnoj projekciji. Radi daljeg uprošćavanja računanja, Hayford je izradio dijagram, čiji je princip izložen u III knjizi Jordana, izdanja 1926 godine.

Polazeći sa osnovnih formula za ξ i η Hayford dolazi nakon složenih izvođenja do obrazaca:

$$\triangle \xi'' = +\,0{,}00386\,\mathrm{H}\,(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\,\log\mathrm{nat}\,\frac{r_2}{r_1}$$

$$\text{i}\ \triangle \eta'' = -\,0{,}00386\,\mathrm{H}\,(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\,\log\mathrm{nat}\,\frac{r_2}{r_1}$$

Pri ovome je H srednja nadmorska visina trapeza, a α azimut radijalnog pravca, a r su poluprečnici koncentričnih krugova.

$\triangle\xi$ i $\triangle\eta$ pretstavljaju komponente otklona nastalih usled privlačnog delovanja pojedinih elemenata (stubova) na koje smo podelili teren oko stanice. Algebarski zbirovi ovih parcijalnih komponenata daju komponentu za otklon u meridijanu $\xi = [\triangle\xi]$ i komponentu za otklon u pravcu paralele $\eta = [\triangle\eta]$. Razlika $(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$ odnosno $(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$ konstantna, recimo 0,10, a $\triangle\xi$ odnosno $\triangle\eta$ treba da dobijemo u desethiljaditim delovima sekunde (praktično računanje treba izvesti samo na tri decimalna mesta). Prema tome:

$$0{,}0001'' = 0{,}00386.0.1\,\log\mathrm{nat}\,\frac{r_2}{r_1}$$

iz toga sledi da je $\log\mathrm{nat}\,\frac{r_2}{r_1} = \frac{0{,}0001}{0{,}000\,386} = 0{,}259907$

$$\begin{aligned}
\log\left(\log\mathrm{nat}\,\frac{r_2}{r_1}\right) &= \log 0{,}25907 = 0{,}413417 - 1\\
\log \mathrm{M} &= 0{,}637784 - 1\\
\hline
\log\left(\log\frac{r_2}{r_1}\right) &= 0{,}051201 - 1\\
\log\frac{r_2}{r_1} &= 0{,}112513\\
\frac{r_2}{r_1} = q &= 1{,}29573
\end{aligned}$$

što znači da odnos između poluprečnika krugova treba da bude konstantno 1,29573.

Da bi se ovo postiglo, poluprečnici treba da predstavljaju geometrisku progresiju sa $q = 1{,}29573$, prema obrascu $r_n = r_1 q^{n-1}$ Za r se uzima 100 m. Ako želimo da naš dijagram obuhvati teren do 5 km udaljenosti od stanice, r će biti 5.000 m, a broj krugova odrediti će se primenom gornje jednačine:

$$5000 = 100\ q^{n-1}$$

nakon skraćivanja i logaritmovanja sledi

$$(n-1)\log q = \log 50 \text{ i dobija se } n-1 = \frac{\log 50}{\log q} = \frac{1,69897}{0,112513} \doteq 15$$

što znači da će dijagram imati 16 krugova.

Pojedine prečnike sračunaćemo isto tako iz gornje jednačine:

$$\log r_n = \log r_1 + (n-1)\log q$$

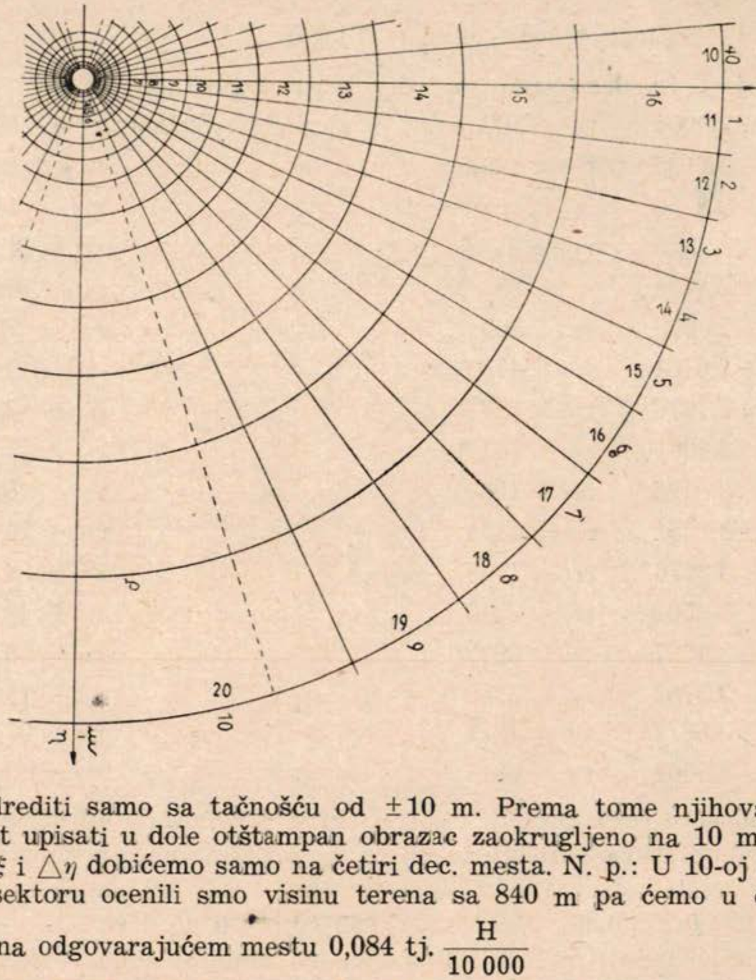
Računanje je izvedeno samo sa 4 dec. mesta logaritma

$\log r_1 = 2,0000$	$r_1 = 100,0$ m	u razmeri 1:50.000	$r_1 = 2,00$ mm
$\log r_2 = 2,1125$	$r_2 = 129,6$		$r_2 = 2,60$
$\log r_3 = 2,2250$	$r_3 = 167,9$		$r_3 = 3,36$
$\log r_4 = 2,3375$	$r_4 = 217,5$		$r_4 = 4,35$
$\log r_5 = 2,4501$	$r_5 = 281,9$		$r_5 = 5,64$
$\log r_6 = 2,5626$	$r_6 = 365,3$		$r_6 = 7,31$
$\log r_7 = 2,6751$	$r_7 = 473,3$		$r_7 = 9,47$
$\log r_8 = 2,7876$	$r_8 = 613,2$		$r_8 = 12,26$
$\log r_9 = 2,9001$	$r_9 = 794,3$		$r_9 = 15,89$
$\log r_{10} = 3,0126$	$r_{10} = 1030$		$r_{10} = 26,60$
$\log r_{11} = 3,1251$	$r_{11} = 1334$		$r_{11} = 26,68$
$\log r_{12} = 3,2376$	$r_{12} = 1738$		$r_{12} = 34,76$
$\log r_{13} = 3,3502$	$r_{13} = 2240$		$r_{13} = 44,80$
$\log r_{14} = 3,4627$	$r_{14} = 2902$		$r_{14} = 58,04$
$\log r_{15} = 3,5752$	$r_{15} = 3760$		$r_{15} = 75,20$
$\log r_{16} = 3,6877$	$r_{16} = 4872$		$r_{16} = 97,44$
$\log r_{17} = 3,8002$	$r_{17} = 6312$		$r_{17} = 126,24$

Kvadrante ćemo podeliti dijametralnim pravima na 10 delova, a zimute ovih pravaca odredićemo tako, da razlika njihovih sinusa (kosinusa) bude stalno 0,1. Prema tome prirodne vrednosti sinusa će biti: 0,00 0,10 0,20 0,30 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 1,00 a njima odgovarajući uglovi će biti (zaokruženi na minute) 0°00', 5°44', 11°32', 17°27', 23°35', 30°00', 36°52', 44°26', 53°08', 64°09' i 90°00'.

Na slici je prikazan prvi kvadrant dijagrama koji treba izraditi na providnoj hartiji dobrog kvaliteta ili ga urezati na celuloidnoj ploči. Za računanje $\triangle\eta$ nije potreban drugi dijagram, već se ovaj okrene za 90° u smislu skazaljke na satu.

Na topografskoj karti razmere 1:50000 a kroz tačku za koju želimo proračunati otklon, povućićemo paralelu sa x osom koordinatnog sistema (približno, pomoću dve trogonometrijske tačke i njihovih koordinatnih razlika) da bi mogli orijentisati dijagram. Centar dijagrama stavićemo na tačku a pravac $+\xi$ treba da se poklopi sa pravom povučenom na karti. U svakom trapezu odrediće se ocenjivanjem prosečna visina terena pomoću izohipsa na karti (planu). Pri praktičnom radu ove će se visine



moći odrediti samo sa tačnošću od ± 10 m. Prema tome njihova će se vrednost upisati u dole otštampan obrazac zaokrugljeno na 10 m. Usled toga $\triangle\xi$ i $\triangle\eta$ dobićemo samo na četiri dec. mesta. N. p.: U 10-oj zoni na 23-em sektoru ocenili smo visinu terena sa 840 m pa ćemo u obrazac upisati na odgovarajućem mestu 0,084 tj. $\frac{H}{10\,000}$

Predznak se određuje prema kvadrantu u kome leži trapez te će u ovom slučaju predznak biti minus.

Kod većih trapeza, naročito u sektorima 10, 11, 30 i 31 ocenjivanje srednje visine biće otežano; no ovaj sektor može se podeliti kao što je na slici označeno isprekidanom crtom. $\sin\alpha_n - \sin\alpha_{n1}$ biće u ovom slučaju 0,05 a umesto $\frac{H}{10.000}$ u obrazac treba uneti $\frac{\frac{1}{2}(H_n + H'_n)}{10.000}$ Biće teškoća i pri ocenjivanju visine u malim trapezima oko centra. Ako raspolažemo kartama krupnijih razmera n. p. 1:5000 (državna karta) onda ćemo za centralni deo tj. za prvu do petu zonu konstruisati po istom načelu jedan detaljni dijagram i pomoću njega na planu razmere 1:5000 odrediti visine trapeza oko centra. Algebarski zbirovi vrednosti [$\triangle \xi$] (po zonama vertikalno a konačna suma ovih zbirova horizontalno) daje nam vrednost za komponentu ξ.

Računanje komponente ξ:

zona	10	11	12	13	14	15	
Sektor	$\frac{Hm}{10.000}$ (zaokrugljeno na 10 m)						
1	+ 0,066	0,095	0,056	00,66	0,040	0,036	
2	0,068	0,069	0,066	0,062	0,038	0,036	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
19	+ 0,069	0,071	0,076	0,091	0,089	0,089	
20	+ 0,072	0,075	0,076	0,088	0,081	0,085	
21	— 0,075	0,080	0,078	0,081	0,085	0,080	
22	— 0,079	0,083	0,081	0,090	0,081	0,017	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
30	.	.	0,105	0,100	.	.	
31	.	.	.	0,112	0,130	0,140	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
39	— 0,064	0,060	0,055	0,049	0,042	0,035	
40	— 0,064	0,063	0,053	0,052	0,042	0,034	
Σ	— 0,113	— 0,166	— 0,218	— 0,140	— 0,391	— 0,401	
Popravka po Pratt-u	+ 1	+ 2	+ 3	+ 3	+ 11	+ 15	
	— 0,112	— 0,164	— 0,215	— 0,137	— 0,380	— 0,392	$\rightarrow \Sigma = \xi =$

Radi određivanja komponente η dijagram treba, kao što je već rečeno, okrenuti za 90° i na isti način sračunati vrednosti za $\triangle \eta$ i $\triangle \eta$.

Rezultati za ξ i η dobiveni na ovaj način pokazali su se istovetnim po predznaku sa rezultatima dobivenim iz gravimetrijskih merenja, ali su znatno veći od njih iako u ovo računanje ne ulazi privlačno delovanje podzemnih masa sa većom gustiom od 2,8. Mogućnost za popravljanje daje H. Prattova hipoteza o izostaziji. Pratt smatra da na izvesnoj dubini nastupa izjednačenost zemljine gustine i tu nejednakost zemljine gustine nazvao je defektom gustine. Za ovu dubinu on je proračunao $H_0 = 122{,}2$ km. Skoro isti rezultat dobio je svojim proračunima i Helmert. (Opširno o tome u stručnoj knjizi imenovanog). Ovde ćemo izneti samo konačnu formulu koju je Pratt postavio za računanje popravke:

$$F = 1 - \frac{\log \dfrac{r^2 + \sqrt{H_o^2 + r_2^2}}{r_1 + \sqrt{H_o^2 + r_1^2}}}{\log \dfrac{r_2}{r_1}}$$

za naš dijagram popravke bi bilo:

za zonu 16	$F \doteq$ 0,255	a u $^0/_{00}$ 45
15	$0{,}864^{+9}$—1	35
14	$0{,}973^{+8}$—2	27
13	$0{,}979^{+6}$—1	21
12	$0{,}984^{+5}$—1	16
11	$0{,}988^{+4}$—1	12
10	$0{,}991^{+3}$—1	9
9	$0{,}993^{+2}$—0	7
8	$0{,}995^{+2}$—1	5
7	$0{,}996^{+1}$	4

(Računanje smo propratili kontrolom I i II reda razlika).

Ove će se popravke uvek sa suprotnim predznakom dodavati zbirovima pojedinih zona.

Otklon u sekundama biće $\Theta'' = \sqrt{[\triangle\eta]^2 + [\triangle\xi]^2}$

njegov azimut računaće se iz $\operatorname{tg} \Theta = \dfrac{[\triangle\eta]}{[\triangle\xi]}$

Postavlja se pitanje, koliko zona treba uzeti u obzir tj. do koje udaljenosti od naše stanice treba vršiti ovo računanje. Očevidno je da zbirovi $[\triangle\xi]$ i $[\triangle\eta]$ u pojedinim zonama prestavljaju članove jednog konvergirajućeg reda, te prema tome oni treba da teže nuli. U praktičnoj primeni dijagrama, ovo će se osetiti tek na većoj udaljenosti od centra, na 5—10 km i to samo onda, ako daljnja okolina ima sličnu terensku konfiguraciju. Ako se nalazimo na rubu planine prema nekoj velikoj ravnici ili na morskoj obali, konvergencija neće nastupiti. U takvom slučaju treba računati sve dotle, dok priraštaj u $\triangle\xi$ i $\triangle\eta$ na dotičnoj i na susednim stanicama ne bude približno konstantan, što će obično nastupiti na udaljenosti od nekoliko km od centra. Jasno je da će se u ovom slučaju u stvari dobiti samo razlika otklona, tj. relativni otklon vertikale.

Godine 1948 prilikom rada na triangulaciji rudnika Rrtanj, pisac ovog članka proračunao je pomoću ovoga dijagrama privlačno delovanje planinskog masiva »Rtanj« sa najvišom kotom 1560 m, koja se nalazi na 5 km udaljenosti severozapadno od stanice (ispred ulaza u potkop) i sa kotom 1043 m (Baba) koja se nalazi na 2 km. jugozapadno od označene stanice i dobio je relativno malu vrednost za otklon, svega 3″, sa azimutom od 238°. Ovo se može objasniti s time što se u neposrednoj blizini stanice prema istoku nalazi uzvišenje sa kotom 860 m koja donekle kompenzira privlačno delovanje Rtanjskog masiva. Pošto je azimut pravca potkopa slučajno skoro isti kao i azimut otklona, popravka pravca nije bilo.

S obzirom na izložene proračune može se smatrati, da bi bilo od koristi, ako se kod rudničke triangulacije, naročito u visokim planinama, a kod postavljanja samostalne triangulacije proračuna na opisan način privlačno delovanje okolnih masa na vertikalu, ako ne i za svaku a ono bar za one stanice, koje po svome položaju ukazuju na mogućnost postojanja otklona vertikale.