

Grafičko izjednačenje čvorišta bez orijentacije

Teoretsko obrazloženje.

Određenje približnog smjernika i približnih koordinata.

Mjerena su tri poligona A, B, C (v. str. 262). Poligoni polaze iz poznatih točaka i sastaju se u čvorištu. U čvorištu nije provedena orijentacija, zato je potrebno odrediti najprije približni smjernik jedne stranice na čvorištu. Odredimo također i približne koordinate čvorišta. Izjednačenje će nam dati popravke približnog smjernika i popravke približnih koordinata, te popravke svih mjerenih stranica i kutova. Početnom smjerniku svakog poligona pribrajamo lomne kutove i dobijemo smjernik stranice uz čvorište. Za tri poligona biti će smjernici o_A, o_B, o_C , iz kojih uzevši opću aritmetičku sredinu odredimo približni smjernik o' , pri čemu uzimamo za kvalitetu svakog smjernika recipročnu vrijednost od broja poligonskih kutova n_A, n_B, n_C

$$o' = \frac{[po]}{[p]} = \frac{\frac{o_A}{n_A} + \frac{o_B}{n_B} + \frac{o_C}{n_C}}{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} + \frac{1}{n_C}}$$

Razlike $f_{\beta A} = o' - o_A, f_{\beta B} = o' - o_B$ i $f_{\beta C} = o' - o_C$ razdijelimo podjednako na sve kutove dotičnih poligona. S tako popravljenim kutovima izračunamo poligone i dobijemo koordinate čvorišta iz svakog poligona. Kao približne koordinate y' i x' uzmemo prostu ili približnu aritmetičku sredinu iz tih vrijednosti.

Jednadžbe pogrešaka i normalne jednadžbe.

Jednadžbe pogrešaka za svaki poligon koji je priključen na čvorište glase:

$$v = f_{\beta} + do \quad (1)$$

$$[\lambda \sin \alpha] + \left[\frac{v}{\rho} \Delta x \right] = f_y + dy \quad (2)$$

$$[\lambda \cos \alpha] - \left[\frac{v}{\rho} \Delta y \right] = f_x + dx \quad (3)$$

pri čemu Δx i Δy znače projekcije udaljenosti od pojedine točke poligona do krajnje točke t. j. čvorišta, a f_y i f_x znače koordinatna odstupanja

kod poligona koji su računati sa mjerenim kutovima nepopravljenim za iznos $\frac{f_\beta}{n}$.

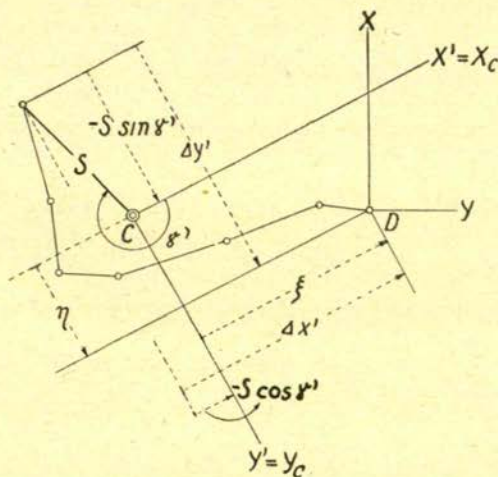
Uvedimo pomoćne koordinatne osi za svaki poligon tako da se poklapaju sa osima izravnavajuće elipse, onda će jednačbe (2) i (3) glasniti

$$[\lambda \sin \alpha'] + \left[\frac{v}{\rho} \Delta x' \right] = f_k + dk \quad (4)$$

$$[\lambda \cos \alpha'] - \left[\frac{v}{\rho} \Delta y' \right] = f_g + dg$$

Projekcije $\Delta x'$ i $\Delta y'$ mogu se razdijeliti na projekcije od točke poligona do težišta i od težišta do čvorišta, tako da je prema slici 3

$$\Delta x' = -S \cos \gamma' + \xi \quad Y' = -S \sin \gamma' + \eta$$



Slika 3

Uvrštenjem ovih izraza u jednačbe (4), dobijemo

$$[\lambda \sin \alpha'] - \left[\frac{v}{\rho} S \cos \gamma' \right] + [v] \frac{\xi}{\rho} = f_k + dk \quad (5)$$

$$[\lambda \cos \alpha'] + \left[\frac{v}{\rho} S \sin \gamma' \right] - [v] \frac{\eta}{\rho} = f_g + dg \quad (6)$$

Zamijenimo li $[v]$ iz jednačbe (1) u obje posljednje jednačbe dobijemo

$$\begin{aligned} [\lambda \sin \alpha'] - \left[\frac{v}{\rho} S \cos \gamma' \right] + do \frac{\xi}{\rho} &= f_k + dk - \frac{\xi}{\rho} f_\beta = \omega_k + dk \\ [\lambda \cos \alpha'] + \left[\frac{v}{\rho} S \sin \gamma' \right] - do \frac{\eta}{\rho} &= f_g + dg + \frac{\eta}{\rho} f_\beta = \omega_g + dg \end{aligned} \quad (7)$$

pri čemu su $\omega_k = -\frac{\xi}{\rho} f_\beta + f_k$ i $\omega_g = \frac{\eta}{\rho} f_\beta + f_g$ koordinatna odstupanja koja nastaju kod poligona kojima su lomni kutovi popravljjeni za iznos $\frac{f_\beta}{n}$

Srodno jednadžbama (2) kod izjednačenja čvorišta sa orijentacijom zbog transformiranih koordinata dobijemo jednadžbe pogrešaka

$$|v| := f_\beta + do = \omega_\beta + do$$

$$[\lambda \sin \alpha'] - \left[\frac{v}{\rho} S \cos \gamma' \right] - dy \cos \varepsilon + dx \sin \varepsilon + \frac{\xi}{\rho} do = \omega_k \quad (8)$$

$$[\lambda \cos \alpha'] + \left[\frac{v}{\rho} S \sin \gamma' \right] - dy \sin \varepsilon - dx \cos \varepsilon - \frac{\eta}{\rho} do = \omega_g$$

Iz toga normalne jednadžbe

$$\left[\frac{aa}{p} \right] k_1 + A_\beta do = \omega_\beta$$

$$\left[\frac{bb}{p} \right] k_2 + B_k dy + C_k dx + A_k do = \omega_k$$

$$\left[\frac{cc}{p} \right] k_3 + B_g dy + C_g dx + A_g do = \omega_g$$

i k tome još $[AK] = 0$, $[BK] = 0$, $[CK] = 0$, pri čemu su oznake

$$A_\beta = -1, A_k = \frac{\xi}{\rho} \text{ i } A_g = -\frac{\eta}{\rho}.$$

Uvedimo ostale oznake i postupak kao kod čvorišta sa orijentacijom, dobijemo normalne jednadžbe slične presijecanju natrag

$$[PAA] do + [PAB] dy + [PAC] dx = [PA \omega] \quad (9)$$

$$[PAB] do + [PBB] dy + [PBC] dx = [PB \omega] \quad (10)$$

$$[PAC] do + [PBC] dy + [PCC] dx = [PC \omega] \quad (11)$$

Prvom redukcijom elimineramo nepoznanicu do i uvrstivši za $dy = ds \sin \varphi$ i $dx = ds \cos \varphi$ dobijemo normalne jednadžbe

$$[PBB \cdot 1] ds \sin \varphi + [PBC \cdot 1] ds \cos \varphi = [PB \omega \cdot 1]$$

$$[PBC \cdot 1] ds \sin \varphi + [PCC \cdot 1] ds \cos \varphi = [PC \omega \cdot 1] \quad (12)$$

pri čemu je

$$[PBB \cdot 1] = [PBB] - \frac{[PAB] [PAB]}{[PAA]} \text{ i analogno za ostale članove.}$$

Na temelju ovih jednačaba odredit ćemo grafičkim putem ds i φ postupkom koji je sličan grafičkom izjednačenju presijecanja natrag.⁵

Grafičko rješavanje.

Za grafičko predočenje vrijednosti članova u jednadžbama (12) uvodimo oznake t, z, u, U , gdje je:

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{\xi}{k} ds' & t_g &= \frac{\eta}{g} ds' & z_k &= \frac{\rho}{k} ds' & z_g &= \frac{\rho}{g} ds' \\ u_\beta &= \frac{\rho}{r' m_v^2 n} & u_k &= \frac{\xi}{k} \omega_k & u_g &= \frac{\eta}{g} \omega_g & & (13) \\ U_k &= \frac{\rho}{k} \omega_k & U_g &= \frac{\rho}{g} \omega_g & & & & \end{aligned}$$

pri čemu su

ξ, η projekcije udaljenosti od težišta do čvorišta na pomoćne koordinatne osi koje se poklapaju sa velikim i malim osima elipsa pojedinih poligona.

k, g su velike i male osi elipsa

ω_k, ω_g su koordinatna odstupanja, koja odgovaraju pomoćnim osima a odnose se na poligone kojima su lomni kutovi popravljani za iznos $\frac{f_\beta}{n}$

Članovi normalnih jednačaba dobivaju ovaj oblik

$$P_\beta A_\beta A_\beta = \frac{\rho}{r' m_v^2 n} \quad P_\beta A_\beta \omega_\beta = - \frac{\rho}{r' m_v^2 n} \omega_\beta = - \mu_\beta$$

$$P_k A_k A_k = \frac{\rho}{k} \frac{\xi^2}{\rho^2} = \frac{\xi^2}{k\rho} \quad P_k A_k \omega_k = + \frac{\xi}{k} \omega_k = u_k$$

$$P_g A_g A_g = \frac{\rho}{g} \frac{\eta^2}{\rho^2} = \frac{\eta^2}{g\rho} \quad P_g A_g \omega_g = - \frac{\eta}{g} \omega_g = - u_g$$

$$P_k A_k B_k ds' = - \frac{\rho \xi}{k \rho} \cos \varepsilon ds' = t_k \sin (270^\circ + \varepsilon)$$

$$P_g A_g B_g ds' = \frac{\rho \eta}{g \rho} \sin \varepsilon ds' = t_g \sin \varepsilon$$

$$P_k A_k C_k ds' = \frac{\rho \xi}{k \rho} \sin \varepsilon ds' = t_k \cos (270^\circ + \varepsilon)$$

⁵⁾ Baturić: Rudarsko mjerenje, odsjek 120, 121.

$$P_g A_g C_g ds' = \frac{\rho \eta}{g \rho} \cos \varepsilon ds' = t_g \cos \varepsilon$$

$$P_k B_k \omega_k = -\frac{\rho}{k} \cos \varepsilon \cdot \omega_k = -U_k \sin(90^\circ + \varepsilon)$$

$$P_g B_g \omega_g = -\frac{\rho}{g} \sin \varepsilon \cdot \omega_g = -U_g \sin \varepsilon$$

$$P_k C_k \omega_k = +\frac{\rho}{k} \sin \varepsilon \cdot \omega_k = -U_k \cos(90^\circ + \varepsilon)$$

$$P_g B_g \omega_g = -\frac{\rho}{g} \cos \varepsilon \cdot \omega_g = -U_g \cos \varepsilon$$

Analogno će biti

$$P_k B_k B_k ds' = \frac{\rho}{k} ds' \cos^2 \varepsilon = z_k \sin^2(90^\circ + \varepsilon)$$

$$P_k B_k C_k ds' = -\frac{\rho}{k} ds' \sin \varepsilon \cos \varepsilon = z_k \sin(90^\circ + \varepsilon) \cos(90^\circ + \varepsilon)$$

$$P_k C_k C_k ds' = z_k \cos^2(90^\circ + \varepsilon)$$

$$P_g B_g C_g ds' = z_g \sin \varepsilon \cos \varepsilon$$

$$P_g B_g B_g ds' = z_g \sin^2 \varepsilon$$

$$P_g C_g C_g ds' = z_g \cos^2 \varepsilon$$

Izaberemo pomoćne koordinatne osi tako da nam projekcije ξ i η padnu u prvi kvadrant. Glavna os elipse g mora se poklapati sa pomoćnom osi X , zato takovu os označujemo sa g bez obzira na to da li je ona veća ili manja.

Pomoćnim osima dajemo onaj indeks, na koji se poligon odnose na pr. X_A , Y_A za poligon A .

Iz gornjeg slijedi da veličinu t_g treba nanositi u smjeru projekcije η , a veličinu t_k u smjeru suprotnom od projekcije ξ .

Veličinu z_g treba nanositi u smjeru osi elipse g , a veličinu z_k u smjeru osi elipse k .

Veličine U_g i U_k treba nanositi suprotno smjeru u kojem se nalaze ω_g i ω_k .

Nadodavajući veličine t jednu na drugu u odgovarajućim smjerovima dobijemo t -poligon. Projekcije spojnice početne i krajnje točke t -poligona predočuju

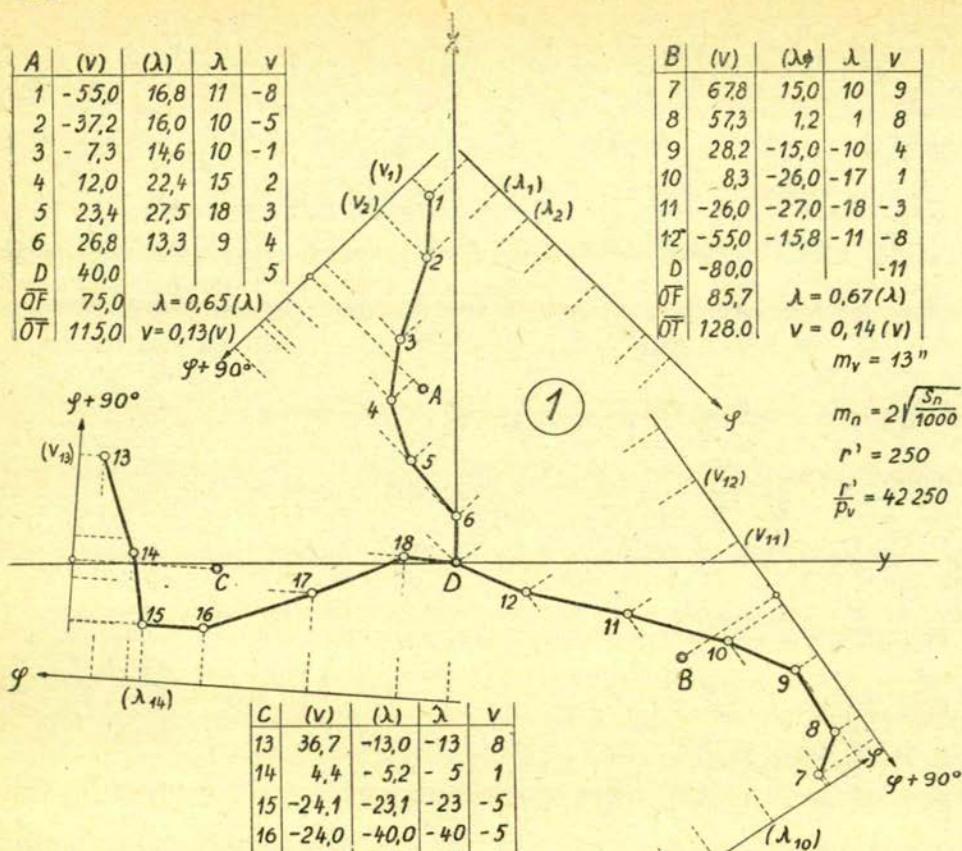
$$[PAB] ds' = [PAA] t_s \sin \vartheta = N t_s \sin \vartheta$$

$$[PAC] ds' = [PAA] t_s \cos \vartheta = N t_s \cos \vartheta$$

$N = [PAA]$ je broj koji se računski odredi.

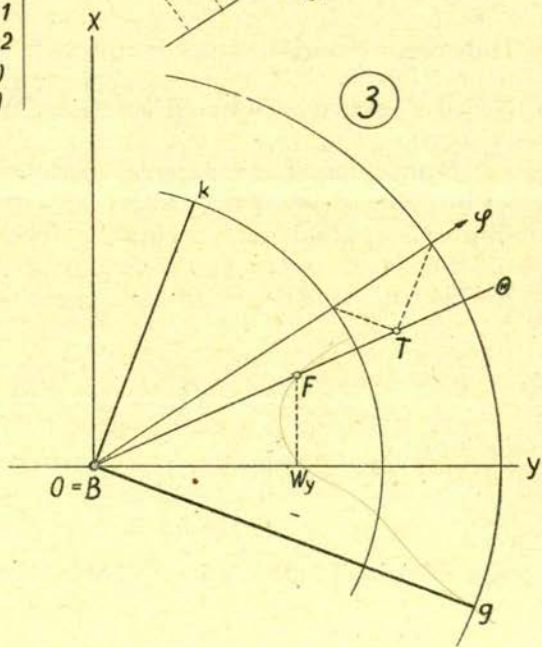
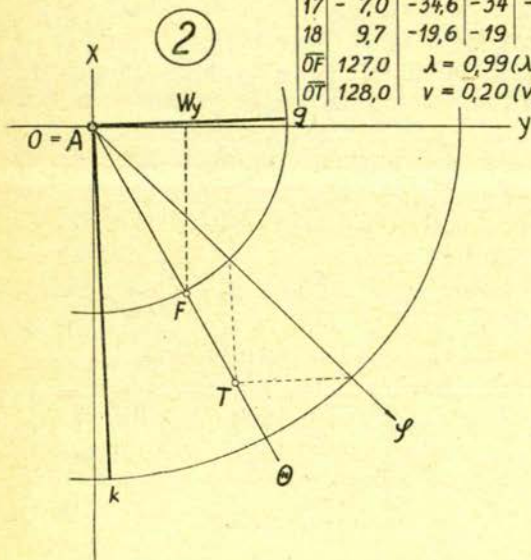
A	(v)	(λ)	λ	v
1	-55,0	16,8	11	-8
2	-37,2	16,0	10	-5
3	-7,3	14,6	10	-1
4	12,0	22,4	15	2
5	23,4	27,5	18	3
6	26,8	13,3	9	4
D	40,0			5
\overline{OF}	75,0	$\lambda = 0,65(\lambda)$		
\overline{OT}	115,0	$v = 0,13(v)$		

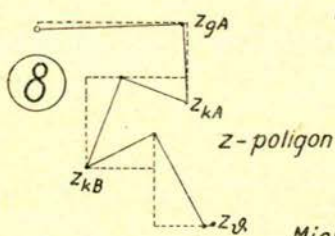
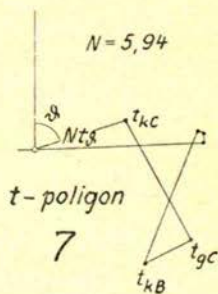
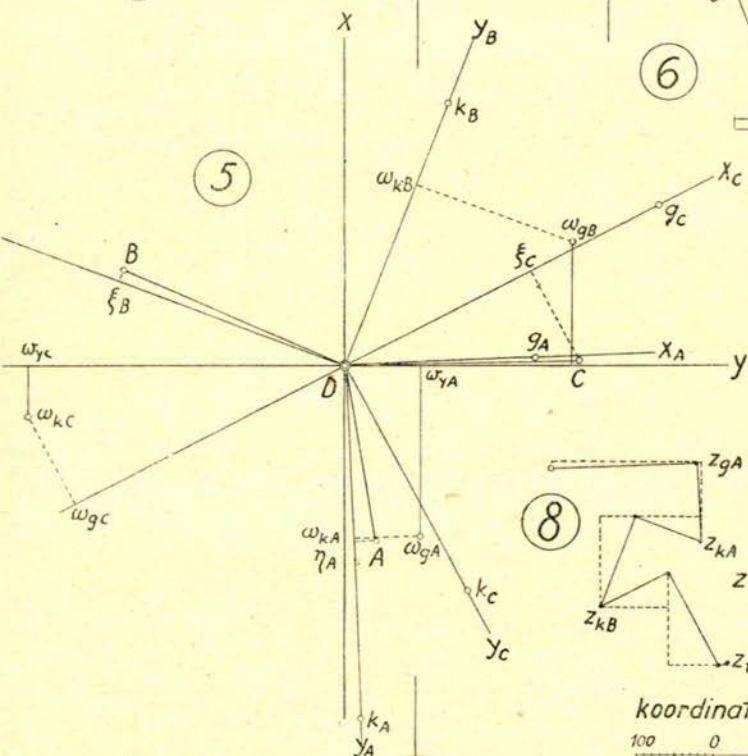
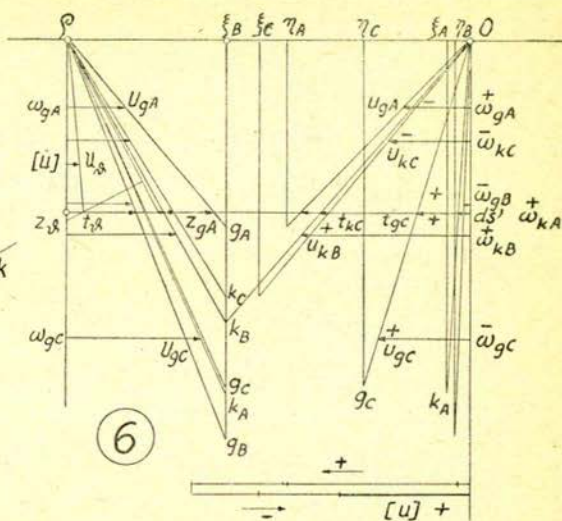
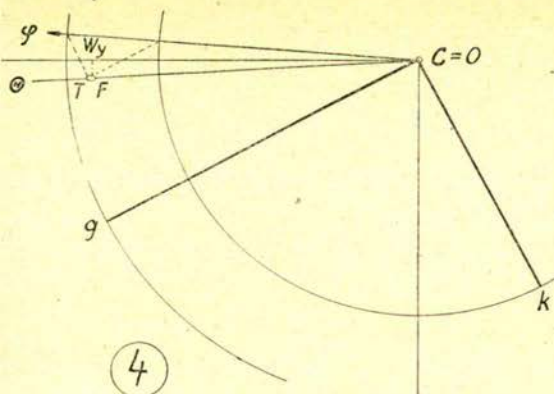
B	(v)	(λφ)	λ	v
7	67,8	15,0	10	9
8	57,3	1,2	1	8
9	28,2	-15,0	-10	4
10	8,3	-26,0	-17	1
11	-26,0	-27,0	-18	-3
12	-55,0	-15,8	-11	-8
D	-80,0			-11
\overline{OF}	85,7	$\lambda = 0,67(\lambda)$		
\overline{OT}	128,0	$v = 0,14(v)$		



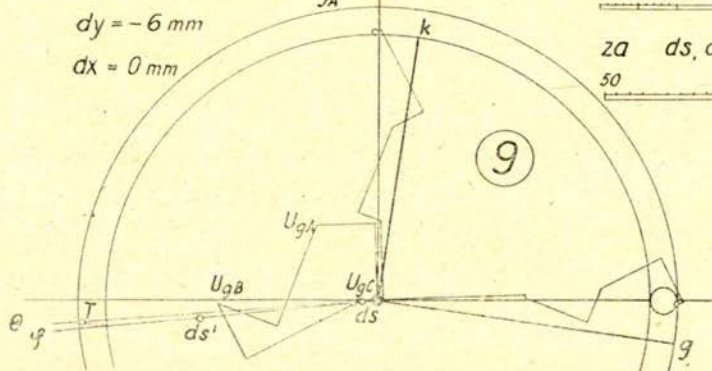
$m_v = 13''$
 $m_n = 2\sqrt{\frac{3n}{1000}}$
 $r' = 250$
 $\frac{r'}{p_v} = 42250$

C	(v)	(λ)	λ	v
13	36,7	-13,0	-13	8
14	4,4	-5,2	-5	1
15	-24,1	-23,1	-23	-5
16	-24,0	-40,0	-40	-5
17	-7,0	-34,6	-34	-1
18	9,7	-19,6	-19	2
\overline{OF}	127,0	$\lambda = 0,99(\lambda)$		
\overline{OT}	128,0	$v = 0,20(v)$		





Mjerilo
 koordinata i ρ 1:5000
 100 0 100 200 300 400 m
 za ds, ω , W, (λ), (ν) 10:15
 50 0 50 100 mm



Uvedemo još oznaku

$$z_s = \frac{N t_s^2}{ds'}$$

koju ćemo odrediti grafički a koja još pripada z-poligonu prema izrazu

$$\frac{[PAB][PAB]}{[PAA]} ds' = \frac{N t_s N t_s}{ds' N} \sin^2 \vartheta = \frac{N t_s^2}{ds'} \sin^2 \vartheta = z_s \sin^2 \vartheta \quad (14)$$

Prema tome je

$$[PBB \cdot 1] ds' = [z_k \sin^2 (90^\circ + \epsilon)] + [z_g \sin^2 \epsilon] - z_s \sin^2 \vartheta$$

Lijeva strana jednačaba (10) i (11) dobije sada oblik podesan za grafičko rješavanje:

$$\begin{aligned} & \{ [z_k \sin^2 (90^\circ + \epsilon)] + [z_g \sin^2 \epsilon] - z_s \sin^2 \vartheta \} \sin \varphi + \quad (10a) \\ & + \{ [z_k \sin (90^\circ + \epsilon) \cos (90^\circ + \epsilon)] + [z_g \sin \epsilon \cos \epsilon] - z_s \sin \vartheta \cos \vartheta \} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ [z_k \sin (90^\circ + \epsilon) \cos (90^\circ + \epsilon)] + [z_g \sin \epsilon \cos \epsilon] - z_s \sin \vartheta \cos \vartheta \} \sin \varphi + \\ & + \{ [z_k \cos^2 (90^\circ + \epsilon)] + [z_g \cos^2 \epsilon] - z_s \cos^2 \vartheta \} \cos \varphi \quad (11a) \end{aligned}$$

Još nam je potreban izraz $U_s = \frac{t_s}{ds'} [u]$ koji ćemo odrediti grafički

Prema izrazu

$$- \frac{[PAB][PA\omega]}{[PAA]} = - \frac{N t_s [u]}{N ds'} \sin \vartheta = - U_s \sin \vartheta$$

U_s je pozitivan kada je i $[u]$ pozitivan.

Kod određenja $[u]$ uzimamo samo veličine u_k i u_g jer je suma

$$[u_\beta] = \frac{e}{r' m_\beta^2} \left(\frac{\omega_\beta A}{n_A} + \frac{\omega_\beta B}{n_B} + \frac{\omega_\beta C}{n_C} \right) = 0,$$

što proizlazi iz izbora smjernika o' kao opće aritmetičke sredine rezultata pojedinih poligona.

Desna strana jednačaba (10) i (11) imati će sada oblik

$$- [U_k \sin (90^\circ + \epsilon)] - [U_g \sin \epsilon] - U_s \sin \vartheta \quad (10b)$$

$$- [U_k \cos (90^\circ + \epsilon)] - [U_g \cos \epsilon] - U_s \cos \vartheta \quad (11b)$$

Za popravak **do** približnog orijentacijskog smjernika o' dobijemo iz jednadžbe (9)

$$do = - \frac{[PAB]}{[PAA]} ds \sin \varphi - \frac{[PAC]}{[PAA]} ds \cos \varphi + \frac{[PA\omega]}{[PAA]}$$

a to daje

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\frac{ds}{ds'} t_s \sin \vartheta \sin \varphi - \frac{ds}{ds'} t_s \cos \vartheta \cos \varphi + \frac{[u]}{N} \\ &= -\frac{ds}{ds'} t_s \cos (\vartheta - \varphi) + \frac{[u]}{N} \end{aligned}$$

Uputa i primjer

Određenje približnog smjernika i približnih koordinata.

Mjerena su tri poligona **A, B, C**, koja se sastaju u čvorištu **D**, u kojemu nije provedena orijentacija.

Kao privremeni orijentacijski smjernik uzeti ćemo stranicu 18 D. Računajući njezin smjernik iz poligona **A, B, C** dobili smo vrijednosti (Početni smjernici i koordinate polaznih točaka, te mjereni kutovi i stranice su iste kao i kod primjera za čvorište sa orijentacijom)

$$\alpha_A = 276^0 52' 54''$$

$$\alpha_B = 276 \ 52 \ 11$$

$$\alpha_C = 276 \ 51 \ 32$$

Za približni smjernik α' uzeti ćemo opću aritmetičku sredinu dajući svakoj vrijednosti kvalitetu $\frac{1}{n}$, gdje je n broj lomnih kutova, dakle $n_A = 7$, $n_B = 7$ i $n_C = 6$. U poligonu **A** i **B** uzeli smo u zbroj i poligonski kut u točki **D**, dok je u poligonu **C** završni kut mjeran u točki 18.

$$\alpha' = 276 \ 52 \ 00 + \frac{54}{7} + \frac{11}{7} - \frac{28}{6} = 276 \ 52 \ 10$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6}$$

Privremeni popravci f_{β} smjernika 18 D u pojedinim poligonima biti će (f = predpostavljeno — mjereno)

$$f_{\beta A} = 276 \ 52 \ 10 - 276 \ 52 \ 54 = -44$$

$$f_{\beta B} = 276 \ 52 \ 10 - 276 \ 52 \ 11 = -1$$

$$f_{\beta C} = 276 \ 52 \ 10 - 276 \ 51 \ 32 = +38$$

Ove popravke razdijelimo podjednako na sve poligonske kutove u dotičnom poligonu i izračunamo poligone

Popravci $\frac{f_B}{n}$ su slijedeći

<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">A</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">- 6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">- 6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">- 6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">- 7</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;">- 6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">6</td><td style="padding: 2px 10px;">- 6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">D</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;">- 7</td></tr> </table>	A	1	- 6		2	- 6		3	- 6		4	- 7		5	- 6		6	- 6	D		- 7	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">B</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">7</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">8</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">9</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">10</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">11</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">12</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">D</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;">- 1</td></tr> </table>	B	7	0		8	0		9	0		10	0		11	0		12	0	D		- 1	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">C</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">13</td><td style="padding: 2px 10px;">- 6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">14</td><td style="padding: 2px 10px;">- 6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">15</td><td style="padding: 2px 10px;">- 7</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">16</td><td style="padding: 2px 10px;">- 6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">17</td><td style="padding: 2px 10px;">- 6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"></td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">18</td><td style="padding: 2px 10px;">- 7</td></tr> </table>	C	13	- 6		14	- 6		15	- 7		16	- 6		17	- 6		18	- 7
A	1	- 6																																																												
	2	- 6																																																												
	3	- 6																																																												
	4	- 7																																																												
	5	- 6																																																												
	6	- 6																																																												
D		- 7																																																												
B	7	0																																																												
	8	0																																																												
	9	0																																																												
	10	0																																																												
	11	0																																																												
	12	0																																																												
D		- 1																																																												
C	13	- 6																																																												
	14	- 6																																																												
	15	- 7																																																												
	16	- 6																																																												
	17	- 6																																																												
	18	- 7																																																												

Računanjem poligona dobijemo koordinate točke **D** i to iz poligona **A**
 $y = 2499,581 + 35,140 = 2534,721$; $x = 4147,976 - 491,458 = 3656,518$
 iz poligona **B**

$$y = 2997,368 - 462,705 = 2534,663; x = 3370,082 + 286,319 = 3656,401$$

iz poligona **C**

$$y = 2090,879 + 443,994 = 2534,873; x = 3800,360 - 143,890 = 3656,470$$

Dobili smo dakle tri vrijednosti za koordinate točke **D**, te sada odredimo približnu vrijednost y' i x' kao približnu sredinu

$$y' = 2534,750 \qquad x' = 3656,450$$

Koordinatna odstupanja jesu:

$$\omega_{yA} = + 29 \text{ mm} \qquad \omega_{xA} = - 68; \qquad \omega_{yB} = + 87 \qquad \omega_{xB} = + 49$$

$$\qquad \qquad \qquad \omega_{yC} = - 123 \qquad \omega_{xC} = - 20 \text{ mm.}$$

Grafičko izjednačenje čvorišta.

1) Ucertamo poligone u podesnom mjerilu (ovdje 1:5000).

2, 3, 4) Konstruiramo izravnavajuće elipse svakog pojedinog poligona. Predpostavljena srednja pogreška za kutove je $m_n = 13''$, a stranična je

$$m_n = 2 \sqrt{\frac{s_n}{1000}} \text{ mm}$$

5) Iz posebnog ishodišta nacrtamo pomoćne koordinatne osi X_A i Y_A za poligon **A**, tako da se poklapaju sa velikom i malom osi izravnavajuće elipse poligona g_A i k_A , te da pada spojnica od težišta do čvorišta u prvi kvadrant. Os elipse koja se poklapa sa osi X_A nazovemo g_A a os elipse koja se poklapa sa osi Y_A nazovemo k_A bez obzira na njihovu veličinu.

Pored njih nacrtamo udaljenost od težišta do čvorišta **D** te odredimo njezine projekcije η_A i ξ_A na pomoćne koordinatne osi. Također nacrtamo u povoljnom mjerilu (ovdje 10 : 15) koordinatna odstupanja ω_{yA} i ω_{xA} , te odredimo projekcije ω_A i $\omega_{\eta A}$ na pomoćne koordinatne osi. Sve ovo učinimo i za poligone **B** i **C**.

6) U posebnom diagramu odredimo

$$t_k = \frac{\xi}{k} ds' \qquad \text{i} \qquad t_g = \frac{\eta}{g} ds'$$

Kod toga nanosimo od početka **O** na lijevo projekcije udaljenosti težišta. Iz tih projekcija prema dolje nanosimo velike i male osi izravnavajućih elipsa s time da projekcijama ξ pripadaju osi nazvane **k** a projekcijama η osi nazvane **g**. Od početka **O** prema dolje nanesimo proizvoljnu vrijednost $\overline{ds'}$. Okomica postavljena na $\overline{O ds'}$ pre sječena je spojnica **Og** i **Ok** u udaljenostima t_g i t_k , a to su tražene vrijednosti.

7) Veličine t_g nanosimo u smjeru pripadajuće pomoćne osi **X** (osi **g**) a veličinu t_k u smjeru pripadajuće pomoćne osi — **Y** (osi **k**) nadodavajući jednu na drugu, da dobijemo **t**-poligon. Spojnica od početka do kraja **t**-poligona je vrijednost $N t_s$. Da dobijemo t_s podijelit ćemo $N t_s$ sa brojem **N** kojega računski odredimo po jednadžbi

$$N = \frac{\rho}{r' m_v^2} \left[\frac{1}{n} \right] + \left[\frac{\xi^2}{k} \right] \frac{1}{\rho} + \left[\frac{\eta^2}{g} \right] \frac{1}{\rho}$$

$$N = \frac{206 \cdot 265}{250 \cdot 169} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{30^2}{465} + \frac{315^2}{370} + \frac{270^2}{335} \right) \cdot \frac{1}{206} +$$

$$+ \left(\frac{232^2}{245} + \frac{17^2}{525} + \frac{135^2}{455} \right) \cdot \frac{1}{206} = 5,94.$$

Veličine η , ξ i **k**, **g** uzimaju se u mjerilu koordinata (1:5000)

Iz toga dobijemo

$$t_s = \frac{N t_s}{N} = \frac{37}{5,94} = 6,2 \text{ u mjerilu za } ds' \text{ (mm).}$$

U nastavku diagrama za vrijednost **t** nacrtamo diagram za određenje vrijednosti $z_k = \frac{\rho}{k} ds'$ i $z_g = \frac{\rho}{g} ds'$

Od najveće projekcije udaljenosti težišta od čvorišta nanesene u diagramu, nanesimo prema dolje veličinu velikih i malih osi, a na lijevo ρ . Okomica postavljena na $\overline{\rho ds'}$ presječena je spojnica $\overline{\rho g}$ i $\overline{\rho k}$ u udaljenostima z_k i z_g . a to su tražene vrijednosti.

8) Dobivene vrijednosti z_g nanosimo nadodavajući jednu na drugu tako, da su usporedne sa smjerom odnosne pomoćne osi **X** (osi **g**), a z_k sa smjerom odnosne pomoćne osi **Y** (osi **k**) i tako dobijemo **z**-poligon.

$$U \text{ diagramu odredimo vrijednost za } z = \frac{t_s N t_s}{ds'}$$

Veličinu $N t_s$ nanesimo u diagramu od $\overline{ds'}$ na desno, isto tako i t_s . Okomica na spojnica $N t_s$ provedena kroz t_s siječe u produženju spojnica $\overline{ds'}$ na kojoj dobijemo dužinu z_s , koju također nanesimo na **z**-poligon u smjeru ϑ .

9) Za konstrukciju konjugiranih polumjera izravnavajuće elipse čvorišta upotrebimo **z**-poligon tako, da projekcije njihovih stranica na os **Y** odno-

sno X nanosimo paralelno sa dotičnim stranicama nadodavajući jednu na drugu tako da uvijek rastu u smjeru osi Y odnosno X. Projekcije z_s nadodamo protivnim smjerom, uslijed čega se projekcije konjugiranih polumjera smanjuju. Iz konjugiranih polumjera konstruiramo elipsu.

U diagramu na desno konstruiramo nomografički vrijednost

$$u_k = \frac{\xi}{k} \omega_k \quad \text{i} \quad u_g = -\frac{\eta}{g} \omega_g$$

Zatim grafički zbrojimo $[u]$ pri čemu pazimo na predznake.

U diagramu na lijevo konstruiramo nomografički

$$U_k = \frac{\rho}{k} \omega_k \quad U_g = \frac{\rho}{g} \omega_g \quad \text{i} \quad U_s = \frac{t_s}{ds'} [u]$$

Vrijednosti U_k i U_g nanosimo iz ishodišta izravnavajuće elipse čvorišta, nadodavajući jednu na drugu, paralelno sa odgovarajućim glavnim osima izravnavajuće elipse poligona, a uvijek suprotno smjeru u kojem se nalazi ω_k i ω_g .

Smjer nanašanja za U_s je suprotan od smjera t_s , ako je $[u]$ pozitivan, inače je smjer isti sa smjerom t_s , ako je $[u]$ negativan. Krajnja točka U_s spojena sa početkom daje rezultantu sa smjernim kutom θ . Presjecište elipse sa rezultantom pada u točku **T**. Spojnica **OT** je radius vektor elipse kojemu odgovara radius kruga pod smjernim kutom φ , koji je izravnavajući pravac.

Iz razmjera

$$\overline{OT} : \overline{OU} = ds' : ds$$

dobijemo ds u mjerilu ω . Projekcije ds na koordinatne osi su popravci približnih koordinata dy i dx . Dobili smo $dy = -4 \text{ mm}$ i $dx = 0$.

Sada još izračunamo popravak približnog smjernika do

$$do = -\frac{ds}{ds'} t_s \cos(\vartheta - \varphi) + \frac{[u]}{N} = -\frac{6}{68} \left(-6 + \frac{50}{5,94}\right) = 9''$$

kod toga smo $t_s \cos(\vartheta - \varphi)$ odredili kao projekciju t_s na pravac φ .

Analogno jednadžbama (7) odgovarale bi jednadžbe pogrešaka za temeljni koordinatni sistem.

$$[\lambda \sin \alpha] - \left[\frac{v}{\rho} S \cos \gamma \right] = \omega_y + dy - do \frac{\xi_0}{\rho} = W_y$$

$$[\lambda \cos \alpha] + \left[\frac{v}{\rho} S \sin \gamma \right] = \omega_x + dx + do \frac{\eta_0}{\rho} = W_x$$

pri čemu su ξ_0 i η_0 projekcije na temeljne koordinatne osi udaljenosti od težišta do čvorišta.

Odstupanja W_y i W_x upotrebimo za izjednačenje svakog poligona za sebe, kao da je uključen među dvije poznate točke sa zadanim početnim i završnim smjernikom.

U ovom primjeru dobit ćemo odstupanja:

za poligon A

$$W_y = \omega_y + dy - \frac{\xi_0}{\rho} do = + 29 - 4 + \frac{227}{206} 9 = + 35 \text{ mm}$$

$$W_x = \omega_x + dx + \frac{\eta_0}{\rho} do = - 68 + 0 + \frac{39}{206} 9 = - 66 \text{ mm}$$

za poligon B

$$W_y = \omega_y + dy - \frac{\xi_0}{\rho} do = + 87 - 4 - \frac{125}{206} 9 = + 78 \text{ mm}$$

$$W_x = \omega_x + dx + \frac{\eta_0}{\rho} do = + 49 + 0 - \frac{294}{206} 9 = + 36 \text{ mm}$$

za poligon C

$$W_y = \omega_y + dy - \frac{\xi_0}{\rho} do = - 123 - 4 - \frac{5}{206} 9 = - 127 \text{ mm}$$

$$W_x = \omega_x + dx + \frac{\eta_0}{\rho} do = - 20 + 0 + \frac{298}{206} 9 = - 7 \text{ mm}$$

Sa izravnavajućim elipsama odredimo za svaki poligon popravke stranica λ i kutova V . Stranice s kojima smo računali poligone pred izjednačenjem popravimo za λ , a kutove za $v + \frac{do}{n}$, te ponovno preračunamo poligon.

Koordinate čvorišta moraju za svaki poligon imati iste vrijednosti i to:

približna sredina	$y_D = 2534,750$	$x_D = 3656,450$
	$dy = - 4$	$dx = 0$
	$y_D = 2534,746 \text{ m}$	$x_D = 3656,450 \text{ m}$

Smjernik stranice $\overline{18 D}$ biti će:

približni smjernik	$o' = 276^\circ 52' 10''$	
	$do 9$	
	$o = 276^\circ 52' 19''$	

Mjerene vrijednosti po izjednačenju

Poligon A				Poligon B				Poligon C			
o	'	"	m	o	'	"	m	o	'	"	m
$\alpha_p =$	252	19	11	$\alpha_p =$	26	56	42	$\alpha_p =$	271	47	07
	109	14	36		174	15	00		72	51	47
	196	05	40		127	28	56		189	43	51
	170	06	03		144	50	39		99	10	20
	155	14	16		172	34	39		158	01	15
	159	10	48		177	05	03		176	21	26
	218	00	05		190	46	53		208	56	33
	276	41	40		162	54	27		98	23	7
	<u>276</u>	<u>41</u>	<u>40</u>		<u>162</u>	<u>54</u>	<u>27</u>		<u>98</u>	<u>23</u>	<u>7</u>
o =	276	52	19	o =	276	52	19	o =	96	52	19

Određenje srednjih pogrešaka.

Analognim načinom kao kod čvorišta sa orijentacijom dobijemo da je kvadrat srednje pogreške fingiranih opažanja za kvalitetu jednaku jedinici a priori:

$$M_{pr}^2 = \frac{\rho}{r'} = 825$$

Srednju pogrešku faktičnih opažanja za kvalitetu jednaku jedinici a posteriori računamo iz pogrešaka v i λ prema ovoj tablici:

Tablica 3.

	$\frac{d\alpha}{n}$		v	pvv	λ	$p\lambda\lambda$		$\frac{d\alpha}{n}$		v	pvv	λ	$p\lambda\lambda$		
A	- 8	+ 1	- 6	-13	1,00	+ 11	0,36	B	+ 9	+ 1	0	+10	0,59	+ 10	0,40
	- 5	+ 1	- 6	-10	0,59	+ 10	0,22		+ 8	+ 1	0	+ 9	0,48	+ 1	0,00
	- 1	+ 2	- 6	- 5	0,15	+ 10	0,31		+ 4	+ 2	0	+ 6	0,21	- 10	0,27
	+ 2	+ 1	- 7	- 4	0,09	+ 15	0,66		+ 1	+ 1	0	+ 2	0,02	- 17	0,54
	+ 3	+ 2	- 6	- 1	0,01	+ 18	0,85		- 3	+ 2	0	- 1	0,01	- 18	0,61
	+ 4	+ 1	- 6	- 1	0,01	+ 9	0,32		- 8	+ 1	0	- 7	0,29	- 11	0,31
	+ 5	+ 1	- 7	- 1	0,01				-11	+ 1	- 1	-11	0,72		
	0	+ 9	-44	-35					0	+ 9	- 1	+ 8			

	$\frac{d\sigma}{n}$	$\frac{f\beta}{v}$	v	pvv	λ	$p\lambda\lambda$	
C	+ 8	+ 1	+ 6	+15	1,33	- 13	0,32
	+ 1	+ 2	+ 6	+ 9	0,48	- 5	0,06
	- 5	+ 1	+ 7	+ 3	0,05	- 23	1,66
	- 5	+ 2	+ 6	+ 3	0,05	- 40	2,79
	- 1	+ 1	+ 6	+ 6	0,21	- 34	2,24
	+ 2	+ 2	+ 7	+11	0,72	- 19	1,38
	0	+ 9	+38	+47			

$$[pvv] = 7,02$$

$$[p\lambda\lambda] = \frac{13,30}{20,32}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv] + [p\lambda\lambda]}{r}} = \sqrt{\frac{20,32}{6}} = 1,84$$

pri čemu je $r = 6 =$ broj suvišnih opažanja.

Prema ovome je srednja pogreška a posteriori mjerenja kutova

$$m_v = 13 \cdot 1,84 = 23,9''$$

o pogreška mjerenja stranica

$$m_n = 3,68 \sqrt{\frac{s_n}{1000}} \text{ mm}$$

Za određenje elipse pogrešaka a priori i elipse pogrešaka a posteriori postupimo istim načinom kao i kod čvorišta sa orijentacijom (Sl. 4).

Po određenju orijentacionog smjernika σ' iz opće aritmetičke sredine mjerenih kutova, biti će srednja pogreška

$$m_o^2 = \frac{m^2}{[paa]} = \frac{m^2}{[p]} = \frac{m^2}{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} + \frac{1}{n_C}}$$

$$m_o^2 = \frac{169}{\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6}} = \frac{169 \cdot 42}{6 + 7 + 7} = 354$$

$$m_o = 18,8''$$

Srednja pogreška smjernika stranice kod čvorišta nakon izjednačenja za popravak do.

Orijentiramo koordinatne osi tako, da nam bude $[PBC] = 0$, a to je kad osi prolaze kroz veliku i malu os izravnavajuće elipse, za čiju konstrukciju nismo upotrebili z_s .

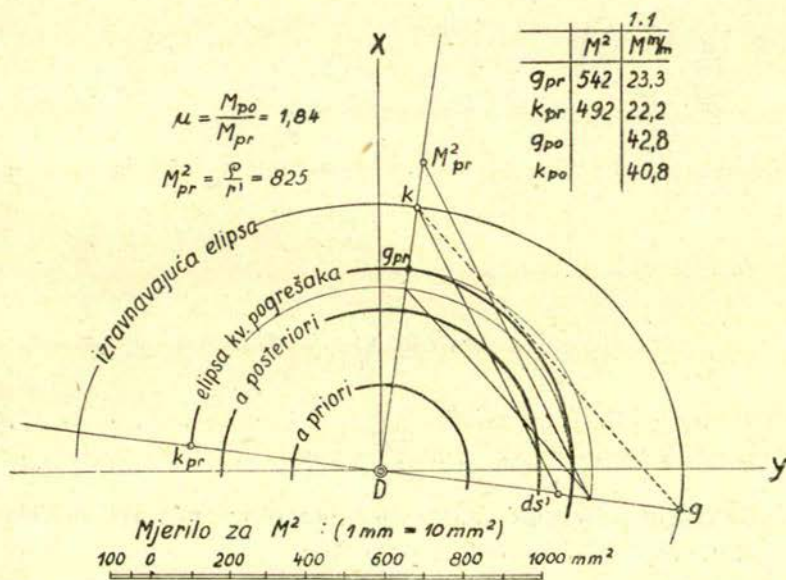
Normalne jednadžbe glase

$$[PBB] dy + [PAB] do = [PB \omega]$$

$$[PCC] dx + [PAC] do = [PC \omega]$$

$$[PAB] dy + [PAC] dx + [PAA] do = [PA \omega]$$

iz toga $do = \frac{[PA \omega \cdot 2]}{[PAA \cdot 2]}$



Slika 4.

Kod jednačaba za posredna opažanja vrijedi

$$M_o^2 = \frac{M^2}{[PAA \cdot 2]} = \frac{M^2}{[PAA] - \frac{[PAB][PAB]}{[PBB]} - \frac{[PAC][PAC]}{[PCC]}}$$

$$M_o^2 = \frac{M^2}{N \left(1 - \frac{z_s \sin^2 \vartheta}{k} - \frac{z_s \cos^2 \vartheta}{g} \right)} = \frac{825}{5,94} = 139$$

$$M_0 = 11,8''$$

Dr Ing. Josip Baturić — Zagreb

COMPENSATION GRAPHIQUE DU POINT NODAL SANS ORIENTATION

Dans cet article il est question de compensation graphique du point nodal ou sur un certain point trigonométrique l'orientation n'a pas pu être obtenue. La compensation est fondée sur un procédé graphique à l'aide de la soi — disante »Ellipse compensatrice«. Sur cette procédé de compensation, l'auteur nous a donné un éclaircissement théorique dans son oeuvre intitulé »Topometrie minier«. A la fin, un exemple numérique est donné ou le procédé est expliqué en détail.

**Drugovi pišite nam sa terena
o Vašim stručnim zapažanjima
i radu.**
