Ing. Mato Janković — Zagreb

Prilog pravilnoj primjeni poligonometrije

Povodom određivanja indirektnih pravaca u triangulaciji metodom poligonometrije (izlomljene zrake)

I.

Primjenu metode precizne poligonometrije u poslijeratnim radovima na postavljanju mreže osnovnih točaka nižih redova zahtijevali su uglavnom ovi razlozi:

a) brzina postavljanja i određivanja osnovnih točaka u specijalnim uslovima,

b) ekonomičnost rješenja,

c) terenske prilike (zaraštenost, ravnica, vodotoci i t. d.).

Sjeverni dio N. R. Hrvatske, koji je bio pokriven starom austrijskom trig. mrežom, od koje se sačuvao veoma mali broj točaka i to većnom viših redova, je ravničast s velikim šumskim kompleksima, ispresjecanih vodotocima. Na tim kompleksima uglavnom nije ni ranije postavljena nikakova trigonometrijska mreža.

Prema našim dosadanjim instrukcijama o triangulaciji, trigonometričke točke počam od II. reda na niže određuju se metodom umetanja od viših redova prema nižim. Kod toga se za pravilno određivanje ovih točaka zahtijeva da bude zadovoljen »statički princip«, t.j., da točka bude određena pod najpovoljnijim presjekom pravaca. To će biti onda ako se nova točka nalazi od prilike u težištu obzirom na date točke.

Na terenima ravnim, obraslim šumom s malim visinskim razlikama, to je praktički nemoguće u potpunosti postići. Prema tome je potrebno da dođe do stanovitog kompromisnog rješenja između ekonomičnosti i točnosti. U nekim slučajevima bi uz dosadanju metodu rada bilo teško doći i do ovakovog kompromisnog rješenja, jer bi se na pr. na račun ekonomičnosti morali zadovoljiti s manjom točnosti određivanja trigonometričkih točaka. Ta bi manja točnost rezultirala ili iz nedovoljnog broja pravaca potrebnih za presjek, ili nepovoljnog presjeka, ili jedno i drugo. Zadovoljenje točnosti na račun ekonomičnosti zahtijevalo bi ili sječu šume radi ostvarenja dogledanja, ili gradnju visokih signala. Sve to naravno izaziva veoma komplicirana tehnička rješenja, izaziva povećanje troškova na rekognosciranju, gubitak vremena, a da ne govorimo o šteti nastaloj uslijed prosjekâ kroz šumu. Taj problem iskače još jače u ovoj situaciji nedostatka pomoćne radne snage odgovarajućih radnih sposobnosti.

Da se ovi nedostaci uklone počelo se na našem području primjenjivati određivanje položaja stalnih točaka metodom poligonometrije sa Zeissovim poligonalnim priborom uz paralaktičko mjerenje dužina na konstantnu invar letvu 3 m dužine. Ta je metoda teoretski razrađena i primijenjena na terenu u nizu slučaja, pa je dala sasvim zadovoljavajuće rezultate za popunjavanje točaka u mreži nižih redova.

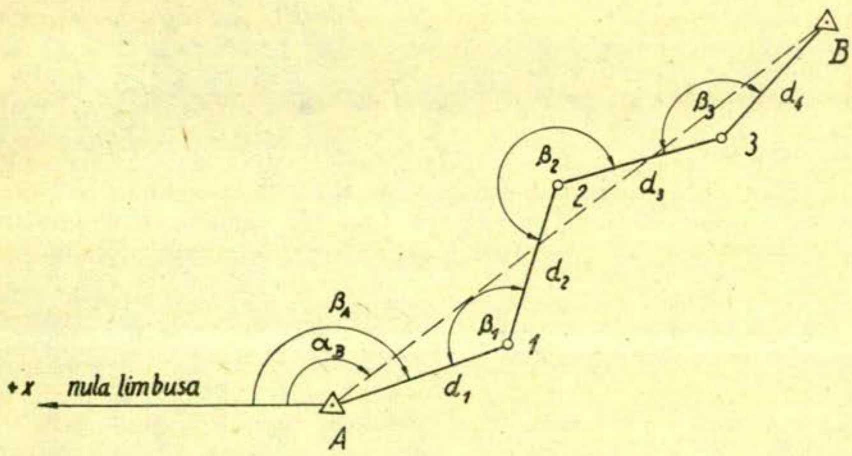
Iz studija tih rezultata mjerenja i konkretnih slučaja, koji su se na terenu u vezi s ovim radovima trebali riješiti, došlo se na mogućnost primjene pomoćnih poligonskih vlakova za indirektno određivanje dužina a i pravaca. Ova je okolnost ponukala na ispitivanje mogućnosti primjene poligonometrije kod indirektnog određivanja pravca u triangulaciji, odnosno na kombiniranim određivanjima stalnih točaka metodom triangulacije i poligonometrije. Praktički radovi i ispitivanja na terenu dala su zadovoljavajuće rezultate.

U ovom članku ćemo nastojati dati teoretsku osnovu ovih načina indirektnog određivanja pravca. Time bi željeli doprinijeti boljem upoznavanju ove metode u cilju njene pravilnije primjene, a također da ona bude razrađena i obuhvaćena našim novim instrukcijama za triangulaciju uz naravno sve one potrebne propise i praktičke zahtjeve, koje teoretski i praktički razlozi zahtijevaju, da se ova metoda najracionalnije primjeni.

II.

Najprirodniji oblik izlomljene zrake je pomoćni poligonski vlak, pa ćemo se na njegovoj teoretskoj razradi najviše zadržati.

Između trigonometrijskih točaka A i B (sl. 1) treba postaviti i izmjeriti poligonski vlak i sračunati pravac AB $= \alpha_B$.



Slika 1.

Rješenje je jednostavno i ono se vidi iz slike 1. Upotrebit ćemo pomoćni koordinatni sistem, čija se os+X poklapa s nulom limbusa kod opažanja pravaca na točki A, odnosno B ako želimo odrediti pravac u točki B. U ovom koordinatnom sistemu sračunat ćemo koordinate točke B (y_B, x_B). Pravac AB će na taj način biti:

$$\alpha_B = \text{arc tg} \frac{y_B}{x_B} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Postavlja se sada pitanje s kojom točnošću je određen pravac α_B, i što je potrebno učiniti, pa da se ovaj pravac postigne s potrebnom točnošću.

Da odgovorimo na to pitanje razmotrit ćemo srednje pogreške položaja zadnje točke u slobodnom vlaku, u našem slučaju točke B t. j. m_{yB} i m_{xB}. Koordinate te točke će biti općenito:

$$\left.\begin{aligned} y_B &= y_A + [\Delta y] = y_A + [d \sin \nu] \\ x_B &= x_A + [\Delta x] = x_A + [d \cos \nu] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (2)$$

Srednje pogreške ovih veličina bit će:

$$\left.\begin{aligned} m_y^2 &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial d}\right)^2 m_d^2 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \nu}\right)^2 (d\nu)^2 \\ m_y^2 &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial d}\right)^2 m_d^2 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \nu}\right)^2 (d\nu)^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (3)$$

Odnosno u konačnom izvodu:

$$\left.\begin{aligned} m_y^2 &= [\Delta y^2]\frac{m_d^2}{d^2} + \frac{m_\beta^2}{\varrho^2}\left\{\Delta x_1^2 + 2^2 \Delta x_2^2 + 3^2 \Delta x_3^2 \ldots + (n+1)^2 \Delta x^2 n{+}1\right\} \\ m_x^2 &= [\Delta x^2]\frac{m_d^2}{d^2} + \frac{m_\beta^2}{\varrho^2}\left\{\Delta y_1^2 + 2^2 \Delta y_2^2 + 3_2 \Delta y_3^2 + \ldots + (n+1)^2 \Delta y^2 n{+}1\right\} \end{aligned}\right\} \; \ldots (4)$$

gdje je n broj strana u vlaku.

Ako pretpostavimo da nam je pravac AB apscisna os l, a okomica na nju u točki A ordinatna os q, mogli bi postaviti da je $y \equiv q$, a $x \equiv l$, dok bi srednje pogreške m_x i m_y bile poprečna odnosno uzdužna pogreška u vlaku M_q i M . Za naše razmatranje o točnosti određivanja indirektnog pravca važna je poprečna pogreška M_q, pa će zamjenom navedenih identiteta biti:

$$M_q^2 = [\Delta q^2]\frac{m_d^2}{d^2} + \frac{m_\beta^2}{\varrho^2}\left\{\Delta l_1^2 + 2^2 \Delta l_2^2 + \;.\;.\;.\;.\; + (n+1)^2 \Delta l^2_{n+1}\right\} \quad . \; . \; . \; (5)$$

Radi jednostavnosti daljih izvoda pretpostavit ćemo da je vlak ispružen i istostraničan t. j. $\Delta q \cong 0$, $\Delta l_1 \, \Delta l_2 = \;.\;.\;.\;.\; = d$. Formula (5) poprimit će oblik:

$$M_q^2 = d^2 \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots. + (n+1)^2\right] \frac{m_\beta^2}{\varrho^2}$$

Vrijednost u uglastim zagradama bit će prema teoriji aritmetičkog reda $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Prema tome je:

$$M_q = \pm \frac{m_\beta}{\varrho} d \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad . \; . \; . \; (6)$$

Ovo je linearna vrijednost srednje poprečne pogreške. Ova pogreška u kutnoj vrijednosti bit će srednja pogreška kuta α, prema tome:

$$m_\alpha = \frac{M_q}{L} \quad \ldots (7)$$

gdje je L dijagonala vlaka odnosno dužina AB.

Prema gornjim pretpostavkama o ispruženosti vlaka bit će $L = n \cdot d$, a srednja pogreška pravca m_α:

$$m_\alpha = \pm \frac{m_\beta}{\varrho} \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}} \quad \ldots (8)$$

Na temelju formule (8), a smatrajući da β_A nije kut nego pravac, koji u stajališnom izjednačenju na točki A dolazi kao neposredno mjereni pravac sa srednjom pogreškom μ, a težinom $p = 1$, izveo je Dr Kerl težinu indirektnog pravca:

$$p_\alpha = \frac{1}{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{\mu^2}{m_\beta^2}$$

odnosno:

$$p_\alpha = \frac{6n}{2n^2+1} \cdot \frac{\mu^2}{m_\beta^2} \quad \ldots (9)$$

U formuli (9) je μ srednja pogreška mjerenog pravca, a m_β srednja pogreška prelomnog kuta. Dr Kerl je postavio da je $m_\beta^2 = 2\mu^2$ i na temelju toga izveo formulu za težinu izlomljenog pravca:

$$p_\alpha = \frac{2n^2+1}{3n} \quad \ldots (10)$$ [1]

Dr Pinkwart prigovara ovoj formuli jer da je izvedena na osnovu nepravilne predpostavke za $m'^2_\beta = 2\mu^2$. [2]

Srednja pogreška pravca u trigonom. mreži nije ovisna samo o točnosti mjerenja, nego i o točnosti centriranja instrumenta i signala, te o točnosti viziranja, a na koncu i o položajnim pogreškama trigonometrijskih točaka. Ako prema Pinkwartu označimo sa m_r srednju pogrešku pravca (r = richtung) u ovisnosti od točnosti mjerenja, sa m_c srednju pogrešku centriranja i viziranja, a sa m_o srednju položajnu pogrešku trig. točke, to će srednja pogreška pravca u trigonometrijskoj mreži biti:

$$m_n^2 = m_r^2 + m_c^2 + m_o^2$$

Kod određivanja indirektnih pravaca ne dolazi u obzir točnost položaja trigonometrijske točke, tako da treći član u gornjoj formuli otpada.

[1] Dr Kerl: Fehlergleichungen für gebrochene Strahlen. A. V. N. 1934. str. 472.

[2] Dr Pinkwart: Ueber die Netzfebler und Richtunsgewichte bei Kleintriangulierungen Z. f. V. 1938. str. 294.

U našem slučaju će prema Pinkwartu biti $\mu^2 = m_n^2$, a $m_\beta^2 = 2(m_r^2 + m_c^2)$. Uvrstivši ove veličine u formulu (9) imamo:

$$p_\alpha = \frac{3n}{2n^2 + 1} \cdot \frac{m_n^2}{m_r^2 + m_c^2} \quad . \; . \; . \; (11)$$

U poligonometriji primjenjuje se redovito poligonalni pribor s prisilnim centriranjem instrumenta i signala (značke), koji osim toga omogućava precizno viziranje. Time je skoro potpuno eliminirana pogreška centriranja i viziranja t. j. $m_c = 0$, pa će formula za težinu glasiti:

$$p_\alpha = \frac{3n}{2n^2 + 1} \cdot \frac{m_n^2}{m_r^2} \quad . \; . \; . \; (12)$$

Na temelju ove formule daje Dr Pinkwart u citiranoj raspravi slijedeću tabelu težina izlomljenih pravaca u raznim triangulacijama:

Broj strana n	1	2	3	4	5	10
Breme n III. red	1	0,85	0,72	0,62	0,54	0,34
„ IV. red	1	0,86	0,73	0,63	0,55	0,55
Rheintal	1	0,97	0,93	0,89	0,86	0,72
Vorgebirge	1	0,92	0,85	0,78	0,71	0,52

Dr Pinkwart napominje da je kod toga potrebno pojedinačne srednje pogreške u mreži m_r, m_c, i m_o procijeniti i međusobno pravilno odvagnuti.

Bez obzira na navedene pretpostavke jasno je da će srednja pogreška indirektnog pravca biti veća od neposredno mjerenog. Ako srednju pogrešku neposredno mjerenog pravca označimo sa μ, to će srednja pogreška indirektnog pravca u slučaju ispruženog vlaka biti:

$$m_\alpha = \mu \sqrt{\frac{2n^2 + 1}{3n}}$$

Težina indirektnog pravca prema formuli (12) izvedena je na osnovu predpostavke da je vlak ispružen i da su sve poligonske strane jednake. Na taj način se prvi član u formuli (5) mogao zanemariti. Međutim ako to nije slučaj onda naravno dolazi do izražaja i točnost mjerenja dužina u poligonskom vlaku. Općenito bi se mogla srednja pogreška izlomljene zrake izraziti ovakovom formulom:

$$m_\alpha^2 = m_{\alpha(\beta)}^2 + m_{\alpha(d)}^2$$

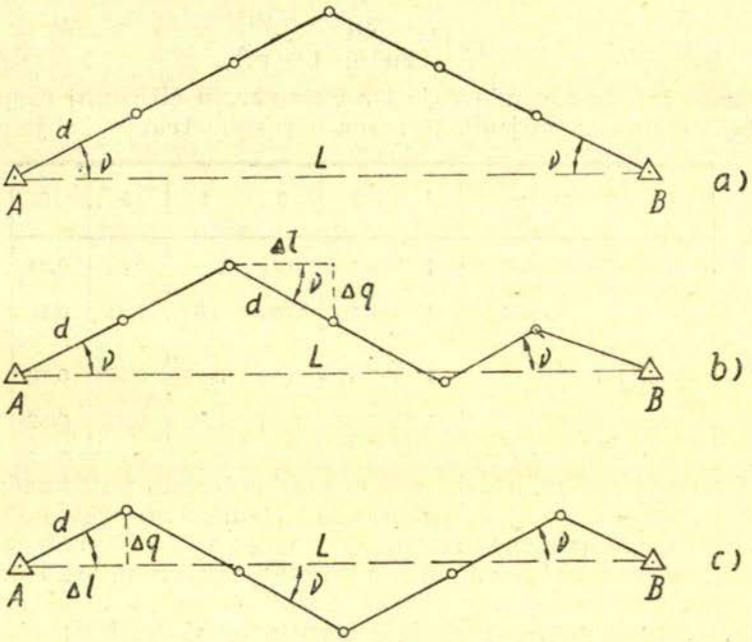
gdje je $m_{\alpha(\beta)}^2$ kvadrat srednje pogreške pravca u ovisnosti od točnosti mjerenja kutova, a $m_{\alpha(\beta)}^2$ kvadrat srednje pogreške pravca u ovisnosti o točnosti mjerenja dužina. Vidjeli smo da je za potpuno ispruženi vlak:

$$m_{\alpha(\beta)}^2 = \frac{2n^2 + 1}{3n} \cdot \frac{m_r^2}{m_n^2}$$

Prema formuli (5) i (7) bit će:

$$m^2_{\alpha(d)} = \left[\frac{\Delta q^2}{d^2}\right]\frac{m_d^2}{L^2} \quad . \; . \; . \quad (13)$$

Postavlja se sada pitanje, koju točnost mjerenja dužina za stanovitu iskrivljenost vlaka treba primijeniti, pa da se veličina predstavljena formulom (13) može zanemariti.



Slika 2.

Radi jednostavnosti daljih izvoda predpostavit ćemo iskrivljeni istostranični vlak s konstantnim kutom smjera prema dijagonali $+\nu$ ili $-\nu$.

U tom će slučaju biti:

$$\left[\frac{\Delta q^2}{d^2}\right] = n\frac{\Delta q^2}{d^2}$$

Veličinu $m^2_{\alpha d)}$ ćemo moći zanemariti, ako postoji odnos:

$$n\frac{\Delta q^2}{d^2}\frac{m_d^2}{L^2} = \frac{2n^2+1}{k.\,3n}\mu \quad . \; . \; . \quad (15)$$

gdje je k faktor tolike veličine, da njegovim uvođenjem postaje srednja pogreška $m_{\alpha(d)}$ praktički beznačajna.

Iz formule (15) imamo:

$$m_d^2 = \frac{2n^2+1}{k.\,3n} \cdot \frac{L^2 d^2}{n.\,\Delta q^2} \mu^2$$

Prema slici 2 bit će $\Delta q = d \sin \nu$, $L = n \, . \, \Delta l$ i $\Delta l = d \cos \nu$.
Na taj način imamo:

$$\frac{m_d^2}{d} = \frac{2n^2+1}{k.\,3n} \mu^2 \frac{L \cos \nu}{\sin^2 \nu}$$

Ako u ovoj formuli postavimo da je $m_d^2 / d = c^2$, to će relativna linearna pogreška biti predstavljena formulom:

$$c = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{\frac{(2n^2+1) \cdot L \cos \nu}{k.\,3n}}$$

Uzmimo na pr. da je faktor $k = 9$. a $L = 1000$ m, možemo gornju formulu napisati ovako:

$$c = \frac{\mu}{\varrho} \frac{10}{\sin \nu} \sqrt{\frac{(2n^2+1) \cos \nu}{0{,}9 \cdot 3n} L_{u\ km}}$$

Za malo ν postaje $\sin \nu = \nu^{gr} \sin 1^{gr}$, $\cos \nu = 1$ i prema tome:

$$c = \frac{\mu^{cc}}{\varrho^{cc}} \frac{10\, \varrho^{gr}}{\nu^{gr}} K \sqrt{L_{u\ km}}$$

gdje je

$$K = \sqrt{\frac{2n^2+1}{0{,}9 \cdot 3n}}$$

Za $n =$	2	3	4	5	6
$K =$	1,29	1,53	1,74	1,94	2,22

Konačno će c u cm biti predstavljeno formulom:

$$c = K \cdot \frac{\mu^{cc}}{\varrho^{cc}} \sqrt{L_{u\ km}}$$

Ovdje je c granična pogreška pa u koliko je stvarna pogreška manja može se ona zanemariti. Svakako da je uzeta velika sigurnost da je kvadrat srednje pogreške $m^2 \alpha$ (d) devet puta manji od $m\alpha$ (β).

U stvari je c koeficient uz onaj član srednje pogreške mjerene dužine, koji izražava pogreške slučajnog karaktera (kod neposrednog mjerenja dužina). Međutim za ostale metode mjerenja dužina bit će zgodnije u formuli (15) postaviti da je $m_d^2/d^2 = c_1^2$. Sada treba da bude u konačnom izvodu:

$$c_1 \leq \frac{md}{d} \leq \frac{\mu^{cc}}{\varrho^{cc}} \frac{10 \cdot \varrho^{gr}}{\nu^{gr}} K. \sqrt{\frac{L}{d}}$$

odnosno c_1 u cm

$$c_1 \leq \frac{\mu^{cc}}{\nu^{gr}} K . \lambda$$

Za razno n bit će umnožak $k \cdot \lambda$

$n =$	2	3	4	5	6
$n =$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$
$k . \lambda =$	1,82	2,65	3,48	4,33	5,44

Kolikogod se ova teoretska razlaganja zasnivaju na idealiziranim vlakovima, ipak možemo ustanoviti, kakove zahtjeve postavlja teorija pogrešaka, da bi indirektan pravac primjenom metode poligonometrije postigli sa što većom točnošću. U tu je svrhu potrebno da budu zadovoljeni slijedeći uslovi:

1) broj poligonskih strana u pomoćnom vlaku treba da bude što manji, obzirom na zadovoljenje točnosti mjerenja kutova;

2) dužina vlaka treba da bude otprilike jednaka dužini pravca kojeg indirektno određujemo t. j. vlak ispružen;

3) točnost mjerenja pravaca u pomoćnom vlaku treba da bude barem ista kao i u dotičnoj trig. mreži;

4) točnost mjerenja dužina treba da bude u istom omjeru sa iskrivljenošću vlaka t. j. što iskrivljeniji vlak to veća točnost mjerenja dužina.

Ako su zadovoljeni navedeni uslovi onda obzirom na točnost, koja se može postići primjenom metode precizne poligonometrije, postavlja se pitanje da li ima smisla uzimati težinu izlomljenog pravca?

Ako pretpostavimo da će kod određivanja indirektnog pravca metodom poligonometrije biti 2—4 strane, onda obzirom na visoku točnost mjerenja kutova u poligonometriji možemo pretpostaviti da će težine ovih pravaca biti između 0,60 i 0,70.

Izjednačenje trigonometrijskih točaka svih redova po koordinatama, prema našim dosadašnjim instrukcijama obavljaju se približnom metodom t. j. svi se pravci smatraju jednake kvalitete (težine).

Za vanjske pravce, gdje bi trebalo da utječe točnost njihove orijentacije, također ne uzimamo težine. Prema tome smatramo da bi uz zadovoljenje gornjih uslova mogli i ove indirektne pravce iz praktičkih razloga uzimati s težinom 1.

III.

Drugi način određivanja indirektnog pravca je kombinacija od dva pomoćna vlaka simetrično postavljena prema dijagonali slično paralaktičkoj jedinici s pomoćnom bazom u sredini. To je u stvari četverokut u obliku romba.

Ovaj način možemo primijeniti u onim slučajevima, kada se može postaviti izlomljeni pravac s jednom pomoćnom točkom. Da bi uštedili mjerenje dužina, koje u svakom slučaju predstavlja najteži terenski dio posla, postavit ćemo simetrično s pravcem kojeg određujemo drugi pomoćni vlak, na taj način da se može kraća dijagonala e ovako nastalog četverokuta mjeriti (sl. 3).

Na stajalištima ABMN mjere se kutovi α γ_1 δ_1 β δ_2 i γ_2. Dijagonalu e možemo mjeriti, međutim to nije neophodno potrebno. Ako uzmemo da je $e = 1$, onda potrebne veličine a_1 b_1 a_2 b_2 sračunamo kao relativne veličine pomoću sinusnog poučka.

Indirektni pravac možemo odrediti na tri načina:

1) u trokutima AMB i ABN naći ćemo kutove α_1, α_2 i β_1, β_2 za koje ćemo korigirati pravce opažane na stajalištima A i B, da bi dobili indirektne pravce.

2) pomoću oba poligonska vlaka sračunaju se u pomoćnom koordinatnom sistemu koordinate krajnje točke i poznatim načinom sračunaju se indirektni pravci.

3) iz pravokutnih trokuta ACB i ADB i t. d. (sl. 4) računaju se kutovi α_1, α_2, β_1 i β_2 i prema tome indirektni pravci.

Prvo rješenje

U četverokutu AMBN treba da bude zadovoljen uslov figure:

$$\alpha+\beta+(\gamma+\delta_1)+(\gamma_2+\delta_2)=360^\circ \quad \ldots (16)$$

Kako je $\varphi_1 = 180^\circ - (\gamma_1+\delta_1)$,

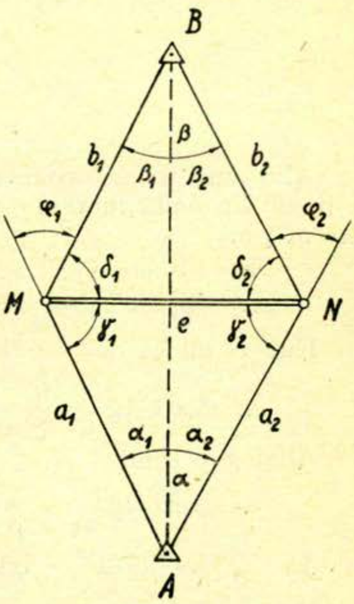
$\varphi_2 = 180^\circ - (\gamma_2+\delta_2)$, to ćemo zamjenom u formulu (16) imati:

$$\alpha+\beta-\varphi_1-\varphi_2+4\ W = \Phi \quad \ldots (17)$$

Iz formule (17) sračunat ćemo popravku w, koju ćemo dodati svakom kutu.

U tokutu AMN bit će zadovoljet teoretski uslov:

$$(\alpha+\mathrm{w})+\left(\gamma_1+\frac{\mathrm{w}}{2}\right)+\left(\gamma_2+\frac{\mathrm{w}}{2}\right)=180^\circ$$



Slika 3.

Vjerojatno će se i sada pojaviti stanovita nesuglasica iz razloga što ovo »izjednačenje« nije strogo. Dužine a_1 b_1, a_2 i b_2 računaju se sada po sinusnom poučku.

Iz Δ AMB imamo: $\varphi_1 = \alpha_1 + \beta_1$; iz Δ ABN $\varphi_2 = \alpha_2 + \beta_2$
Pomoću tangensnog poučka računaju se veličine

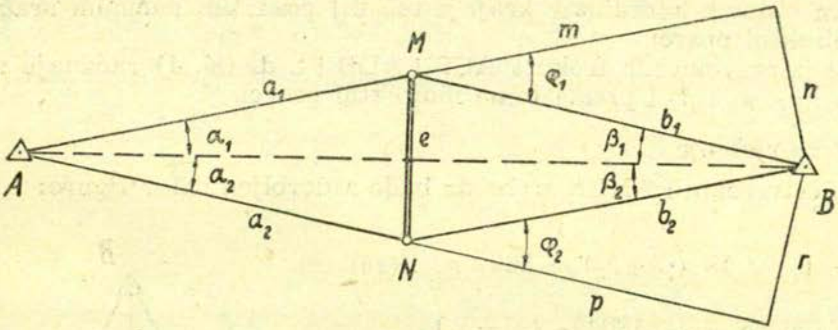
$$\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} \text{ i } \frac{\alpha_2 - \beta_2}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_2 - \beta_2}{2} = \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi_2}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} - \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \quad \text{itd.}$$

Drugo rješenje je već objašnjeno.

Treće rješenje



Slika 4.

Ako smo u četverokutu AMBN sračunali relativne veličine strana a_1 b_1 a_2 b_2, onda možemo u pravokutnom trokutu MCB sračunati stranice m i n.

$$m = b_1 \cos \varphi_1$$
$$n = b_1 \sin \varphi_1$$

Kut α_1 bit će:

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{a_1 + m}$$

Analogno tome:

$$\alpha_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{a_2 + p}$$

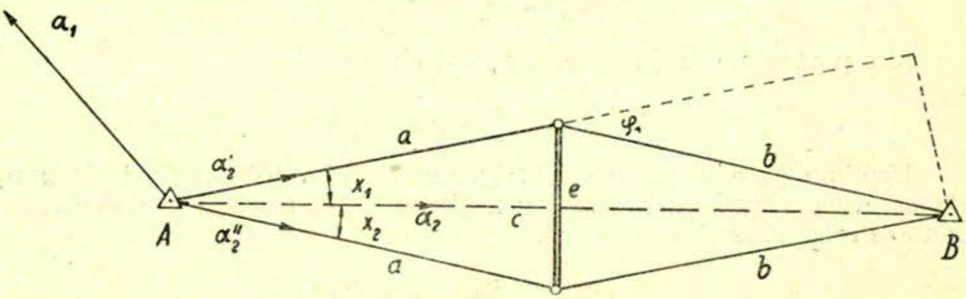
Ako je $\alpha_1 + \beta_1 = \varphi_1$, onda je $\beta_1 = \varphi_1 - \alpha_1$, i analogno tome $\beta_2 = \varphi_2 - \alpha_2$.

Pravac AB dobit ćemo ako pravcu na M dodamo α_1, odnosno vizuri na N oduzmemo veličinu α_2.

Novi pravilnik za triangulaciju predviđa ovaj slučaj u potpuno općenitoj formi. Figura je izduženi romboid blizak deltoidu t. j. nije simetrična figura, koja se inače teško u praksi može postići. Predviđen je i poseban formular za ovo računanje.

Točnost određivanja indirektnog pravca kod ovakovog načina rada je, i bez ispitivanja na osnovu teorije pogrešaka, očito veća nego u ranije opisanoj metodi, radi toga što ovdje imamo svega jednu prelomnu točku, a takodjer i kontrolu — dva vlaka i zatvorenu figuru.

Srednja pogreška može se naći iz rješenja četverokuta. Izvod srednje pogreške za općenite slučajeve i oblike četverokuta je prilično kompliciran, zato ćemo srednju pogrešku prikazati za jednostavniji slučaj, gdje je kut φ mali.



Slika 5.

Takav će se slučaj pojaviti, kad na terenu ne možemo pronaći mjesto za postavljanje pomoćne baze e dovoljne veličine da bi dužine a i b sračunali sa zadovoljavajućom točnošću. (Paralaktički kutovi trebali bi inače biti barem 5_{Gr}). Zato ćemo točke M i N postaviti što bliže dijagonali AB. Sama možemo smatrati da su krakovi kuta MAN, odnosno MBN jednaki. Ako označimo korekcije za pravac α_2 sa x_1 i x_2 dobit ćemo pravac α_2 iz dvostrukog računanja:

$$\alpha_2 = \alpha'_2 + x_1 \qquad \alpha_2 = \alpha_2'' - x_2$$

Međutim u ovom je slučaju potrebno dužine strana a i b na neki način mjeriti. Uz gornju pretpostavku da je e malo bit će $a+b=c$, a popravci:

$$\left.\begin{aligned} x_1'' &= \frac{b}{a+b}\varphi''_1 = k\,\varphi''_1 \\ x_2'' &= \frac{b}{a+b}\varphi''_2 = k\,\varphi''_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

Ako diferenciramo jednu od ovih jednadžbi po sve tri promjenljive imat ćemo:

$$dx'' = k \cdot d\varphi'' + \varphi'' \cdot \frac{a}{c^2}\,db - \varphi''\,\frac{b}{c^2}\,da$$

Obzirom na male kutove φ bit će:

$$dx'' = k\,d\varphi''$$

Međutim mi smo imali da je:

$$\alpha_2 = \alpha'_2 + x_1 \quad \text{i} \quad \alpha_2 = \alpha_2'' - x_2$$

Diferenciranjem ovih formula po svim promjenljivim dobijamo:

$$d\alpha_2 = d\alpha'_2 + dx_1 \qquad d\alpha_2 = d\alpha''_2 - dx_2$$

Zamjenom za $dx = kd\varphi$ bit će:

$$d\alpha_2 = d\alpha'_2 + kd\varphi \qquad d\alpha_2 = d\alpha_2'' - kd\varphi$$

Prelazom na srednje pogreške bit će:

$$m_\alpha^2 = m_\alpha^2 + k^2 m_\varphi^2$$

Ako postavimo da je $m_\varphi = m_\alpha \sqrt{2}$ onda je

$$m_{\alpha_2}^2 = m_\alpha^2 + 2\,k^2\, m_\alpha^2$$

Uzmimo da smo pravce na trigonometričkim točkama mjerili u n_1 girusa, a na pomoćnim točkama u n girusa bit će srednja pogreška aritmetičke sredine iz dva mjerenja:

$$m_{\alpha_2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_\alpha^2}{n_1} + 2k^2\,\frac{m_\alpha^2}{n}\right)$$

$$m_{\alpha_2}^2 = \frac{n + 2n_1 k^2}{2n_1 n}\, m_\alpha^2 \qquad \ldots \quad (19)$$

Da bi pravci opservirani na pomoćnim točkama bili jednake točnosti kao i pravci u mreži treba da bude:

$$n = 2\,k^2\, n_1$$

Dužine strana mogu se mjeriti vrpcom ili indirektnim putem s točnošću da zadovolje formulu (15).

IV.

Kako je uvodno bilo spomenuto ovakova metoda određivanja indirektnih pravaca u triangulaciji primjenjuje se u specijalnim uslovima terena.

Metoda određivanja indirektnih pravaca u triangulaciji pomoćnim vlakom stvarno nije predviđena našim instrukcijama za triangulaciju (Katastarski pravilnik I. dio). U doba kad se taj pravilnik stvarao nije ni postojao sadašnji poligonalni pribor i prema tome nisu postojale tehničke mogućnosti za precizno mjerenje kutova u vlaku. Na drugoj strani to ne znači da se u struci ne bi mogla primijeniti nova metoda rada, koja se napretkom tehnike razvije, i čija se primjena pokaže korisna i racionalna. Zato je prirodno da dosadanje instrukcije ne predviđaju takove slučajeve, ali bi bilo potrebno da se uslijed novo nastalog stanja dosadanji propisi uskiade i dopune novim mogućnostima. Dr. Pinkwart u citiranoj raspravi navodi, da se nažalost mnoge metode službeno priznaju tek onda kad se u praksi već mnogo primjenjuju, ali da postoji nada, da će se poslije uvođenja ove metode u službene instrukcije na osnovu okružnice TP-AP-Rderl. broj 44 pod c) ona otvoreno dozvoliti.[1])

Kako se iz ovog razlaganja može razabrati teorija postavlja stanovita ograničenja. Instrukcije bi trebale ta ograničenja precizirati u duhu teoretskih zahtjeva i praktičkih mogućnosti za naše prilike.

S time u vezi trebalo bi osvijetliti bar općenito stanovita pitanja, a koja bi se mogla ovako formulirati:

1) u kojim redovima triangulacije i kako se može primjenjivati indirektna metoda određivanja pravca pomoćnim vlakom,

2) da li ovaj vid radova predstavlja kombinaciju triangulacije i precizne poligonometrije,

3) da li točnost paralaktičkog mjerenja dužina s konstantnom letvom zadovoljava?

Principijelno je ova metoda određivanja indirektnog pravca poligonometrijska. Teoretski izvodi, koje smo ranije naveli govore općenito o obliku vlaka, broju strana i točnosti mjerenja. Prema tome nema ograničenja u pogledu dužine indirektnog pravca i dužine pomoćnih strana, uz pretpostavku da se primjenjuje odgovarajuća točnost mjerenja. Ograničenje postoji u broju strana (što manje), pa će se dužine poligonskih strana morati rukovoditi tim zahtjevom. Na primjer ako je maksimalan broj strana 5 onda za pravac od 2 km bit će dužine strana 400 m, dok za pravac od 5 km dužina poligonske strane mora biti 1 km. Drugi uslov je ispruženost, vlak treba da bude što manje iskrivljen. Ova dva uslova diktiraju točnost mjerenja kutova i dužina. U Njemačkoj praksi ova se metoda primjenjivala isključivo u mreži nižih redova (III. i IV.).

Točno je da u preciznoj poligonometriji postoje redovi jednako kao i u triangulaciji, gdje se obzirom na dužine poligonometrijskih strana i vlakova primjenjuje odgovarajuća točnost mjerenja dužina i kutova, dakle isti princip kao i u triangulaciji. Prema tome bi se moglo očekivati da nema zapreka, da se indirektni pravac u stanovitom redu triangulacije određuje pomoćnim vlakom odgovarajućeg reda poligonometrije, naravno pridržavajući se općih zahtjeva o kvaliteti.

Prof. Danilov u svojoj knjizi »Točnaia poligonometrija« — Moskva 1946. na str. 22 raspravlja o indirektnom načinu određivanja prelomnog kuta **u poligonometriji.** Za taj slučaj on daje šemu kako je prikazana na slici 6.

M je bočna točka, koja se vidi s krajeva vlaka. Cilj ovakovog načina rada je: a) sniziti visinu signala na točkama B i G, b) povečati točnost prenosa smjera u vlaku a time smanjiti poprečnu pogrešku, c) postaviti vlak tamo, gdje je pogodnije za mjerenje dužina.

---

[1]) Ovo je štampano u okružnici pruskog ministarstva Unutrašnjih poslova »O državnoj trokutnoj i umetnutoj mreži« od 26. 10. 1936. VI. A 13236/1810 TP-AP-Ederl).

Postupak računanja kod toga je slijedeći:

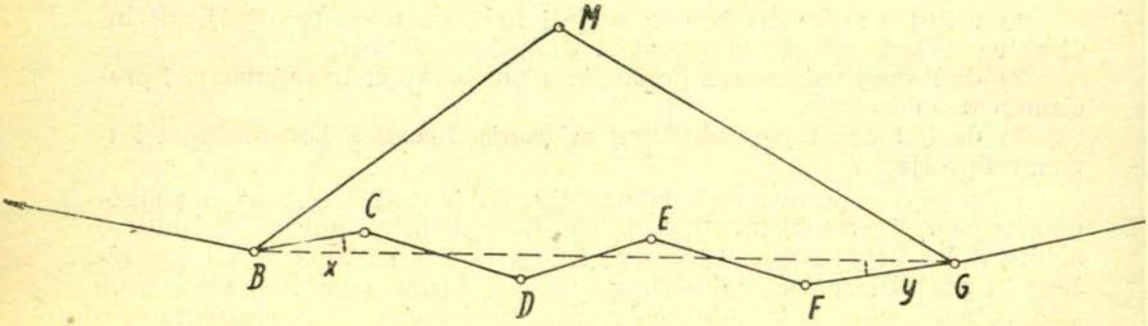
1) Računaju se približne koordinate točaka BCD... G iz mjerenih elemenata vlaka.

2) Presjekom pravaca naprijed računaju se približne koordinate bočne točke M.

3) Reduciraju se kutovi i dužine na ravninu projekcije i na taj način dobije se zatvoreni poligon BMGFEDCB na ravnini.

4) Izjednače se kutovi u tom poligonu za uslov figure.

5) Ponovno se računaju koordinate točaka pomoćnog vlaka, i iz toga kutovi x i y.



Slika 6.

Na taj način dobija se indirektan pravac BG odnosno GB, koji u daljnjem postupku izjednačenja ulaze kao neposredno mjereni.

Danilov preporuča da broj prelomnih točaka uključivši i krajnje točke, ne bude veći od 7. Poprečnu pogrešku za ovakav vlak daje prema Jordanu:

$$\frac{q}{L} = \frac{m''}{\varrho''}\sqrt{\frac{n\,(n+1)}{12\,(n-1)}}$$

gdje je m″ srednja pogreška mjerenog prelomnog kuta, q=poprečna pogreška, L=dijagonala vlaka, n=broj točaka u vlaku. Da ova pogreška ne bi ispala veća nego u slučaju direktnog mjerenja sa B na G to je potrebno iz nejednadžbe:

$$\frac{m''}{\varrho}\sqrt{\frac{n\,(n+1)}{12\,(n-1)}} \leq \frac{m''}{\varrho''}\sqrt{\frac{p\,(p+1)}{12\,(p-1)}}$$

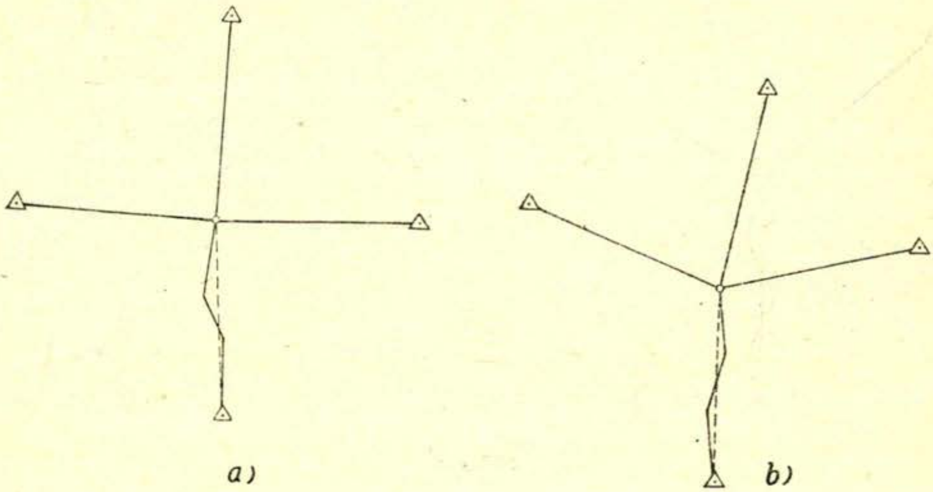
postavivši za $p = 2$ naći da je $n = 7$.

U našim zaraslim terenima teško da bi mogli naći pomoćnu točku za kontrolu prenosa smjera. Naš pribor za preciznu poligonometriju dozvoljava obzirom na visinu stativa i veličinu značaka mjerenja na udaljenosti do 1 km. Prema tome teoretski zahtjev, što manjeg broja strana možemo uspješno zadovoljiti jedino u mreži nižih redova. Kako vidimo obzirom na naš pribor, metodiku rada i naše mogućnosti, primjena ove metode u mreži viših redova ne bi bila efikasna. Za to bi trebalo raspolagati barem sa visokim prenosnim stativima i signalima, koji bi omogućili dogledanje na udaljenosti veće od 2—3 km.

Međutim smatramo da bi općenito, kod svih slučajeva u kojima se namjerava primjeniti indirektno određivanje pravca metodom poligonometrije, bilo potrebno predhodno teoretski razmotriti kakav će utjecaj imati taj pravac na položaj točke.

Razmotrit ćemo neke slučajeve:

1) Uzmimo najprije slučajeve šematski prikazane na slici 7, gdje imamo tri obostrana pravca i četvrti bi bio indirektan.



Slika 7.

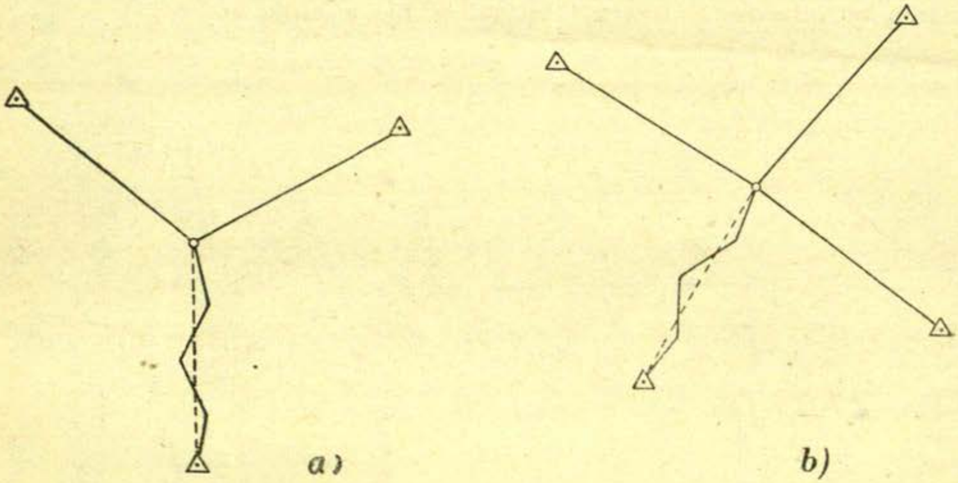
Ovdje bi mogli biti odmah na čisto da će indirektni pravac imati utjecaja na položaj nove točke jedino u onom slučaju, ako se težina tog pravca približava težini neposredno mjerenih. Kad će to biti dokazano je ranije — u protivnom slučaju nema praktički nikakvog smisla postavljati precizni poligonski vlak samo za ovu svrhu. On se jedino može postaviti kao normalan poligonometrijski vlak, ako je kao takav uopće potreban i u tom slučaju moraju točke biti stabilizirane i zadovoljiti niz drugih uslova obzirom na sigurnost točaka, mogućnosti priključka detaljne mreže i t. d.

2) Točka je dobro trigonometrijski određena ako se određuje kako je šematski prikazano na slici 8:

U slučaju pod a) ima smisla postavljati jedan odnosno, ako je potrebno, dva indirektna pravca, jer se u tom slučaju omogućava pravilnije određivanje trigonom točke, odnosno njeno određivanje uopće. U drugom slučaju pod b) jedan ind. pravac nije nužno potreban, jer je točka, pogotovo ako je određena s obostranim pravcima, dobro određena i indirektni pravac ne će skoro ništa doprinijeti na položajnoj stabilnosti točke, a povečat će troškove i terenski rad na njenom određivanju.

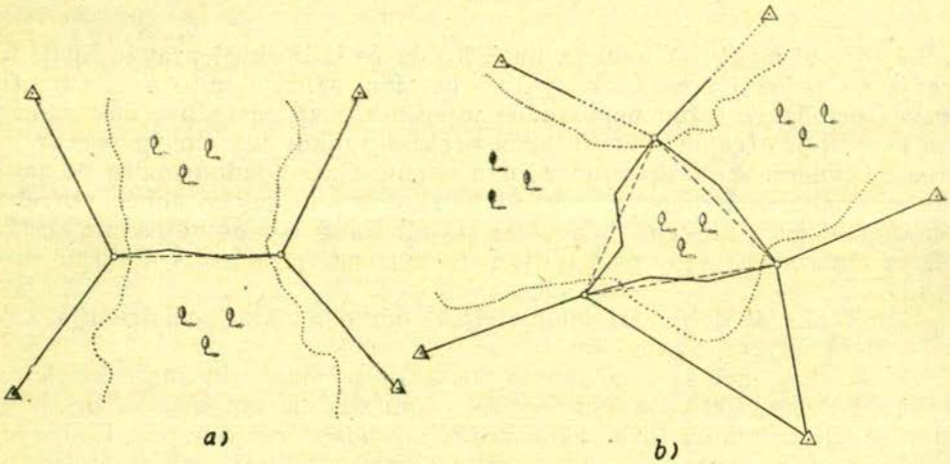
3) U šumskim terenima mogu se pojaviti ovakovi slučajevi slika 9 a i b.

Jedan i drugi slučaj omogućavaju pravilnije riješenje i bolju povezanost točaka. Izjednačenje se može provesti kao sistem čvornih točaka sa orijentacijom. Ako se možemo zadovoljiti približnim rješenjem, a postoje teoretski uslovi t. j. ispruženost i mali broj strana, mogli bi se sračunati indirektni pravci i izjednačenje točaka provesti trigonometrički.



Slika 8.

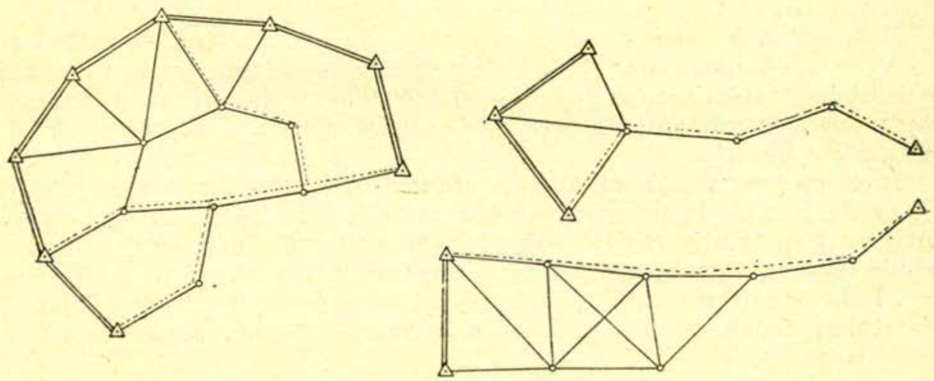
1



Slika 9.

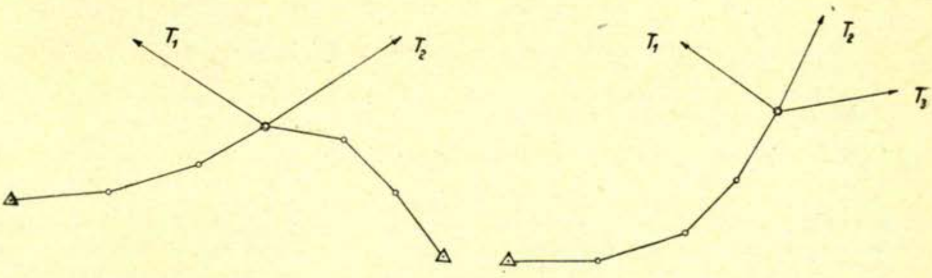
Smatramo da bi time dali odgovor na prvo pitanje i za prvi način određivanja indirektnog pravca pomoćnim vlakom. Drugi način mogao bi se prihvatiti i za pravce viših redova.

Kombinirana rješenja triangulacije i poligonometrije mogu se pojaviti u dva vida. U jednom se zajednički određuju (izjednačuju) točke poligonometrije i triangulacije. Prema tome redovi točaka poligonometrije i triangulacije moraju biti isti. Za te slučajeve mogli bi dati šeme prikazane na slici 10. Izjednačenja se mogu izvesti metodom uslovnih opažanja ili po koordinatama, u kojem slučaju vrijede i Schreiberova mehanička pravila.



Slika 10.

Drugi vid je ako se poligonometrijske točke određuju kombinirano iz poligonskih vlakova i vizura na trigonometričke točke. To su svi slučajevi t. zv. međuorijentacije i učvorivanja sa orijentacijom (sl. 11). U tom slučaju dolazi do izjednačenja jedne ili sistema čvornih točaka na osnovu poligonskih vlakova i pravaca, kada odpada jedna jednadžba pogrešaka t. j. smjera u čvornoj točki, pa se čvorna točka izjednačuje na osnovu sličnih jednadžbi kao i kombinirani presjek pravaca.



Slika 10.

Prema tome poligonometrijsko određivanje indirektnog pravca predstavlja samo jedan način određivanja pravca u triangulaciji i ne možemo to smatrati da je to kombinirano rješenje poligonometrije i triangulacije, jer se konačno točka izjednačuje ipak trigonometričkim putem.

Ovo su samo nabrojani slučajevi kombiniranog rješenja poligonometrijskih mreža.

Na treće pitanje mislim da bi mogli odgovoriti bez velikog dokazivanja. Primjena ovog načina mjerenja dužina prikazana je u Geodetskom listu, a točnost rada konstantnom letvom 3 m Zeissove konstrukcije samo u konačnim izvodima.[1]) Tamo prikazane srednje pogreške i načini mjerenja omogućavaju mjerenje dužina s mnogo većom točnošću, nego se to zahtijeva u slučaju određivanja indirektnih pravaca, kako to zahtijeva formula (15).

Primjenom posebnog načina mjerenja dužina dijeljenjem velike dužine na manje djelove, možemo zahvaljujući upotrebi prisilnog centriranja povečati točnost mjerenja dužine i do 1:60.000.[2]) Na taj način primjena ovog pribora u radovima na preciznoj poligonometriji nižih redova ne dolazi uopće u pitanje.

Iz svega ovoga možemo doći do stanovitih zaključaka, a ti su:

a) da je metoda precizne poligonometrije vrlo interesantna i da ona zahtijeva poznavanje teorije pogrešaka u poligonskom vlaku, kao i sve metode izjednačenja koje mnogo utiču na način projektiranja i mjerenja.

b) da ona pruža veliku elastičnost i mogućnost u određivanju položaja stalnih točaka i da zaslužuje da se razradi i obuhvati službenim instrukcijama.

LITREATURA O IZLOMLJENIM ZRAKAMA

Dr. Kerl, Fehlergleichungen für gebrochene Strahlen (AVN 1934.)

Dr. Jrng, Beitrag zur Frage der Fehlergleichungen für gebruochene Strahlen (AVN 1935).

Dr Kaestner, Dei Verwendumng gebrochener Strahlen bei der Kleindreiecksmessung (A. V. N. 1935.).

J. Köhr, Mittelbare Bestimmung einer Richtung bei einer Keintriangulation (A. V. N. 1935.).

Dr. K. Herrmann, Die Anwendung einmal gebrochener Strahlen bei der Kleintriangulierung (A. V. N. 1936.).

Wilhelm, Die Gewichte mitterbar gemessener Riichtungen bei der Verwendung gebrochener Strahlen in Kleintriangulationen (A. V. N. 1936.).

Dr Nittinger, Zur Einschaltung von Aufnahmepunkten in ein Landesdreiecksnetz unter besonderer Berüsksichtigung der gebrochene Strahl (A. V. N. 1938.).

Kaestner, Die Verwendung von Vieleckszügen bei ger Verdichtung des Landesdreiecksnetzes (A. V. N. 1938.).

J. Niemeyer, Gebrochene Strahlen in der Kleintriangulation (A. V. N. 1939.).

E. Ammermann, Gebrochene Strahlen ohne Streckenmessung (A. V. N. 1940.).

K. Johannsen, Aus der Praxis des gebrochenen Strahles (A. V. N. 1940.).

Dr. Pinkwart, Ueber die Netzfehler und Richtugsgewichte bei Kleintriangulierungen (ZfV 1938.).

Ing de Lazarini Tadeusz, Uwagi o pomiarach wiekszych zbionikow wodnych i zastosowaniu t. zw. lamanych celowych (Przeglad Geodezyjny 1947.).

---

[1]) Janković: Rezultati mjerenja Zeissovim priborom za točnu poligonometriju itd. Geodetski list 1947, str. 9.

[2]) A Wolf: Le mesurage parallactique de précision Journale des Geometres experts. 1949, str. 507.

J. Wolthuis. De gebroken richtig (Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde 1949.).
A. V. N. = All gemeine Vermessungs-Nachrichten.
ZfV = Zeitschrift für Vermessungswesen.

LITERATURA ZA POLIGONOMETRIJU I OPTIČKO MJERENJE DUŽINA BAZISNOM LETVOM KONSTANTNE DUŽINE:

Gruber: Optische Streckenmessung und Polygonierung- Berlin 1942.
Hädrich, Verfahren zur Bestimmnug von Trigonometrichen Punkten des Aufnahmenetzes durch Polygonzüge mit indirekter Streckenmessung (ZfV str. 521—538. 1939.).
Huber und K. Rinner, Einschlatung von Aufnahmenpunkten in ein Dreieksnetz durch Streckenzüge mit optischer Längenmessung ZfV str. 226—237 1939.
Janković, Rezultati mjerenja Zeissovim priborom za točnu poligonometriju i Zeisovom invar letvom od 3m (Geodetski list 1947., str. 9—23).
Janković, O mogućnostima primjene i nekim rezultatima precizne poligonometrie kod nas (Geodetski list 1949. str. 151.).
Wolf, La mesurage parallactique de précision (Journal des geometres experts et Topographes Francais 1949 str. 507).

Ing. Mato Janković — Zagreb

SUR L'EMPLOI RÉGULIER DE LA POLYGONATION DE PRÉCISION

A l'occasion de la détermination des directions indirectes dans la triangulation avec emploi de la polygonation de précision.

Un coup d'oeil rétrospectif critique sur la méthode de détermination de la direction indirecte dans la triangulation à l'aide du chemin polygonal dans le placement du réseau trigonométrique dans la plaine et les terrains boisés.

Dans cet article l'auteur traite l'application de la polygonation de précision, l'exactitude du travail et de la direction indirecte ainsi que les cas où cette méthode peut être utilisée avec avantage. En vue de situations de terrain et d'instruments employés cette methode peut être appliquée dans les ordres trigonométriques inferieurs et dans les cas exceptionnels. Pour le placement du réseau des points géodétiques dans les terrains difficiles, l'auteur recommande l'application de la polygonation de précision normale avec la détermination des points nodeaux. A la fin de l'article il mentionne certaines schèmes des déterminations combinés de triangulation et polygonation de précision. Toutefois il considère la méthode pourvue d'instruction pour la triangulation.