Filipović Mirko, stud. geod. — Zagreb

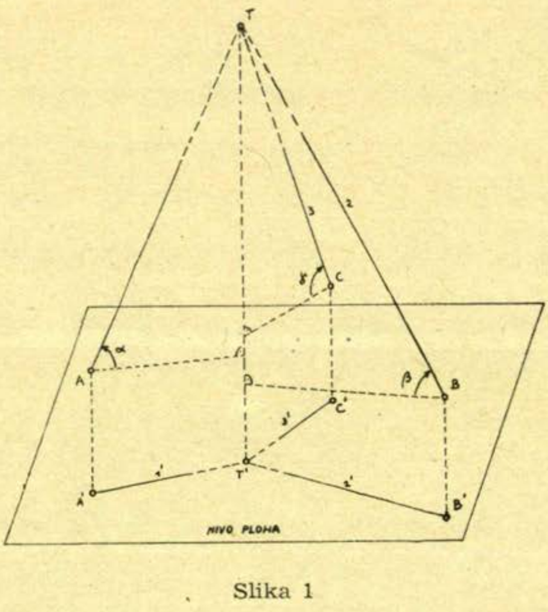
# Određivanje koordinata visoke točke mjerenjem vertikalnih kutova

U geodetskoj praksi određuju se redovito koordinate visoke točke presjecanjem, pomoću vanjskih i unutarnjih pravaca. Često su uz ovo vezane i operacije redukcije pravaca na centar i sl., što sve zahtjeva mnogo matematskih radnji, kontrola i vremena.

U ovome članku htio bih prikazati jednu mogućnost određivanja traženih koordinata, mogućnost koja zahtjeva razmjerno vrlo malo vremena, a u pogledu točnosti potpuno zadovoljava.

Za razliku od poznatih metoda koje se osnivaju na mjerenju horizontalnih kuteva, ovaj se način bazira na mjerenju vertikalnog kuta sa tri bliske date točke.

U tu svrhu predpostavimo da trebamo odrediti koordinate visoke točke T sa blizih zemljišnih točaka A, B i C, koje su osim položajno definirane i visinski.




Slika 1

U tom slučaju izmjerit ćemo instrumentom na stajalištima A, B i C vertikalne kuteve $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ na nepoznatu visoku točku T. Iz ovoga podatka, te horizontalnih koordinata i visina točaka A, B i C određujemo tražene prostorne koordinate X, Y i H točke T na slijedeći način:

Neka su:

$$\left.\begin{array}{l} X_A \; Y_A \; H_A \\ X_B \; Y_B \; H_B \\ X_C \; Y_C \; H_C \end{array}\right\} \quad \text{Prostorne koordinate poznatih točaka A, B i C.}$$

X Y H — prostorne koordinate tražene točke T.

Prema slikama 1 i 2 imamo:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H - H_a}{\sqrt{(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H - H_b}{\sqrt{(X - X_B)^2 + (Y - Y_B)^2}}$$

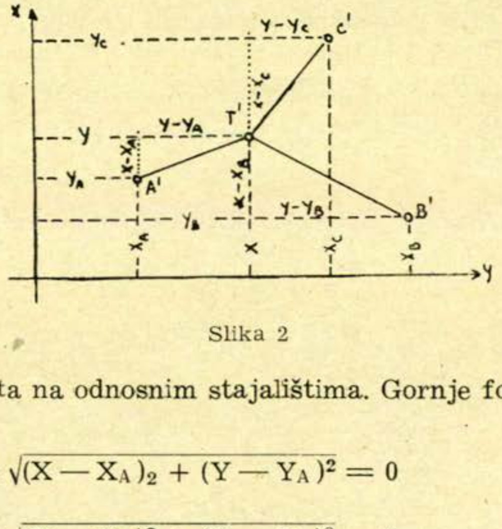
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{H - H_c}{\sqrt{(X - X_C)^2 + (Y - Y_C)^2}}$$

gdje je

$$H_a = H_A + i_A$$

$$H_b = H_B + i_B$$

$$H_c = H_C + i_C$$




Slika 2

$i_A$, $i_B$, $i_C$ su visine instrumenta na odnosnim stajalištima. Gornje formule možemo pisati i ovako:

$$(H - H_a) - \operatorname{tg}\alpha \sqrt{(X - X_A)_2 + (Y - Y_A)^2} = 0$$

$$(H - H_b) - \operatorname{tg}\beta \sqrt{(X - X_B)^2 + (Y - Y_B)^2} = 0 \qquad (1)$$

$$(H - H_c) - \operatorname{tg}\gamma \sqrt{(X - X_C)^2 + (Y - Y_C)^3} = 0$$

Pošto ovaj slučaj dolazi samo kod određivanja koordinata visoke točke sa bliskih točaka i strmim vizurama, to otpadaju pogreške uslijed zakrivljenosti zemlje i refrakcije, pa ih zato kod računa ne uzimamo u obzir.

Vratimo se natrag jednadžbama 1 i uvrstimo u njih približne vrijednosti za X, Y i H:

$$X = X_0 + \Delta X; \qquad Y = Y_0 + \Delta Y; \qquad H = H_0 + \Delta H \tag{2}$$

pa dobijemo:

$$\begin{aligned}
(H_0 + \Delta H - H_a) - \operatorname{tg}\alpha \sqrt{(X_0 + \Delta X - X_A)^2 + (Y_0 + \Delta Y - Y_A)^2} &= 0 \\
(H_0 + \Delta H - H_b) - \operatorname{tg}\beta \sqrt{(X_0 + \Delta X - X_B)^2 + (Y_0 + \Delta Y - Y_B)^2} &= 0 \qquad (3) \\
(H_0 + \Delta H - H_c) - \operatorname{tg}\gamma \sqrt{(X_0 + \Delta X - X_C)^2 + (Y_0 + \Delta Y - Y_C)^2} &= 0
\end{aligned}$$

Na dobivene formule primjenimo sada Taylor-ov red koji u općem obliku za funkciju sa tri nepoznanice glasi:

$$f(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, H_0 + H) = f(X_0, Y_0, H_0) + \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial Y}\Delta Y + \frac{\partial f}{\partial H}\Delta H$$

U ovoj jednadžbi zanemareni su članovi druge i viših potencija pošto su vrlo mali i praktički nepoželjni u računu.

Razvijemo li prema tome naše funkcije 3 u Taylorov red dobit ćemo slijedeće:

$$[(H_0 - H_a) - \operatorname{tg}\alpha \sqrt{(X_0 - X_A)^2 + (Y_0 - Y_A)^2}] - \frac{\operatorname{tg}\alpha\,(X_0 - X_A)}{\sqrt{(X_0 - X_A)^2 + (Y_0 - Y_A)^2}}\Delta X$$

$$- \frac{\operatorname{tg}\alpha\,(Y_0 - Y_A)}{\sqrt{(X_0 - X_A)^2 + (Y_0 - Y_A)^2}}\Delta Y + \Delta H = 0$$

$$[(H_0 - H_b) - \operatorname{tg}\beta \sqrt{(X_0 - X_B)^2 + (Y_0 - Y_B)^2}] - \frac{\operatorname{tg}\beta\,(X_0 - X_B)}{\sqrt{(X_0 - X_B)^2 + (Y_0 - Y_B)^2}}\Delta X$$

$$- \frac{\operatorname{tg}\beta\,(Y_0 - Y_B)}{\sqrt{(X_0 - X_B)^2 + (Y_0 - Y_B)^2}}\Delta Y + \Delta H = 0$$

$$[(H_0 - H_c) - \operatorname{tg}\gamma \sqrt{(X_0 - X_C)^2 + (Y_0 - Y_C)^2}] - \frac{\operatorname{tg}\gamma\,(X_0 - X_C)}{\sqrt{(X_0 - X_C)^2 + (Y_0 - Y_C)^2}}\Delta X$$

$$- \frac{\operatorname{tg}\gamma\,(Y_0 - Y_C)}{\sqrt{(X_0 - X_C)^2 + (Y_0 - Y_C)^2}}\Delta Y + \Delta H = 0$$

U ovim jednadžbama nepoznanice su nam: $\Delta X$, $\Delta Y$ i $\Delta H$. Približne karte ili plana.

Uvedemo li skraćene oznake i to:

za vrijednosti u uglatim zagradama . . . . . $a_1$, $a_2$, $a_3$
za koeficiente pred nepoznanicom $\Delta X$ . . . . $b_1$, $b_2$, $b_3$
za koeficiente pred nepoznanicom $\Delta Y$ . . . . . $c_1$, $c_2$, $c_3$

$$\begin{aligned} a_1 - b_1\,\Delta X - c_1\,\Delta Y + \Delta H &= 0 \\ a_2 - b_2\,\Delta X - c_2\,\Delta Y + \Delta H &= 0 \\ a_3 - b_3\,\Delta X - c_3\,\Delta Y + \Delta H &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Imamo dakle tri jednadžbe sa tri nepoznanice, odakle je lako odrediti $\Delta X$, $\Delta Y$ i $\Delta H$, pomoću kojih ,prema jednadžbama 2 dobijemo tražene koordinate točke T:

$$X = X_0 + \Delta X; \qquad Y = Y_0 + \Delta Y; \qquad H = H_0 + \Delta H;$$

Ovi rezultati dobiveni prvom aproksimacijom ne će nas zadovoljiti pošto smo razvijanjem funkcije u Taylorov red zanemarili članove viših potencija.

Točnije vrijednosti dobit ćemo ako rezultate prve aproksimacije smatramo ponovno približnim vrijednostima i čitav računski postupak ponovimo. Kod toga nije uvijek potrebno nanovo računati koeficiente ispred nepoznanica $\Delta X$ i $\Delta Y$ tj. vrijednosti $b_1$, $b_2$, $b_3$ i $c_1$, $c_2$, $c_3$, već najprije sračunamo slobodne članove $a_1$, $a_2$, $a_3$ i ako su vrijednosti tih slobodnih članova dovoljno malene veličine, tada možemo koeficiente $b_1$, $b_2$, $b_3$, $c_1$, $c_2$, $c_3$ slobodno prepisati iz prvog računanja kao dovoljno točne.

Za kontrolu samog računanja mora nam biti:

$$X = X_P + \sqrt{\left(\frac{H - H_p}{\operatorname{tg}\varphi}\right)^2 - (Y - Y_P)^2} \qquad (P = A, B, C)$$

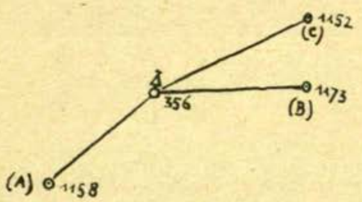
$$Y = Y_P + \sqrt{\left(\frac{H - H_p}{\operatorname{tg}\varphi}\right)^2 - (X - X_P)^2} \qquad (p = a, b, c)$$

$$H = H_p + \operatorname{tg}\varphi \sqrt{(X - X_P)^2 + (Y - Y_P)^2} \qquad (\varphi = \alpha, \beta, \gamma)$$

U koliko smo u mogućnosti da na terenu ostvarimo i četvrti pravac (sa četvrte poznate točke), to će nam taj pravac dobro doći prilikom ocjene točnosti dobivenog rezultata.

Praktična primjena ove metode zahtjeva specifične terenske okolnosti. Primjenit se može općenito kod određivanja neke visoke točke sa triju zemljišnih točaka koje se međusobno ne dogledaju. Takav slučaj nastupit će najčešće u gradu, gdje uslijed ugrađenosti nismo u mogućnosti da provedemo međusobnu orijentaciju datih točaka. U protivnom slučaju odredit ćemo koordinate tražene točke isključivo mjerenjem horizontalnih kuteva, dakle presjecanjem u jednoj ravnini i to iz razloga što su nam ovdje zakoni pogrešaka i mogućnosti izjednačenja uvelike uprošćeni, dok kod prostornog presjecanja, koje predstavlja gore navedeni način, uslijed neizbježnih funkcionalnih zavisnosti međusobnog položaja i visinskih odnosa, ulazimo prilikom ispitivanja točnosti i izjednačenja u komplicirane matematske izraze, praktički nepoželjne.

Za ilustraciju čitavog zadatka može nam poslužiti slijedeći primjer:




Slika 2.

Sa tri poznate gradske polig. točke određene su prostorne koordinate sjevernog tornja crkve Sv. Stjepana u Zagrebu (356).

Podaci su slijedeći:

| | Y | X | H | i |
|---|---|---|---|---|
| ⊙ 1158 | 238 502,35 | —30 712,51 | 122,800 m | 1,71 m |
| ⊙ 1173 | 238 219,16 | —30 900,35 | 126,774 m | 1,76 m |
| ⊙ 1152 | 238 235,11 | —30 999,87 | 128,093 m | 1,91 m |

Na ⊙ 1158 mjeren je vertikalni kut $\alpha = 32^\circ\ 38'\ 56''$

Na ⊙ 1173 „ „ „ „ $\beta = 31^\circ\ 26'\ 52''$

Na ⊙ 1152 „ „ „ „ $\gamma = 27^\circ\ 48'\ 27''$

Sa plana očitane su približne vrijednosti koordinata tražene točke:

$$Y_0 = 238\,402{,}00$$
$$X_0 = -30\,867{,}00$$
$$H_0 = 242{,}000 \text{ m}$$

Čitavi račun možemo prikazati formularom kako slijedi:

Tablica 1

| | | |
|---|---|---|
| $H_P = H_P + i_P$ | $a = C - \operatorname{tg} \varphi \sqrt{A^2 + B^2}$ | $X = X_0 + \Delta X$ |
| $A = X_0 - X_P$ | $b = \operatorname{tg} \varphi \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ | $Y = Y_0 + \Delta Y$ |
| $B = Y_0 - Y_P$ | $c = \operatorname{tg} \varphi \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ | $H = H_0 + \Delta H$ |
| $C = H_0 - H_P$ | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_0$ | − 30 867,00 | $\alpha$ | 32° 38′ 56″ | $\operatorname{tg} \alpha$ | 0.640730 |
| $Y_0$ | 238 402,00 | $\beta$ | 31° 26′ 52″ | $\operatorname{tg} \beta$ | 0.611547 |
| $H_0$ | 242,000 | $\gamma$ | 27° 48′ 27″ | $\operatorname{tg} \gamma$ | 0.527407 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_A$ | − 30 712,51 | A | − 154,49 | $A^2$ | 23 867,16 | $B^2$ | 10 070,12 |
| $Y_A$ | 238 502,35 | B | − 100,35 | $A^2 + B^2$ | 33 937,28 | $\sqrt{A^2 + B^2}$ | 184,22 |
| $H_a$ | 124,510 | C | 117,49 | $\operatorname{tg} \alpha \sqrt{A^2 + B^2}$ | 118,04 | | |
| $a_1$ | − 0,550 | $b_1$ | − 0,537 | $c_1$ | − 0,539 | | |
| $X_B$ | − 30 900,35 | A | + 33,35 | $A^2$ | 1 112,22 | $B^2$ | 33 430,37 |
| $Y_B$ | 238 219,16 | B | + 182,84 | $A^2 + B^2$ | 34 542,49 | $\sqrt{A^2 + B^2}$ | 185,85 |
| $H_b$ | 128,534 | C | 113,466 | $\operatorname{tg} \beta \sqrt{A^2 + B^2}$ | 113,66 | | |
| $a_2$ | − 0,194 | $b_2$ | + 0,110 | $c_2$ | + 0,601 | | |
| $X_C$ | − 30 999,87 | A | + 132,87 | $A^2$ | 17 654,44 | $B^2$ | 27 852,27 |
| $Y_C$ | 238 235,11 | B | + 166,89 | $A^2 + B^2$ | 45 506,71 | $\sqrt{A^2 + B^2}$ | 213,32 |
| $H_c$ | 130,003 | C | 111,997 | $\operatorname{tg} \gamma \sqrt{A^2 + B^2}$ | 112,51 | | |
| $a_3$ | − 0,513 | $b_3$ | + 0,329 | $c_3$ | + 0,413 | | |
| $a_1 c_3$ | − 0,227 | $a_1 c_2$ | − 0,331 | $a_1 b_2$ | − 0,061 | $a_1 b_3$ | − 0,181 |
| $a_2 c_1$ | + 0,068 | $a_2 c_3$ | − 0,080 | $a_2 b_3$ | − 0,064 | $a_2 b_1$ | + 0,104 |
| $a_3 c_2$ | − 0,308 | $a_3 c_1$ | + 0,179 | $a_3 b_1$ | + 0,275 | $a_3 b_2$ | − 0,056 |
| $\Sigma_1$ | − 0,467 | $\Sigma'_1$ | − 0,232 | $\Sigma_2$ | + 0,150 | $\Sigma'_2$ | − 0,133 |
| $\Sigma_1 - \Sigma'_1$ | − 0,235 | | | $\Sigma_2 - \Sigma'_2$ | + 0,283 | | |
| $a_3 b_1 c_3$ | + 0,165 | $a_1 b_3 c_2$ | − 0,109 | $b_1 c_3$ | − 0,222 | $b_1 c_2$ | − 0,323 |
| $a_2 b_3 c_1$ | + 0,025 | $a_2 b_1 c_3$ | + 0,043 | $b_2 c_1$ | − 0,038 | $b_2 c_3$ | + 0,045 |
| $a_1 b_2 c_3$ | − 0,022 | $a_3 b_2 c_1$ | + 0,020 | $b_3 c_2$ | + 0,198 | $b_3 c_1$ | − 0,115 |
| $\Sigma_3$ | + 0,168 | $\Sigma'_3$ | − 0,046 | $\Sigma$ | − 0,062 | $\Sigma'$ | − 0,393 |
| $\Sigma_3 - \Sigma'_3$ | + 0,214 | | | $\Sigma - \Sigma'$ | + 0,331 | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta X = \dfrac{\Sigma_1 - \Sigma'_1}{\Sigma - \Sigma'}$ | − 0,71 | $\Delta Y = \dfrac{\Sigma_2 - \Sigma'_2}{\Sigma - \Sigma'}$ | + 0,85 | $\Delta H = \dfrac{\Sigma_3 - \Sigma'_3}{\Sigma - \Sigma'}$ | + 0,647 |
| X | − 30 867,71 | Y | 238 402,85 | H | 242,247 |

U prvoj aproksimaciji dobili smo slijedeće koordinate:

$Y = 238\,402{,}85 \qquad X = -30\,867{,}71 \qquad H = 242{,}647$ m

Uvrstivši sada ponovno dobivenu vrijednost za H u gornji formular i sračunavši slobodne članove $a_1$, $a_2$ i $a_3$ dobivamo za njih ove vrijednosti:

$$a_1 = +\,0{,}097$$
$$a_2 = +\,0{,}453$$
$$a_3 = +\,0{,}134$$

Koeficiente b i c nećemo više računati, već ih prepišemo iz formulara i dobivamo jednadžbe:

$$0{,}097 + 0{,}537\,\varDelta X + 0{,}349\,\varDelta Y + \varDelta H = 0$$
$$0{,}453 - 0{,}110\,\varDelta X - 0{,}601\,\varDelta Y + \varDelta H = 0$$
$$0{,}134 - 0{,}329\,\varDelta X - 0{,}413\,\varDelta Y + \varDelta H = 0$$

Rješenje ovih jednadžbi daje:

$\varDelta X = 0{,}00 \qquad \varDelta Y = +\,0{,}01 \qquad \varDelta H = -0{,}015$

Korigiravši sa ovim naše prve rezultate imamo konačno:

$Y = 238\,402{,}86 \qquad X = -30\,867{,}71 \qquad H = 242{,}632$ m

K o n t r o l a obzirom na točku A (⊙ 1158):

$$X = -\ 30\,712{,}51 - \sqrt{\left(\frac{118{,}122}{0{,}64073}\right)^2 - 99{,}49^2} = -\,30\,867{,}71$$

$$Y = -\ 238\,502{,}35 - \sqrt{\left(\frac{118{,}122}{0{,}64078}\right)^2 - 155{,}20^2} = 238\,402{,}86$$

$$H = 124{,}510 + 0{,}64073\,\sqrt{155{,}20^2 + 99{,}49^2} = 242{,}634$$

Iste bi vrijednosti dobili kad bi proveli kontrolu obzirom na točku B ili C.

Triangulacijom grada Zagreba dobivene su slijedeće koordinate 356:

$Y = 238\,402{,}87 \qquad X = -30\,867{,}72$

Vidimo dakle da smo dobili dobar rezultat.