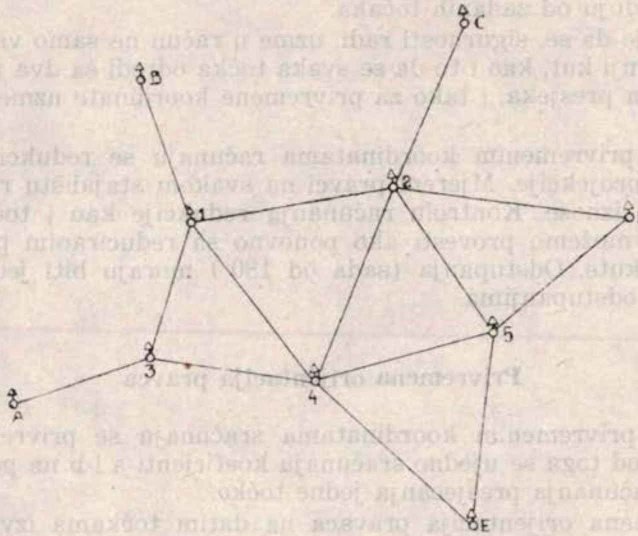
Dr. Ing. Nikola Čubranić — Zagreb

Izjednačenje više točaka

— načinom posrednih mjerenja —

U geodetskoj praksi na triangulacionim radovima događa se često, da treba odrediti, odnosno izjednačiti, više točaka odjednom. Najčešći je to slučaj kod mreže drugog reda, kad se veća praznina između susjednih točaka I. reda popunjuje direktno mrežom II. reda. No nastaje ponekad i potreba, da se naročito velike praznine između točaka I. reda ili prvoklasnih lanaca ispunjuju i nadalje mrežom I. reda.



Slika 1.

Slika 1 prikazuje kako se praznina između točaka ABCDE popunjuje sa točkama 1, 2, 3, 4, 5.

Da bi izbjegli razne fiksne, a eventualno i poligonalne uvjete, koje bi morali mimo ostalih bezuvjetno postaviti kad bi htjeli ove slučajeve izjednačivati po uvjetnim opažanjima, to se izjednačenje ovakvih zadataka provodi redovito po načinu posrednih opažanja i na ravnini projekcije.

U našoj literaturi nemamo nikakvog prikaza o takovom načinu izjednačenja, pa sam zamoljen da bi dao takav prikaz u »Geodetskom listu«.

Provjeravanje zadataka i račun privremenih koordinata

Kod izjednačenja jedne ili dvije točke presjecanjem, podatke mjerenja provjeravamo prije izjednačenja prema veličinama slobodnih članova. Slobodni članovi odnose se na neke izabrane — privremene — koordinate tražene točke. Kod izjednačenja više točaka ovaj način provjere podataka mogao bi zatajiti, pa je najbolje provjeru podataka kao prvotni posao izvršiti zatvaranjem trokutova bilo na sferi, bilo na ravnini projekcije.

Najzgodnije će bit, da se podaci provjere na sferi tj. izvrši zatvaranje trokutova obzirom na veličinu $180^\circ + \varepsilon$ i sačine nesuglasice (odstupanja u trokutu). U koliko su odstupanja prevelika za odnosni red mreže, treba sumnjive podatke bolje ispitati (centriranja i redukcije) i ukloniti eventualne pogreške. U koliko se pogreške ne pronađu, treba pravce koji su očito pogrešni izbaciti, a u koliko su neophodno potrebni za računanje, treba ta mjerenja ponoviti.

Daljnji posao bio bi računanje privremenih koordinata za tražene točke. Privremene koordinate računaju se jednostavnim (bez izravnanja) presjecanjem — točku po točku. Svakako najprije one točke koje se direktno određuju od zadanih točaka.

Dobro je da se, sigurnosti radi, uzme u račun ne samo vanjski pravci već i unutarnji kut, kao i to da se svaka točka odredi sa dva po mogućnosti nezavisna presjeka, i tako za privremene koordinate uzme aritmetička sredina.

Prema privremenim koordinatama računaju se redukcije smjerova za ravninu projekcije. Mjereni pravci na svakom stajalištu reduciraju se za dobivene iznose. Kontrolu računanja redukcije kao i točnost samog reduciranja možemo provesti ako ponovno sa reduciranim pravcima zatvorimo trokute. Odstupanja (sada od 180°) moraju biti jednaka ranije sračunatim odstupanjima.

Privremena orijentacija pravca

Prema privremenim koordinatama sračunaju se privremeni kutovi smjera n. Kod toga se ujedno sračunaju koeficienti a i b na poznati način, kao i kod računanja presjecanja jedne točke.

Privremena orijentacija pravaca na datim točkama izvrši se samo obzirom na date kutove smjera ν (obzirom na kutove smjera prema datim točkama), a sa traženih točaka obzirom na sve privremene kutove smjera na toj točki.

Taj rad prikazan je u formularu »Privremena orijentacija«. Na datim točkama podcrtani smjerovi u rubrici kutovi smjera su dati — definitivni smjerovi ν. Razlika kuta smjera i orijentiranog smjera daje veličinu l — slobodni član.

Veličine l, pošto smo uveli privremene koordinate, predstavljaju sad mjerene veličine umjesto orijentiranih smjerova. Privremenu orijentaciju i vršimo z ato, da dobijemo te veličine l. Veličine l možemo dobiti također ako od pojedine vrijednosti orijentacionog kuta odbijemo srednju vrijednost orijentacije na toj stanici, kako je to vidljivo na stajalištu Rog i kako je dalje provedeno na stajalištima Sesvete i Zagreb.

Veličine l pokazuju koliko privremene koordinate odstupaju od izvršenih mjerenja (orjentiranih kutova smjera), a izjednačenjem tražimo korekcije privremenih koordinata da se što bolje zadovolje mjerene veličine.

Jednadžbe pogrešaka

Svako mjerenje izvršeno je sa nekom pogreškom, pa će svaki izmjereni pravac φ zadržavati u sebi neku pogrešku v.

Da bi koristili način »posrednih mjerenja« moramo postaviti da je opažana veličina funkcija koordinata tražene točke (odnosno koordinate su funkcije opažane veličine).

Općenito će biti:

$$\varphi = f\,(x, y)$$

gdje je φ neki opažani smjer zavisan od traženih koordinata x i y.

Uvrstivši privremene koordinate x^0 i y^0 biti će:

$$\varphi = f\,(x^0 + \Delta x,\ y^0 + \Delta y)$$

Smatrajući sad, da je mjerena veličina φ podvrgnuta nekoj pogreški v tj. $\nu = \varphi + v$, pa razvivši desnu stranu u Taylor-ov red i zadržavši samo prve potencije imamo konačni smjer ν:

$$\nu = \varphi + v = f\,(x^0, y^0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

$$\nu = \varphi + v = n + a\,\Delta x + b\,\Delta y = n + dn \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

odnosno jednadžbe pogrešaka imat će oblik:

$$v = a\,\Delta x + b\,\Delta y + l \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gdje je

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \qquad b = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

$$l = f\,(x^0, y^0) - \varphi = n - \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ovisnost koordinata i mjerenog pravca (u našem slučaju orijentiranog kuta smjera) možemo izraziti:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - y_a}{x - x_a}$$

odnosno funkcija f glasi:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y_a}{x - x_a} = f\,(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gdje su y i x koordinate tražene točke, a y_a i x_a koordinate date točke.

Veličinu n prema izrazu (2) dobit ćemo očito kad u izraz (3) umjesto nepoznatog y i x uvrstimo određene približne veličine y^0 i x^0; tj. dobit ćemo određeni privremeni kut smjera n kao

$$\operatorname{tg} n = \frac{y^0 - y_a}{x^0 - x_a} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Veličina l u izrazu (1) je kako smo ranije rekli razlika n — φ (n sračunato po 4, a φ je mjereno).

Koeficienti a i b su brojne vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije 3, odnosno

$$a = -\frac{\varrho \sin\varphi}{s} = -\frac{y - y_a}{s^2} \cdot \varrho$$

$$b = \frac{\varrho \cos\varphi}{s} = \frac{x - x_a}{s^2} \cdot \varrho \qquad \ldots (5)$$

Ove koeficiente u računskim formularima dobivamo na dovoljno poznate načine.

Očito je da jednadžbe 1 i 2 vrijede ako su koordinate y_a i x_a čvrste. No ako su promjenljive obje krajnje točke, bit će opažana veličina funkcija obojih koordinata, ako tražene koordinate označimo x_1, y_1, i x_2, y_2:

$$\varphi = f\,(x_1,\, y_1,\, x_2,\, y_2)$$

odnosno

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \ldots (6)$$

Ovu funkciju moramo sad razviti u red po svim 4 promjenljivim. Očito je, da će izrazu 6 odgovarati sad jednadžba pogrešaka:

$$v = a\,\Delta x_2 + b\,\Delta y_2 + c\,\Delta x_1 + d\,\Delta y_1 + l$$

ili opet $\quad v = dn + l \qquad \ldots 7$

gdje je:

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \quad b = \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)_0 \quad c = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \quad d = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_0$$

$$f\,(x_1^0\, y_1^0\, x_2^0\, y_2^0) = \operatorname{tg} n = \frac{y_2^0 - y_1^0}{x_2^0 - x_1^0} \qquad \ldots (8)$$

$$l = n - \varphi$$

Sravnivši pak izraz 6 i 3 možemo zaključiti da je:

$$c = -a \qquad d = -b \qquad \ldots (9)$$

Δx_1, Δy_1, te Δx_2, Δy_2 su nepoznanice, odnosno tražene veličine koje treba dodati privremenim koordinatama točke 1 odnosno točke 2.

Slobodni članovi l sadrže u sebi i jednu nepoznanicu, a to je popravka orijentacije na svakom stajalištu. Svi l nekog stajališta sadržavati će istu popravku orijentacije do.

Kod naših formulara za presejcanje jedne ili dvije točke uzimamo u obzir popravku orijentacije samo za unutarnje pravce, odnosno iz računa je eliminiramo reduciranjem koeficienata a i b te slobodnih članova l za unutarnje pravce. U stvari međutim i l-ovi sa datih stajališta zadržavat će u sebi popravku (pogrešku) orijentacije. (Predstavimo si da nije svejedno da li vanjske pravce orijentiramo na jednu, dvije ili više zdanih točaka.) No mi ovaj momenat kod presjecanja jedne ili dvije točke zanemarujemo.

Vratimo se ponovno na izraz a, da je nakon izravnanja — konačni kut smjera

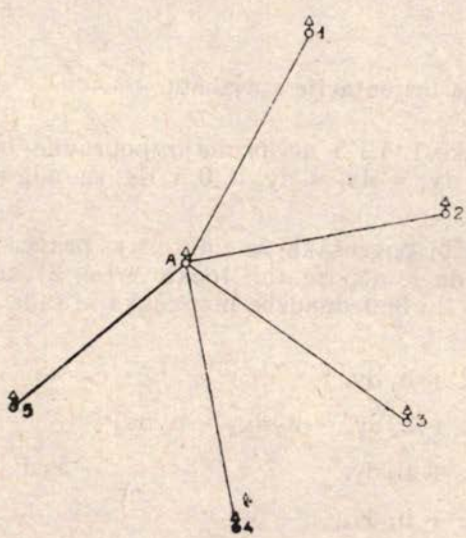
$$\nu = \varphi + v \qquad \ldots \ldots \text{a}$$

kod toga φ dobivamo računom kao $0 + \alpha$ tj. orijentacija + mjereni pravac. Orijentacija sadrži pogrešku orijentacije do a mjereni pravac pogrešku mjerenja v, pa će pravilan odnos glasiti:

$$\nu = 0 + do + \alpha + v = do + \varphi + v \qquad \ldots \ldots 10$$

Neka su prema sl. 2 točke A, 1, 4, 5 zadate, a 2 i 3 tražene točke, te neka su izmjereni pravci sa točke A na 1, 2, 3, 4, 5, to ćemo obzirom na izraz 10 moći postaviti slijedeće odnose:

$$\begin{aligned}
\nu_a^1 &= O + do + \alpha_1 + v_1 \\
\nu_a^2 &= O + do + \alpha_2 + v_2 \\
\nu_a^3 &= O + do + \alpha_3 + v_3 \\
\nu_a^4 &= O + do + \alpha_4 + v_4 \\
\nu_a^5 &= O + do + \alpha_5 + v_5
\end{aligned} \qquad \ldots (11)$$



Slika 2.

Kako je $0 + \alpha_i = \varphi_i$ (iz orijentacije pravaca), to ćemo jednadžbe pogrešaka moći pisati:

$$\begin{aligned} v_1 &= -do + \nu_a^1 - \varphi_1 \\ v_2 &= -do + \nu_a^2 - \varphi_2 \\ v_3 &= -do + \nu_a^3 - \varphi_3 \\ v_4 &= -do + \nu_a^4 - \varphi_4 \\ v_5 &= -do + \nu_a^5 - \varphi_5 \end{aligned} \qquad \ldots (12)$$

Tu su ν_a^2 i ν_a^3 još nepoznate veličine. Iste ćemo izraziti pomoću privremenih kutova smjera, odnosno pomoću izraza b, tj. uvrstit ćemo da je $\nu_a^2 = n_a^2 + dn_2$, $\nu_a^3 = n_a^3 + dn_3$, U privremenoj orijentaciji imamo sračunate veličine
$\nu_a^1 - \varphi_1 = l_1$, $n_a^2 - \varphi_2 = l_2$, $n_a^3 - \varphi_3 = l_3$, $\nu_a^4 - \varphi_4 = l_4$, $\nu_a^5 - \varphi_5 = l_5$, pa uvrstimo iste u jednadžbu pogrešaka i imajući (prema izrazu b) na umu da je (izraz b):

$$\begin{aligned} dn_2 &= a_2\, dx_2 + b_2\, dy_2 \\ dn_3 &= a_3\, dx_3 + b_3\, dy_3 \end{aligned}$$

dobit ćemo jednadžbe pogrešaka slijedećeg oblika:

$$\begin{aligned} v_1 &= -do && && + l_1 \\ v_2 &= -do + a_2\, dx_2 + b_2\, dy_2 && && + l_2 \\ v_3 &= -do && + a_3\, dx_3 + b_3\, dy_3 && + l_3 \\ v_4 &= -do && && + l_4 \\ v_5 &= -do && && + l_5 \end{aligned} \qquad \ldots 13$$

gdje je do popravka orijentacije stajališta.

Pošto date točke 1, 4 i 5 ne primaju popravke očito je da će biti $dx_1 = dy_1 = dx_4 = dy_4 = dx_5 = dy_5 = 0$ i da su odgovarajući članovi u izrazima 13 otpali.

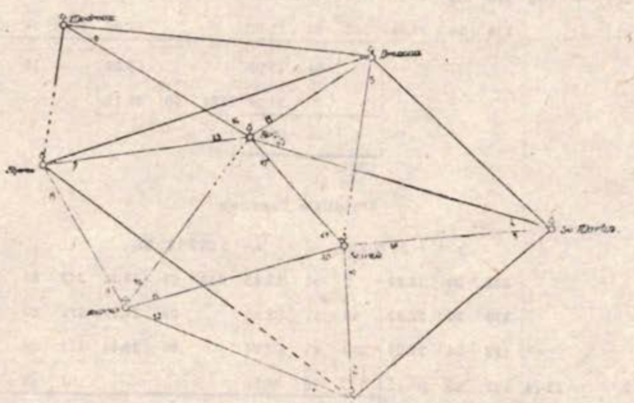
Shemu jednadžbi pogrešaka za unutarnje pravce dobit ćemo jednostavno smatrajući da je nepoznata i točka A (sl. 2) koja veže date točke 1, 4 i 5 i nepoznate 2 i 3. Jednadžbe pogrešaka bi tada očito (vidi izraze 7 i 9) glasile:

$$\begin{aligned} v_1 &= -do + a_1\, dx_a + b_1\, dy_a && && + l_1 \\ v_2 &= -do + a_2\, dx_a + b_2\, dy_a - a_2\, dx_2 - b_2\, dy_2 && && + l_2 \\ v_3 &= -do + a_3\, dx_a + b_3\, dy_a && - a_3\, dx_3 - b_3\, dy_3 && + l_3 \\ v_4 &= -do + a_4\, dx_a + b_4\, dy_a && && + l_4 \\ v_5 &= -do + a_5\, dx_a + b_5\, dy_a && && + l_5 \end{aligned} \qquad (14)$$

gdje veličine $l_1, l_2 \dots l_5$ imademo u privremenoj orijentaciji kao razlike privremenog kuta smjera i orijentiranog smjera tj. $n_1 - \varphi_1$; $n_2 - \varphi_2$; $n_3 - \varphi_3$ i t. d.

Koeficiente a i b po veličini i predznaku dobit ćemo iz izraza 5 ili na drugi poznat način računom. Kontrolu predznaka najbolje je provesti po vanjskim pravcima. Vanjski i unutarnji pravac za istu nepoznanicu dx i dy imadu iste koeficiente po veličini i predznaku. Za Gauss-Krüger-ovu projekciju vrijedi dalje: za linije istočno od tražene točke a ima predznak +, za linije zapadno od tražene točke a ima predznak —; ako su linije južno od tražene točke b ima predznak +, a za sjeverne linije b ima predznak —. Radi preglednosti u primjeru upisani su koeficienti a i b u posebnu rubriku formulara privremene orijentacije. Koeficienti na liniji odnose se na promjenu koordinate vizurne točke, a iznad linije (koeficienti u zagradi) odnose se na promjenu koordinate stajališta.

Prema sl. 3 date su koordinate točaka: Sljeme, Modrovec, Drenova, Martin i Gorica. Traže se točke: Rog, Sesvete i Zagreb. Ucrtani su svi mjereni pravci, a oni na tražene točke i numerirani od 1 do 21. Na poznati način sračunate su privremene kordinate traženih točaka. Prema privremenim koordinatama sračunati su privremeni kutovi smjera i koe-



Slika 3.

ficienti a, b. Prelazimo na sastav privremene orijentacije pravaca po stajalištima; najprije stajališta datih točaka, pa stajališta traženih točaka. Tu u rubriku »opažani pravac« upisujemo opažane pravce (svedene na ravninu projekcije). U rubriku »kutovi smjera« upisujemo na datim stajalištima crveno (podcrtano) definitivne kutove smjera ν (između zadanih točaka), a crno (nepodcrtano) kutove smjera koji odgovaraju privremenim koordinatama. Obračun privremene orijentacije u primjeru dovoljno je jasan. U posljednjoj rubrici dobiveni su slobodni članovi l. Sa strane radi preglednosti numerisani su i pravci prema numeraciji na slici

Vizura	Koeficienti		Kut smjera ν ili n			Opažani pravac α			Orjentacija $\nu-\alpha$ srednja vrijednost O			Orjentirani kut smjera $\varphi=\alpha+O$			1		Brojevi pravaca
	a	b	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	+ "	− "	
A) DATE TOČKE																	
Stajalište V. Gorica																	
$\overline{y}=+84\,168{,}12_3$ $\overline{x}=5\,064\,504{,}59_2$																	
Zagreb	+ 8.87	+ 12.64	324	56	43.96	351	43	50.85				324	56	44.32		0.36	1
Sesvete	− 3.11	+ 15.84	11	06	08.76	37	53	17.61				11	06	11.08		2.32	2
Sv. Martin			44	50	08.24	71	37	14.77	333	12	53.47	44	50	08.24	0	0	
							14	23.23	333	12	53.47		53	03.64	0	0	
							38	40.41									
							53	03.64									
Stajalište Sv. Martin																	
$\overline{y}=+96\,324{,}00_6$ $\overline{x}=5\,076\,730{,}42_7$																	
V. Gorica			224	50	08.24	0	00	02.86	224	50	05.38	224	50	09.05		0.81	
Sesvete	+ 21.25	+ 0.67	271	50	43.20	47	00	37.53				271	50	43.72		0.52	3
Rog	+ 8.62	+ 7.40	310	39	47.28	85	49	36.61				310	39	42.80	4.48		4
Drenova			339	54	32.08	115	04	26.00			07.00	339	54	32.27	0.81		
							54	43.08			12.38		15	07.84			
							20	24.76	224	50	06.19						
							15	07.84									
Stajalište Drenova																	
$\overline{y}=+90\,802{,}98_4$ $\overline{x}=5\,093\,191{,}81_1$																	
Sljeme			243	00	18.84	3	50	52.48	239	09	23.36	243	00	20.80		1.96	
Modrovec			279	20	32.02	40	11	02.85		09	29.17	279	20	31.17	0.85		
Sv. Martin			159	54	33.08	280	45	03.64		09	29.44	159	54	31.96	1.12		
Sesvete	+ 2.77	− 12.14	192	49	06.12	313	39	38.66				192	49	06.98		0.86	5
							26	37.63			84.97		04	30.91	1.97	1.96	
							37	53.28	239	09	28.32						
							04	30.91									
Stajalište Modrovec																	
$\overline{y}=+75\,942{,}79_7$ $\overline{x}=5\,095\,554{,}25_4$																	
Sljeme			190	46	34.65	359	58	41.92	190	47	52.73	190	46	35.37		0.72	
Drenova			99	20	32.02	268	32	37.85		47	54.17	99	20	31.30	0.72		
Rog	− 14.73	− 15.58	136	37	10.73	305	49	16.69				136	37	10.14	0.59		6
							20	36.46			106.90		44	16.81	0.72	0.72	
							23	40.35	190	47	53.45						
							44	16.81									

Vizura	Koeficienti		Kut smjera ν ili n			Opažani pravac α			Orjentacija $\nu - \alpha$ srednja vrijednost 0			Orjentirani kut smjera $\varphi = \alpha + 0$			1		Brojevi pravaca
	a	b	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	+ "	− "	
Stajalište Sljeme																	
$\overline{y} = + 73\,903{,}06_1$ $\overline{x} = 5\,084\,837{,}52_6$																	
Zagreb	− 5.63	−20.41	164	35	10.12	0	00	22.04				164	35	05.38	4.74		8
Drenova			63	00	18.84	258	25	37.03	164	34	41.81	63	08	20.37		1.53	
Rog	−20.12	+ 8.67	66	41	39.68	262	07	00.74				66	41	44.08		4.40	7
V. Gorica			153	12	47.22	348	38	02.34		34	44.88	153	12	45.68	1.54		
							11	02.15			86.69		29	55.51	1.54	1.53	
							18	53.36	164	34	43.34						
							29	55.51									
B) TRAŽENE TOČKE																	
Stajalište Rog																	
Privremene koordinate $\overline{y} = 82\,590{,}02_4$ $\overline{x} = 5\,088\,362{,}50_3$																	
Sljeme	(−20.12 —	+ 8.67) —	246	41	39.68	41	54	47.93	204	46	51.75	246	41	45.34		5.66	13
Modrovec	(−14.73 —	−15.58) —	316	37	10.73	111	50	15.31		46	55.42	316	37	12.72		1.99	14
Drenova	(+19.61 —	−11.71) —	59	09	30.52	214	22	30.33		46	60.19	59	09	27.74	2.78		15
Sv. Martin	(+ 8.62 —	+ 7.40) —	130	39	47.28	285	52	48.98		46	58.30	130	39	46.39	0.89		16
Šesvete	(+ 5.64 − 5.64	+15.91) −15,91	160	30	12.62	315	43	11.22		46	61.40	160	30	08.63	3.99		17
					20.83		43	33.77			287.06		38	20.82	7.66	7.65	
							54	47.07	204	46	57.41						
							38	20.82									
Stajalište Sesvete																	
Privremene koordinate $\overline{y} = 86\,628{,}57_6$ $\overline{x} = 5\,077\,042{,}79_5$																	
Zagreb	(−19.86 +19.86	+ 3.13) − 3.13	261	02	02.40	0	00	00.34	261	02	02.06				0.09		20
Rog	(− 5.64 + 5.64	−15.91) +15.91	340	30	12.62	79	28	07.51		02	05.11				3.14		21
Sv. Martin	(+21.25 —	+ 0.67) —	91	50	43.20	190	48	41.20		02	02.00				0.03		18
V. Gorica	(− 3.11 —	+15.84) —	191	06	08.76	290	04	10.06		01	58.70					3.27	19
				29	06.98		20	59.11			07.87				3.26	3.27	
									261	02	01.97						
Stajalište Zagreb																	
Privremene koordinate $\overline{y} = 76\,493{,}01_3$ $\overline{x} = 5\,075\,443{,}6'_3$																	
Sesvete	(+19.86 −19.76	− 3.13) + 3.13	81	02	02.40	38	13	27.48	42	48	34,02				1.72		11
V. Gorica	(+ 8.87 —	+12.64) —	144	56	43.96	102	08	12.58		48	31.38					1.82	12
Sljeme	(− 5.63 —	−20.41) —	344	35	10.12	301	46	35.57		48	34.55				1.35		9
Rog	(+ 5.98 − 5.98	−12.96) +12.96	24	46	58.39	341	58	26.45		48	31.94					1.26	10
				20	54.87		06	42.08			132.79				3.07	3.08	
									42	48	33.20						

Sastav jednadžbi pogrešaka

Jednadžbe pogrešaka možemo sastaviti na jedan od tri načina, koje ćemo u nastavku prikazati. Jednadžbe pogrešaka sastavljamo prema skici i privremenoj orijentaciji. Koeficiente a i b uzimamo neposredno iz računanja. Mi ova računanja ne iznosimo, smatrajući da je to dovoljno poznato, a da bi za naš primjer imali pregledno te veličine upisali smo ih u posebnu rubriku »privremene orijentacije«.

Radi jednostavnosti označimo nepoznanice dx i dy točke Rog sa I. i II, dx i dy točke Sesvete sa III i IV i nepoznanice dx i dy Zagreba sa V i VI. Nadalje nepoznanice-popravke orijentacije za stajalište Rog, Sesvete, Zagreb sa do_r, do_s, do_z, a nepoznanice-popravke orijentacije na datim točkama Gorica, Martin, Drenova, Modrovec, Sljeme redom sa do_1, do_2, do_3, do_4 i do_5.

I. način

Kod ovog načina pridržavat ćemo se u svemu što je do sad rečeno, pa ćemo jednadžbe pogrešaka pisati odmah u slijedećoj tablici I. U toj tablici ispisane su jednadžbe pogrešaka samo za dva dana i dva tražena stajališta, a čitave bi lako sastavili ispisavši jednadžbe i za ostale pravce.

Tako za svako dano i traženo stajalište formiramo jednadžbe pogrešaka. Normalne jednadžbe će se zatim formirati za sve jednadžbe pogrešaka, običnim postupkom i dalje vršiti eliminacija nepoznanica.

Mnogo jednostavnije biti će, da se formiraju normalne jednadžbe za svako stajalište, zatim se u svakom sistemu normalnih jednadžbi eliminira nepoznanica za orijentaciju tog stajališta, iza čega se tako reducirani sistemi normalnih jednadžbi spoje u jedan sistem.

II. način

Ovaj se način temelji na Schreiberovom načinu eliminacije nepoznanica. Sastoji se u slijedećem: Jednadžbe pogrešaka pišu se bez nepoznanice, koja se želi eliminirati iz normalnih jednadžbi i svaka sa težinom 1. Ovima se doda fiktivna jednadžba u obliku normalne jednadžbe, koja odgovara nepoznanici što ju eliminiramo, opet bez te nepoznanice. Ova fiktivna jednadžba ima za težinu negativnu recipročnu vrijednost kvadratnog člana te normalne jednadžbe. Tako na primjer imamo slijedeće jednadžbe pogrešaka:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 \\
v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
v_n &= a_n x + b_n y + c_n z + l_n \qquad \dots (15)
\end{aligned}
$$

Umjesto gornjeg sistema jednadžbi pogrešaka možemo pisati:

$$
\begin{array}{lr}
 & p \\
v'_1 = b_1 y + c_1 z + l_1 \qquad \ldots & 1 \\
v'_2 = b_2 y + c_2 z + l_2 \qquad \ldots & 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \quad (16) \\
v'_n = b_n y + c_n z + l_n \qquad \ldots & 1 \\
v' = [ab]\, y + [ac]\, z + [al] \qquad . & -\dfrac{1}{[aa]}
\end{array}
$$

Tablica I.

v	do_1	do_2	do_3	do_4	do_5	do_R	do_S	do_Z	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	l
Stajalište V. Gorica															
v_1^M	− 1														0
v_1	− 1												+ 8.87	+12.64	− 0.36
v_2	− 1										− 3.11	+15.84			− 2.32
Stajalište Sv. Martin															
v_0^G		− 1													− 0.81
v_3		− 1									+21.25	+ 0.67			− 0.52
v_4		− 1							+ 8.62	+ 7.40					+ 4 48
v_0		− 1													+ 0 81
i tako za stajališta: Drenova, Modrovec, Sljeme															
Stajalište Rog															
v_{13}						− 1			−20.12	+ 8.67					− 5.66
v_{14}						− 1			−14.73	−15.58					− 1.99
v_{15}						− 1			+19.61	−11.71					+ 2.78
v_{16}						− 1			+ 8.62	+ 7.40					+ 0.89
v_{17}						− 1			+ 5.64	+15.91	− 5.64	−15.91			+ 3.99
Stajalište Sesvete															
v_{18}							− 1				+21.25	+ 0.67			+ 0.03
v_{19}							− 1				− 3.11	+15 84			− 3.27
v_{20}							− 1				−19.86	+ 3.13	+19.86	− 3.13	+ 0.09
v_{21}							− 1		+ 5.64	+15.91	− 5.64	−15.91			+ 3.14
i tako još za stajalište Zagreb.															

Sastavimo li naime normalne jednadžbe na temelju jednadžbi 15 i eliminiramo nepoznanicu x dobit ćemo dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice koje će biti potpuno indentične normalnim jednadžbama koje odgovaraju sistemu 16.

Ovo pravilo možemo vrlo lako koristiti u cilju eliminiranja nepoznanica do, pošto svaki do ulazi samo u jednadžbe sa tog stajališta. Očito je da možemo odmah zanemariti nepoznanice do, a također i sve jednadžbe pogrešaka sa datih točaka na date. Zahvaljujući dalje tome što su koeficienti uz do jedinice (kod eliminacije je potpuno isti rezultat da li su ti koeficienti —1 ili +1), to će koefcienti i slobodni član fiktivne jednadžbe biti jednaki sumi odgovarajućih koeficienata odnosno sumi slobodnih članova. Težina te jednadžbe biti će $-\frac{1}{n}$, gdje je n broj svih pravaca na tom stajalištu. U koliko sa datog stajališta postoji samo jedan pravac na tražene točke tj. postoji samo jedna jednadžba, možemo pisati reducirane (bez do) jednadžbe:

$$v'_n = a\,dx + b\,dy + l \qquad \ldots \qquad \overset{p}{1}$$

$$\text{fiktivna:} \quad (v') = a\,dx + b\,dy + l \qquad \ldots -\frac{1}{n} \qquad \text{gdje je } n = s + 1 \qquad (17)$$

n je broj svih pravaca, a s je broj pravaca na čvrste točke. Umjesto jednadžbi 17 možemo odmah pisati ekvivalentnu jednadžbu

$$(v_n = a\,dx + b\,dy + l \qquad \text{sa težinom } \frac{s}{s+1} \qquad \ldots (18)$$

Obzirom na ovo sastavljamo iz podataka privremene orijentacije odmah reducirane jednadžbe pogrešaka, kako je to prikazano u tablici II.

Prema ovim jednadžbama sastavimo normalne jednadžbe iz kojih postepenom eliminacijom sračunavamo nepoznanice dx i dy za sve tražene točke. Dodavši ove vrijednosti privremenim koordinatama dobijemo definitivne koordinate. Iz definitivnih koordinata sračunavamo konačne kutove smjera i izvršimo ponovnu orijentaciju pravaca obzirom na sve mjerene pravce (i kod datih stajališta). Ovo obavljamo u formularu »Pregled rezultata«. Razlike konačnih kutova smjera i orijentiranog kuta smjera dat će pogreške odnosno popravke mjerenja v.

Za kontrolu možemo te pogreške računati i iz jednadžbi pogrešaka tablice II uvrstivši u kolone I, II, ... VI dobivene vrijednosti nepoznanica. Na taj način dobit ćemo zapravo reducirane vrijednosti za popravke koje smo označili sa v'. Da bi dobili prave veličine popravaka v moramo tim vrijednostima po odgovarajućim stajalištima dodat popravku orijentacije — do za to stajalište. Popravku do dobivamo za svako stajalište kao razliku definitivnog orijentacionog kuta i privremenog (iz privremene orijentacije) orijentacionog kuta.

III. način

Temelji se na primjeni Schreiberovih pravila za sastav reduciranih jednadžbi pogrešaka.

Pogledom na tablice II vidimo da su mnoge jednadžbe indentične kao na pr. v'_1 i v'_{12}; v'_4 i v'_{16} itd., odnosno da se razlikuju samo po veličini slobodnih članova. Da se smanji broj tih jednadžbi, a prema tome i smanji

Tablica II.

v'	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	l	p
v'_1					+ 8.87	+ 12.64	− 0.36	1
v'_2			− 3.11	+ 15.84			− 2.32	1
v_0			− 3.11	+ 15.84	+ 8.87	+ 12.64	− 2.68	$-\frac{1}{3}$
v'_3			+ 21.25	+ 0.67			− 0.52	1
v'_4	+ 8.62	+ 7.40					+ 4.48	1
v_0	+ 8.62	+ 7.40	+ 21.25	+ 0.67			+ 3.96	$-\frac{1}{4}$
v'_5			+ 2.77	− 12.14			− 0.86	$\frac{3}{4}$
v'_6	− 14.73	− 15.58					+ 0.59	$\frac{2}{3}$
v'_7	− 20.12	+ 8.67					− 4.40	1
v'_8					− 5.63	− 20.41	+ 4.74	1
v_0	− 20.12	+ 8.67			− 5.63	− 20.41	+ 0.34	$-\frac{1}{4}$
v'_9					− 5.63	− 20.41	+ 1.35	1
v'_{10}	− 5.98	+ 12.96			+ 5.98	− 12.96	− 1.26	1
v'_{11}			− 19.86	+ 3.13	+ 19.86	− 3.13	+ 1.72	1
v'_{12}					+ 8.87	+ 12.64	− 1.82	1
v_0	− 5.98	+ 12.96	− 19.86	+ 3.13	+ 29.08	− 23.86	− 0.01	$-\frac{1}{4}$
v'_{13}	− 20.12	+ 8.67					− 5.66	1
v'_{14}	− 14.73	− 15.58					− 1.99	1
v'_{15}	+ 19.61	− 11.71					+ 2.78	1
v'_{16}	+ 8.62	+ 7.40					+ 0.89	1
v'_{17}	+ 5.64	+ 15.91	− 5.64	− 15.91			+ 3.99	1
v_0	− 0.98	+ 4.69	− 5.64	− 15.91			+ 0.01	$-\frac{1}{5}$
v'_{18}			+ 21.25	+ 0.67			+ 0.03	1
v'_{19}			− 3.11	+ 15.84			− 3.27	1
v'_{20}			− 19.86	+ 3.13	+ 19.86	− 3.13	+ 0.09	1
v'_{21}	+ 5.64	+ 15.91	− 5.64	− 15.91			+ 3.13	1
v_0	+ 5.64	+ 15.91	− 7.36	+ 3.73	+ 19.86	− 3.13	− 0.01	$-\frac{1}{4}$

posao oko sastava normalnih jednadžbi dao je Schreiber pravila kako treba skraćeno pisati reducirane jednadžbe pogrešaka da budu ekvivalentne zadanim jednadžbama pogrešaka.

Mi ćemo ovdje ta pravila dati u definitivnom obliku:

P r a v i l o 1.: Svaka dva suprotna pravca 1 i 2 daju reduciranu jednadžbu

$$(v) = v_1 + v_2 \qquad \text{težine } \frac{1}{2}$$

sa izuzetkom kad je 1 ili 2 jedini neodređeni pravac sa neke zadate točke. U posljednjem slučaju važi (neka je 2 jedini neodređeni pravac) p r a v i l o 1^a:

$$(v) = 2\,(v_1) + v_2 \qquad \text{težine } \frac{1}{6}$$

P r a v i l o 2.: Svaki jednostrani pravac 1 ostaje jednak sam sebi tj.

$$(v) = v_1 \qquad \text{težine } 1$$

sa izuzetkom kad je to jedini neodređeni pravac neke stanice za koji slučaj važi

p r a v i l o 2^a:

$$(v) = v_1 \qquad \text{težine } \frac{1}{2}$$

P r a v i l o 3.: Svaka stanica od n pravaca 1, 2, 3, daje još jednu jednadžbu

$$(v) = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \quad \text{težine } -\frac{1}{n}$$

Na datim točkama u broj n je uključen pravac za orijentaciju (ako je k broj pravaca na novo određene točke, onda je $n = k + 1$).

Ako na datoj točki postoji samo jedan novi neodređeni pravac (pravac na neku od traženih točaka), onda ova jednadžba otpada.

Naš primjer je specijalno izabran, da bi došli do izražaja svi mogući slučajevi Schreiberovih pravila. Samo korišćenje tih pravila jasno se vidi u tablici III (sravnjuj sa slikom 3). Da bi bilo iz tablice lakše vršiti umnoške [paa]itd. poželjno je da se jednadžbe grupiraju po težinama.

Na temelju tablice III sastavimo normalne jednadžbe, a rješenjem istih dobit ćemo koordinatne popravke. Sračunamo definitivne kutove smjera, sastavimo pregled rezultata, u kojem orijentaciju i na datim točkama izvedemo sad po s v i m a pravcima. To će opet razlike konačnih kutova smjera i orijentiranih kutova smjera biti pogreške mjerenja v, Za kontrolu izvršimo računanje $v'_1 + v'_{12}$; $v'_2 + v_{19}$ itd. uvodeći u tablicu

III dobivene vrijednosti nepoznanica. Dodavši ovim sumama popravke orijentacije — do odgovarajućih stajališta (razlika orijentacionog kuta poslije i prije izjednačenja) dobit ćemo $v_1 + v_{12}, v_2 + {}_9$ . . . . što mora u potpunosti biti jednako zbirovima tih istih pogrešaka iz pregleda rezultata.

Upotrebivši Schreiberova pravila možemo sastaviti slijedeće jednadžbe:

Tablica III.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	l	p
$v_1' + v_{11}'$					+ 17.74	+ 25.28	— 2.18	$\frac{1}{2}$
$v_3' + v_{19}'$			— 6.22	+ 31.68			— 5.59	$\frac{1}{2}$
$v_2' + v_{18}'$			+ 42.50	+ 1.34			— 0.49	$\frac{1}{2}$
$v_4' + v_{16}'$	+ 17.24	+ 14.80					+ 5.37	$\frac{1}{2}$
$v_7' + v_{15}'$	— 40.24	+ 17.34					— 10.06	$\frac{1}{2}$
$v_8' + v_9'$					— 11.26	— 40.82	+ 6.09	$\frac{1}{2}$
$v_{11}' + v_{20}'$			— 39.72	+ 6.26	+ 39.72	— 6.26	+ 1.81	$\frac{1}{2}$
$v_{17}' + v_{21}'$	+ 11.28	+ 31.82	— 11.28	— 31.82			+ 7.13	$\frac{1}{2}$
v_5'			+ 2.77	— 12.14			— 0.86	$\frac{1}{2}$
v_{10}'	— 5.98	+ 12.96			+ 5.98	— 12.96	— 1.26	1
v_{15}'	+ 19.61	— 11.71					+ 2.78	1
$v_6' + 2v_{14}'$	— 44.19	— 46.74					— 3.39	$\frac{1}{8}$
$v_1 + v_2$			— 3.11	+ 15.84	+ 8.87	+ 12.64	— 2.68	$-\frac{1}{3}$
$v_3 + v_4$	+ 8.62	+ 7.40	+ 21.25	+ 0.67			+ 3.96	$-\frac{1}{3}$
$v_7 + v_8$	— 20.12	+ 8.67			— 5.63	— 20.41	+ 0.34	$-\frac{1}{3}$
$v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12}$	— 5.98	+ 12.96	— 19.86	+ 3.13	+ 29.08	— 23.86	— 0.01	$-\frac{1}{4}$
$v_{18} + v_{19} + v_{20} + v_{21}$	+ 5.64	+ 15.91	— 7.36	+ 3.73	+ 19.86	— 3.13	— 0.01	$-\frac{1}{4}$
$v_{13} + v_{14} + v_{10} + + v_{16} + v_7$	— 0.98	+ 4.69	— 5.64	— 15.91			+ 0.01	$-\frac{1}{5}$

* *
*

Način I i način II su potpuno strogi ne samo u pogledu rješavanja, nego i u postavljanju zadataka. Tu dolazi do izražaja sva strogost pogleda na unutarnju strukturu i povezanost mjerenja. Način I se u praksi gotovo i ne upotrebljava, jer je njemu ekvivalentan način II mnogo kraći i brži. Način III sadrži također svu strogoću u rješavanju, no kod toga se ne obazire kod datih stajališta, da li je orijentacioni kut određen obzirom na jedan, dva ili više datih smjerova. To svakako ponešto mijenja odnos težina vanjskih pravaca (prema I i II načinu). Schreiber prepostavlja orijentacioni kut kao jedno mjerenje, na koji se vežu pravci na tražene točke. Ovo naziranje bi bilo pravilno u našem primjeru samo za stajalište Goricu, dok za stajalište Martin, Drenovu, Modrovec, Sljeme orijentacioni kut, a po tom i orijentacioni pravci imat će nešto veću težinu nego li pravci 1 i 2. Tako na pr. pravci 5 i 6 ulaze po Schreiberovim pravilima u račun sa težinom $\frac{1}{2}$ dok stvarna težina pravca 5 iznosi $\frac{3}{4}$, a težina pravca 6 iznosi $\frac{2}{3}$.

To su svakako stvari raznih naziranja. Obzirom na ovo tablica III nije potpuno ekvivalentna tablici II, pa ne će niti normalne jednadžbe sastavljene iz tablice III i II potpuno indentične. No razlike mogu biti vrlo malene, tako da riješavajući mrežu II-gog reda po načinu II i po načinu III možemo dobiti razlike u koordinatama u veličini par milimetara. Imajući u vidu točnost mjerenja i praktičnost postupka možemo prihvatiti Schreiberova pravila.

U koliko bi htjeli zadržati svu strogost posmatranja u postavljanju problema, treba zadatak rješavati po načinu II ili preudesiti — u koliko se dadu — Schreiberova pravila. aZ ovu svrhu predložio bi neke promjene u Schreiberovim pravilima, konkretno da pravila u konačnom obliku glase:

Pravilo1.

Svaka dva suprotna pravca 1 i 2 daju reduciranu jednadžbu

$$(v) = v_1 + v_2 \qquad \text{težina } 1/2$$

Pravilo 2.

Svaki jednostrani pravac 1 ostaje jednak sam sebi

$$(v) = v_1 \qquad \text{težina } 1$$

sa izuzetkom, kad je to jedini neodređeni pravac sa neke (date) stanice, za koji slučaj važi

Pravilo 2a

$$(v) = v_1 \qquad \text{težine } \frac{s}{s+1}$$

gdje je s broj čvrstih vizura.

Pravilo 3.

Svaka stanica od k neodređenih pravaca 1, 2, 3 . . . . k daje još jednu jednadžbu

$$(v) = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_k \quad \text{težine} \; -\frac{1}{n}$$

gdje je n broj svih mjerenih pravaca sa tog stajališta. (Na traženim stajalištima biti će $n = k$, a na datim biti će $n = s + k$. Ovdje je s broj čvrstih pravaca). Ako na datoj stanici postoji samo jedan novi pravac i to jednostrani, onda ova jednadba otpada.

Tablica IV.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	l	p
$v_1 + v_{12}$					+ 17.74	+ 25.20	− 2.18	$\frac{1}{2}$
$v_2 + v_{19}$			− 6.22	+ 31.68			− 5.59	$\frac{1}{2}$
$v_3 + v_{18}$			+ 42.50	+ 1.34			− 0.49	$\frac{1}{2}$
$v_4 + v_{16}$	+ 17.24	+ 14.80					+ 5.37	$\frac{1}{2}$
$v_6 + v_{14}$	− 29.46	− 31.16					− 1.40	$\frac{1}{2}$
$v_7 + v_{13}$	− 40.24	+ 17.34					− 10.06	$\frac{1}{2}$
$v_8 + v_9$					− 11.26	− 40.82	+ 6.99	$\frac{1}{2}$
$v_{11} + v_{20}$			− 39.72	+ 6.26	+ 39.72	− 6.26	+ 1.81	$\frac{1}{2}$
$v_{17} + v_{21}$	+ 11.28	+ 31.82	− 11.28	− 31.82			+ 7.13	$\frac{1}{2}$
v_5			+ 2.77	− 12.14			− 0.66	$\frac{3}{4}$
v_{10}	− 5.98	+ 12.96			− 5.98	− 12.96	− 1.26	1
v_{15}	+ 19.61	− 11.71					+ 2.78	1
v_6	− 14.73	− 15.58					+ 0.59	$-\frac{1}{3}$
$v_1 + v_2$			− 3.11	+ 15.84	+ 8.87	+ 12.64	− 2.68	$-\frac{1}{3}$
$v_3 + v_4$	+ 8.62	+ 7.40	+ 21.25	+ 0.67			+ 3.96	$-\frac{1}{4}$
$v_7 + v_8$	− 20.12	+ 8.67			− 5.63	− 20.41	+ 0.34	$-\frac{1}{4}$
$v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12}$	− 5.96	+ 12.96	− 19.86	+ 3.13	+ 29.08	− 23.86	− 0.01	$-\frac{1}{4}$
$v_{18} + v_{19} + v_{20} + v_{21}$	+ 5.64	+ 15.91	− 7.36	+ 3.73	+ 19.86	− 3.13	− 0.01	$-\frac{1}{4}$
$v_{13} + v_{14} + v_{15} + v_{16} + v_{17}$	− 0.98	+ 4.69	− 5.64	− 15.91			+ 0.01	$-\frac{1}{5}$

Očito je, da ovdje predložena pravila u odnosu na čista Schreiberova imaju i daljnju prednost, jer su jednostavnija, t. j. imaju manje izuzetaka.

Tablica IV prikazuje na istom primjeru sastav jednadžbi pogrešaka prema predloženim pravilima. Tablica IV je potpuno ekvivalentna tablici II, pa će i normalne jednadžbe sastavljene prema tablici II kao i prema tablici IV biti potpuno iste.

Sam sastav normalnih jednadžbi i daljnje riješavanje ovdje ne iznosimo, jer smatramo, da je to čitaocima dovoljno poznato.

Ing. Dr. Nikola Čubranić — Zagreb

LA COMPENSATION DE PLUSIEURS POINTS À L'AIDE DE LA MÉTHODE DES OBSERVATIONS INDIRECTES

L'auteur traite le probleme de la compensation simultanée de plusieurs points par coordonnées, c'est-à-dire par la méthode des observations indirectes, et démontre, que cette méthode est plus économique que la méthode des observations conditionelles. Il développe en outre trois variantes d'équations des erreurs et prouve, que l'application des règles méchaniques de Schreiber ne fournissent pas des résultats absolument correctes , parce que Schreiber suppose l'orientation des visés sur les points donnés seulement avec un gisement donné. Cette méthode ne fournira pas la même solution que les autres méthodes.

Pour que les règles de Schreiber puissent être appliquées avec la même exactitude que les autres méthodes, l'auteur propose une règle un peu altérée. Les méthodes sont démontrées par des exemples numériques, dans lequels apparaissent les différences essentielles de ces trois manières de solution du problème.