Dr. Nikola Neidhardt, Zagreb:

Od računanja na prste do strojeva za računanje

Rijetko koja struka toliko računa kao geodetska. Ali nije uvijek bilo tako. Još gotovo do početka ovoga stoljeća metode su uglavnom bile grafičke. Prijelaz iz grafičkoga u numeričko bio je snažan preokret, gotovo revolucija struke. Ne smije se naime zaboraviti, da su grafičke metode snimanja vladale tisućljeća. Koji je onda razlog, da su te metode velikim dijelom nadomještene numeričkima? Zar je napredak instrumenata, u prvome redu teodolit, proizveo promjenu? Svakako velikim dijelom. Ali još veći upliv imalo je iznašašće novih pomagala za računanje, s jedne strane izum logaritama, a s druge izum i proizvodnja naših današnjih strojeva (mašina) za računanje.

Po svoj prilici se sada nalazimo na pragu novog, možda još jačeg, preokreta u geodeziji. Vidi u prošlom broju Geod. Lista članak »Dr. N. Čubranić: Pred novim metodama mjerenja«. Ako se obistini, da se pomoću interferencije svjetlosti bez naročitih poteškoća mogu dužine mjeriti s točnošću od 1/1,000 000, može iz toga nastati nova revolucija struke. Međutim, svrha ovoga članka nije, da se upusti u razmatranje toga smjera, već samo da dade sliku jedne od epoha razvoja pomagala za računanje.

Obzirom na računanje možemo do sada razlikovati dvije epohe. Priključimo im odmah i treću, koja se u prvim začecima već nazrijeva. Te tri epohe jesu:

prva, od prstiju do sutona abakusa;
druga, od abakusa do danas;
treća, atomska, na čijem pragu se upravo nalazimo.

Drugu epohu uglavnom poznajemo, jer u njoj živimo. Karakterizirana je s našim današnjim pomagalima i metodama: indijskim sistemom ručnog računanja, logaritmima te strojevima (mašinama) za računanje, izgrađenima na raznim mehaničkim principima. I premda to doba izgleda još uvijek svježe sa svojih bezbroj modela i tipova računskih mašina, koji su sve duhovitije i bolje konstruirani, ipak već se — kako rekoh — nazrijeva još noviji vijek. Za vrijeme ovog rata konstruirano je nekoliko gigantskih mašina za računanje. Iskorištene su i elektronske cijevi. Za fantastično malo vremena mogu se na tim strojevima izračunati goleme i složene računske operacije. Zar ne će možda i to doprinesti spomenutoj revoluciji?

Od navedene tri epohe nastojati ću ovdje najprije prikazati najstariju. Zatim ću u kojem od narednih brojeva Geodetskog Lista opisati najmodernije mamut-strojeve.

*

Egipatski pisar Ahmes je napisao (a možda i prepisao) oko 1700. godine prije naše ere udžbenik za računanje, koji je po njemu dobio ime Ahmesova računica. Taj papirus počinje riječima »Propisi za spoznaju mračnih stvari«. S tim u vezi se moramo pitati, zar je zbilja u ono vrijeme računanje zavrijedilo takav naslov? Zar su se računske spoznaje tek rodile.

Ahmesova računica na pr. sadrži tablicu, s kojom se proizvoljan razlomak može pretvoriti u zbroj osnovnih razlomaka. Ili za ilustraciju evo doslovce jednog primjera iz te rečenice. To je zadatak br. 79:

»Sedam osoba posjeduje svaka 7 mačaka, svaka mačka pojede 7 miševa, svaki miš pojede 7 era ječma, iz svake ere ječma može da se rodi 7 mjera žita, kako se zovu članovi po ovim podacima i kako je velik njihov zbroj?« (Odgovor na to pitanje je $7+7^2+7^3+7^4+7^5=19\,607$).

Zar su to mračni počeci računanja? Ta to su već potencije i geometrički redovi, daleko od početaka.

Babilonske glinene pločice od Senkereha iz 2000 god. prije naše ere sadrže tablice kvadrata brojeva od 1 do 60 i kubusa od 1 do 32. Pošto su Babilonci takove tablice sastavljali, morali su s njima nekako i računati, morali su ih upotrebljavati, a to je već prilično daleko od primitivnih početaka računanja. To je čak daleko od dnevnih potreba i današnjeg prosječnog čovjeka, koje ne idu dalje od zbrajanja, odbijanja, množenja i dijeljenja.

Pisani spomenici, kolikogod stari bili, zapravo su vrlo daleko od početaka računanja, isto tako, kako su i prve pisane riječi daleko od prvih izgovorenih.

Kako je čovjek najprije počeo računati? Izgleda, da je najprije došao u potrebu da nešto prebroji, možda divljač, koju je u lovu ubio, kakova krzna ili slično. Već kod tih prvih početaka računanja pomagao se je primitivan čovjek jednostavnom napravom, jednostavnim strojem za računanje — svojim prstima. Šaku bi stisnuo, jedan prst ispružio i njime, dotakao prvi predmet, koji bi brojio, zatim bi ispružio drugi prst, dotakao drugi predmet i tako na jednoj ruci do broja 5 a na dvije do 10. Dakle, najprimitivnije brojenje je, kako to djeca i danas rade, na prste samo do 10. Prsti su prvi stroj, prva mašina za računanje.

Ali naravno, dalnjim razvojem došao je čovjek u potrebu, da broji i preko 10, do 100, pa i preko 100. Do 20 su mogli poslužiti osim ručnih prstiju još i prsti na nogama, ali kako brojiti preko toga?

Za neko primitivno afričko pleme jedan istraživač kaže: »Kod brojenja preko 100 moraju taj težak posao obavljati u pravilu 3 čovjeka. Jedan broji na prste, koje podiže jednog za drugim i njima pokazuje ili po mogućnosti dotiče predmete, koji se broje. Drugi podiže svoje prste za desetice, treći figurira za stotice.«

Kod te primitivne mašinerije za računanje kao da susrećemo elemente današnjih strojeva za računanje. Kad se obađu svi prsti prvog čovjeka, znači 10, pa taj 10 pokrene 1 prst drugog čovjeka, koji figurira za desetice, dok deset desetica prenesu jednu stoticu. Kod modernih strojeva za računanje imamo nešto slična. Umjesto prstiju imamo zupce na zupčastim točkovima ili slične naprave. Kad prvi točak okrenemo za svih 10 njegovih zubi, prešli smo 10 jedinica i točak pokrene za jedno mjesto drugi točak, koji figurira za desetice i t. d.

Ali kakogod postoji sličnost između ispruženih prstiju na rukama i točka sa zupcima, ipak je od računanja na prste do čeličnih strojeva za računanje put vrlo dugačak i mukotrpan.

Obično se instrumenti za računanje smatraju nečim, što je nastalo u novom vijeku, danas, gotovo kao da ih je stvorila današnja generacija, kao da ona sama ima najviše zasluga za njihov razvoj. Ali tome nije tako. Stvari, koje se danas proizvode, su plod razvoja desetaka tisuća godina.

Iz brojenja na prste nastao je d e k a d s k i sustav, kod kojeg 10 jedinica predstavljaju jednu višu jedinicu t. j. deseticu, 10 desetica stoticu i t. d. Ali mogao je mirne duše iz takovog brojenja na prste nastati i p e t i č n i sustav, kome bi kao baza služio broj prstiju na jednoj ruci, dakle 5, a 5 petica bi bila jedna 25-tica i t. d. Ili pomoću svih prstiju na rukama i nogama mogao je nastati sistem po 20.

Od spomenuta tri sustava (po 5, po 10 i po 20), općenito je pobijedio dekadski sistem. Svi smo mi na njega već duboko privikli. On se je tako rekući već ukorijenio u nama. Od ostalih dvaju sustava imamo u Evropi još samo tragova. Na pr. Francuzi kažu za 80 »quatre-vingt« što će reći 4 puta 20. To je ostatak brojenja ne samo sa prstima ruku već i sa prstima nogu! Na vanevropskim kontinentima imamo kod primitivnih naroda dosta tragova petičnog i dvadesetičnog sustava. Na pr. Tamanaki-Indijanci za oznaku nekih brojeva upotrebljavaju slijedeće riječi:

5 = amnaitone, što će reći cijela ruka t. j. svih njenih pet prstiju;
6 = itakono amnpona tevinitpe (od druge ruke još jedan);
7 = itakono amnpona akkiake (od druge ruke dva);
10 = amna-akeponare (obe ruke);
11 = puita pona tevinitpe (jedan od noge);
15 = iptaitone (obe ruke i jedna noga);
20 = tevin-iteto (jedan čitav Indijanac);
21 = itakono itoto yamnar-pona tevinitpe (od drugog Indijanca na rukama još jedan);
40 = akkiake itoto (dva Indijanca) i t. d.

Rimski brojevi također nisu ništa drugo nego li oznake za prste i ruke. Na pr. I je jedan ispružen prst, II su dva takova prsta, III su tri, V je znak za ruku, VI je jedna ruka i još jedan prst druge ruke, X su dvije unakrštene ruke i t. d.

Ako je naš dekadski sustav nastao iz brojenja i računanja na prste, kako je onda nastao seksagezimalni sistem računanja sa 6, 12 odnosno sa 60? Taj su sustav upotrebljavali Babilonci još par tisuća godina prije naše ere. Od njih ga primiše Egipćani, od ovih Grci i t. d. I mi ga velikim dijelom još uvijek za izvjesne stvari upotrebljavamo na pr. kod mjerenja i računanja kuteva ($1^\circ = 60'$; $1' = 60''$), mjerenja vremena (1 sat = 60 min.) i t. d. Kako je poznato, naše stare mjere na pr. hvat se je dijelio u 6 stopa, stopa u 12 palaca i t. d., dakle seksagezimalno odnosno duodecimalno. Prije uvađanja metarskog sustava za mjere, većina je evropskih država upotrebljavala mjere, koje su se dijelile na 12 dijelova tako, da se na prvi pogled čini, kao da je taj sistem stariji od dekadskog.

Premda je duodecimalni sustav vrlo star, premda su ga upotrebljavali još stari Babilonci, premda su ga vjerojatno poznavali i narodi prije Babilonaca, ipak je decimalni vjerojatno mnogo i mnogo stariji, jer mu je postanak jednostavniji. Seksagezimalni je morao nastati mnogo kasnije, kad je kultura bila već na visokom stupnju razvoja. On nije nastao iz prstiju naše ruke, već vjerojatno iz promatranja svemira. Zvijezde se kreću u krugu, sunce i mjesec imaju oblik kruga, a sa polumjerom kruga se 6 puta može obići njegov opseg, godina ima cca 6 puta 60 dana i t. d. Osim toga je 12 djelivo sa 2, 3, 4 i 6, dočim je 10 djelivo samo sa 2 i sa 5. Izgleda da je nekako ovako došla šestica odnosno dvanajstica do važnosti i postala osnovom duodecimalnog odnosno seksagezimalnog sustava. Ali već iz toga, što je osnov toga sustava više 60 nego li 6 vidi se, da je dekadski sustav stariji, jer je $60 = 6 \times 10$. Naglašavam, da su Babilonci kao i stari Egipćani i stari Grci normalno računali u dekadskom sustavu, samo su im mjere, kutevi i novci bili dijeljeni dalje seksagezimalno odnosno duodecimalno.

Vratimo se na naš primarni stroj za računanje, na naše prste. Vidjeli smo, kako se je kod tog stroja brojilo do 1000 i kako su kod toga funkcionirali prsti od 3 čovjeka i kako je funkcionirao t. zv. prijenos desetica od jednog čovjeka na drugog. Ali, ako jedan sam čovjek bez pomagača treba brojiti recimo do 100, kako će on to izvesti samo sa prstima svojih ruku? Može na slijedeći način. Do 5 na jednoj ruci, a kad je 5 popunjeno, ispruži jedan prst druge ruke. Dakle na pr. desna ruka da su jedinice a lijeva petice. Na taj način možemo brojiti do 29 a pomoću prstiju nogu i do 80. Kod Homera riječ *πεμπάζειν* znači računati, a zapravo doslovce ona znači petkovati.

Kad se je razvila ma i najprimitivnija trgovina i čovjek postao naprednijí, petkovanje sa prstima naravno nije više moglo zadovoljiti. Razvoj je tražio nov način. Taj slijedeći način je bio pomoću kamenčića. Iz hrpe kamenčića uzet ću po jedan za svaki predmet, koji prebrojim. Na kraju brojenja će broj uzetih kamenčića biti jednak traženom broju predmeta. Deset po deset kamenčića složeni u hrpe daju desetice. Deset po deset ovakovih hrpa opet stotice i t. d. Dakle ono isto, što je prije više ljudi moralo raditi sa svojim prstima. Samo sada su prsti zamijenjeni kamenčićima i posao obavlja jedan jedincati čovjek.

Najjednostavnije računske operacije jesu zbrajanje i odbijanje. Zbrajanje nije ništa drugo nego složeno prebrojavanje. Kod sasvim malih iznosa je zbrajanje sa prstima, kod malo većih sa kamenčićima vrlo jednostavno. Dalnja računska operacija je množenje. Ono je dalnja faza u razvoju računanja, ali nije ništa drugo nego li opetovano zbrajanje. Dakle razvoj se je vjerojatno kretao ovim putem: brojenje, zbrajanje, množenje i zatim dijeljenje.

Kamenčići za računanje bili su isprva posve slobodni, pa ih je onaj, koji je bio zaposlen računanjem, uzimao ili slagao u hrpe.

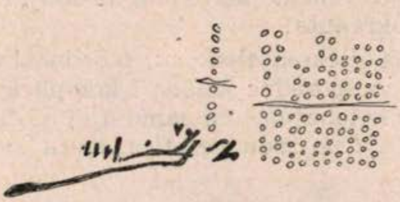
Kod brojenja na prste, naročito, kad je sudjelovalo više ljudi, imali smo tu prednost, da jedan prst nije uvijek bio samo jedinica, već da je mogao značiti i deset takovih jedinica ili čak 100 i t. d. Zašto se to isto ne bi moglo postići i kod brojenja sa kamenčićima? Bio bi onda potreban kud i kamo manji broj kamenčića, naročito kod velikih brojeva. Ali onda moramo kamenčiće nekako svrstati po rangu. Na pr. obične bijele kamenčiće uzeti za jedinice, sive za desetice i t. d. Ili da naprosto kamenčiće svrstamo u redove od po 10 komada. Jedan red će biti jedinice, drugi desetice i t. d. Na taj način već dolazimo do složenijeg pomagala za računanje do računske ploče.

Na poleđini jednog egipatskog papirusa iz doba kralja Menephtaha I. nalazi se crtež, koji je prikazan u sl. 1. S tim crtežom nema tekst samog papirusa nikakove veze. Vjerojatno si je koji Egipćanin slučajno na poleđini papirusa nešto izračunao odnosno nacrtao stanje kamenčića sa računske ploče. Karakteristično je, da je u svakome redu po 10 komenčića. Crtež nije pravo protumačen, ali vjerojatno se radi o računu.

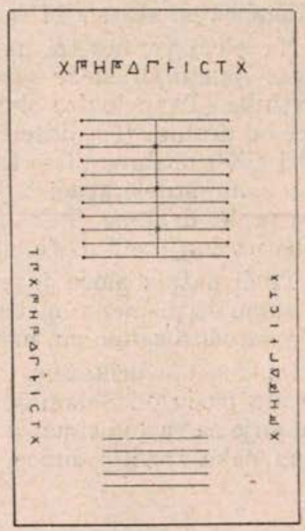
C a n t o r smatra, da su Egipćani računali na prste, a i sa instrumentima.

H e r o d o t za Egipćane kaže: »pišu pismena i računaju s kamenčićima pomičući ruku od desna na lijevo, dok Heleni (Grci) od lijeva na desno.«

Možda će gdjekome izgledati, da je vrlo mala razlika između slobodne hrpe kamećaka i kamećaka svrstanih u redove od po 10 komada. A zapravo



Slika 1



Slika 2.

je svrstanje u redove, gdje svaki red uživa za jednu dekadsku potenciju viši rang, od velike važnosti za razvoj računanja. Kad napišem 1, onda je to jedinica, ali, ako taj 1 smjestim u drugi red od kraja, već to nije jedinica, nego desetica i t. d.

Grci su računali također s kamenčićima. Riječ ψεφίζειν znači računati, a zapravo ψέφοι su »kamenčići«. Grčka računaljka bila je daska ili ploča od kamena, koja se zvala ἄβαξ.

Po J a m b l i h u s u je abaks Pitagorejaca bio pokriven prašinom, pa je služio i za računanje i za crtanje.

S o l o n kaže: »Tko je u ugledu kod tiranina, taj je kao kamen kod računanja, čas vrijedi više, čas manje. Tako tiranin ovoga cijeni čas više, čas manje.«

Na otoku Salamini u Grčkoj nađena je ploča 1,5 m duga a 0,75 m široka (sl. 2) iz mramora. Istraživači nisu posve sigurni, da li je to bio poslovni stol kakovog mjenjača ili igrači stol, na kojemu je svakome od igrača bila na dispoziciju računaljka da može računati svoje dobitke ili gubitke kod igre. N a g l je odlučno protiv toga, da bi to bio igrači stol, već da je ploča morala služiti samo za ozbiljan račun.

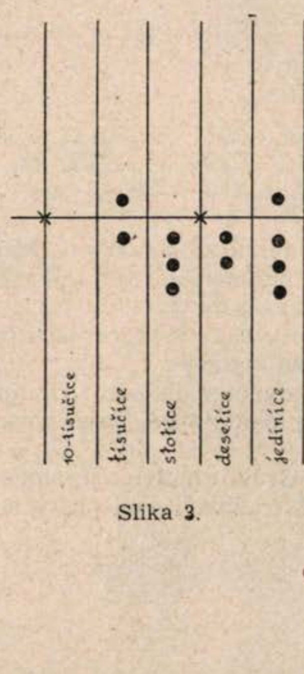
Na lijevoj strani ploče nalazi se 10 kolona, koje su označene sa 11 crta. Sa jednom okomitom crtom su sve te kolone presječene na po dva dijela (dolnji i gornji). Ove lijeve kolone na ploči zvat ćemo glavnima. Služile su od desna na lijevo: prva za jedinične drahme, druga za desetice, treća za stotice i t. d. Na desnoj strani table nalazile su se još 4 sporedne kolone (sporednih 5 crta), koje su od lijeva na desno služile: prva za obole, druga za polovice obola, treća za četvrtine i četvrta za osmine obola. Sporedne kolone su dakle služile za razlomke od drahme.

Na lijevim glavnim crtama vidimo i križiće. Oni su služili u istu svrhu kao što danas posebni znaci na strojevima za računanje služe za odjeljivanje tisućica od stotica ili milijuna od hiljada i t. d.

Na ploči vidimo tri natpisa. Prvi dolje je najdulji. Njegovi znakovi (slova) imadu slijedeće značenje od desna na lijevo: osminke obola (X), četvrtinke (T), polovice obola (C) i cijeli oboli (I), jedinične drahme (⊢), petice od drahmi (Γ), desetice drahmi (Δ) i tako dalje: 50; 100; 500; 1000; 5000 i 6000 drahmi (T = talenti). Isti takav natpis je i na lijevoj strani ploče, samo što je kraći t. j. sadrži znakove za osminke, četvrtinke i t. d. obola preko drahme, 5 drahmi i t. d. samo do 1000 drahmi. Za razliku od napisa uz donji rub ploče, slova uz lijevi rub su nešto veća.

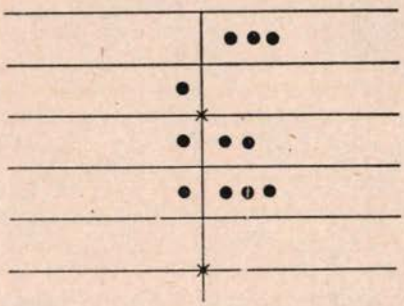
Treći natpis ploče je uz gornji rub. Isti je takav kao onaj uz lijevi rub, samo su pismena opet manja tj. iste veličine kao i ona uz donji rub, i, što je naročito zanimivo, naopačke su okrenuta.

Da donekle prikažem računanje na grčkom abakusu, pojednostavniti ću nešto ploču od Salamine. Ispustiti ću sporedne kolone i kompliciranije računanje sa razlomcima, a od glavnih kolona uzet ću samo njih 5. Zadnja kolona neka znači jedinice, druga od nje po redu desetice, treća stotice,



Slika 3.

četvrta hiljade i t. d. (sl. 3). Ako 2 kamečka položim u donji dio zadnje kolone, znači, da sam namjestio 2 jedinice. Naprotiv jedan kamenčić u gornjoj polovici zadnje kolone znači 5 jedinica. U sl. 3. je u zadnjoj (jediničnoj) koloni namješteno 5+3=8 jedinica. U koloni desetica se vide 2 jedinične desetice; u trećoj koloni od kraja imamo 3 stotice, u četvrtoj 5+1=6 tisućica. U svemu sl. 3. pokazuje broj 6328. Treba tome broju dodati 2425=2000+400+20+5. U koloni tisućica se dodaju 2 kamenčića, što će reći =2000. U koloni stotica već imamo u dolnjoj polovici 3 kamenčića, a trebalo bi još dodati 4 stotice dakle 4 kamenčića. U toj koloni treba onda svega biti broj 3+4=7. Da u istoj koloni iz 3 dobijem 7, moram jedan kamenčić iz donje polovice kolone premjestiti u gornju, pa će u gornjoj polovici biti jedan (znači 5 stotica), u donjoj 2 (znači 2 stotice), dakle ukupno 5+2=7 stotica. U koloni desetica moram dodati 2 kamečka. U koloni jedinice bi morao dodati još 5 kamenčića, ali u toj koloni je već namješten broj 8, a 8+5=13. Moram dakle deseticama dodati još jedan kamenčić, a u jediničnoj koloni ostaviti samo 3 kamenčića t. j. peticu moram u toj koloni odstraniti. Zbroj 6328+2425=8753 prikazan je na sl. 4.



Slika 4.

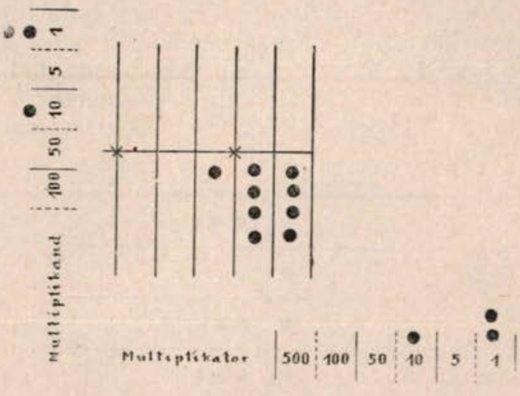
Kako vidimo, računanje je u nekoj kombinaciji petičnog i desetičnog sustava. Pitanje je, kako se je na takovoj ploči množilo? Da to prikažem, transkribirati ću dolnji i lijevi natpis ploče u arapske brojeve, ispustivši opet razlomke. Onda od desna na lijevo imamo u tim napisima: jedinice, petice, desetice, pedesetice, stotice i t. d. Da značenje znakova u tim napisima bude jasnije, razlučit ću te znakove dekadski pomoću crtica (sl. 5.).

Lijevi napis neka služi za smještaj multiplikanda, a dolnji za multiplikator. Pošto je dolnji napis duži nego postrani, uzeti ću kao multiplikator uvijek veći broj. Dispozicija pojedinih brojila na današnjim modernim strojevima za računanje podsjeća na dispoziciju ove table. I na modernim strojevima je brojilo za produkt najduže, dok za jedan od dva faktora, koji se množe, je dulje nego li za drugi.

Pokušat ćemo pomnožiti 12 sa 12 (sl. 5.). Prije nego li započnem sa samim množenjem, namjestim multiplikand i multiplikator iznad ili ispod njihovih napisa (brojila). Dakle nad znakom desetica po jedan kamenčić, a nad znakom za jedinice po dva. Time je u brojilu multiplikanda namješten broj 12 a isto tako u brojilu multiplikatora.

Grci su množili najprije najvišu znamenku multiplikatora sa najvišom multiplikanda, zatim sa slijedećom nižom i t. d.

Za dalnji rad na našem abaksu potrebno je poznavati t. zv. Arhimedovo pravilo. Ako multiplikand ima a, a multiplikator b cijelih mjesta, produkt se mora početi u $a+b-1$ koloni. Kod nas ima multiplikand 2 cijela mjesta, dakle $a=2$, multiplikator isto 2, dakle $a+b-1=3$. Produkt treba početi namještati u 3. koloni od kraja. Uzmimo prvu znamenku multiplikatora. To je jedan. S njime pomnožimo prvu znamenku multiplikanda, dakle $1\times1=1$. Stavimo 1 kamenčić u dolnju polovicu treće rubrike. Zatim pomnožimo isti jedan multiplikatora sa dalnjom znamenkom multiplikanda



Slika 5.

t. j. sa njegovim jedinicama odnosno sa 2. Dobivamo $1\times2=2$, dakle 2 kamenčića upišemo (stavimo) u drugu kolonu od kraja. S time je multiplikand već pomnožen sa 10, pa iz multiplikatora možemo maknuti kamenčić, koji je označavao deseticu. U multiplikatoru su ostale dvije jedinice, s kojima još moram izmnožiti multiplikand. Dva puta prva znamenka multiplikanda $2\times1=2$, dakle 2 nova kamenčića moram staviti u drugu rubriku od kraja (Arhimedovo pravilo!), konačno 2 puta 2 jedinice multiplikanda daje 4, što treba unesti u zadnju rubriku. Tako je dakle 12 pomnoženo sa 12 (t. j. najprije sa 10 i onda sa 2), pa se iz kolona čita rezultat $12\times12=144$.

Hotice sam za množenje izabrao što jednostavniji primjer. Mnogo je lakše bilo na samoj računskoj ploči pokazivati, kako se ima računati, nego li to s crtežima i riječima u knjizi tumačiti. Očito radi toga i manjkaju detaljniji starogrčki opisi o računanju na abaksu. Računanje se je učilo usmeno na računalu a ne pismeno pomoću knjige.

Dijeljenje je obratan postupak množenju. Izvodilo se je na računaljci inverzno množenju. Dividend se je namjestio u kolone, divizor u brojilu multiplikanda, pa se je divizor postupno odbijalo od odgovarajućih rubrika dividenda i kod svakog odbijanja se je na odgovarajuće mjesto brojila multiplikatora (dolnjeg napisa) stavljao kamećak. Na koje je mjesto trebalo u rezultatu stavljati kamenčić, to je pokazivalo Arhimedovo pravilo za diobu $p-a+1=b$, gdje je p broj cijelih mjesta dividenda, a broj mjesta divizora, a b položaj traženog mjesta kvocijenta.

S gornjim izvodima još nije ploča od Salamine posve protumačena. Ostaje pitanje, čemu je mogao služiti natpis uz gornji rub, koji je naopako smješten. Naopaki njegov smještaj je doveo neke na misao, da se radi o igračem stolu. Na svakoj strani stola da je sjeo po jedan partner igre i za sebe računao dobitke i gubitke u igri. Historičar Nagl je oprovrgao to mišljenje, ali nije dao uvjerljivo tumačenje za činjenicu, da je gornji natpis naopako smješten. Nagl naime kaže, da je taj naopaki natpis udešen za eventualnog ljevaka, koji da se može smjestiti na drugu stranu ploče i odande računati. Moje je mišljenje drugo.

U staro vrijeme nisu svi ljudi znali računati, kao danas. Računanje nije bila posve laka stvar. Ta još na početku novog vijeka se čak na nekim sveučilištima nije došlo dalje od podučavanja pravila najosnovnijih računskih operacija. Možda su u Grčkoj na trgovima i sajmovima postojali posebni računđije, koji bi na zahtjev stranaka izračunali, koliko žita na pr. netko može kupiti za 5000 drahmi, ako je cijena tolika i tolika, ili koliko ima platiti za 15 mjera i tome slično.

Zašto ploča od Salamine ne bi bila ploča takovog javnog računđije? Stranka, koja bi prišla k ploči, došla bi sa strane naopakog napisa tako, da za nju taj napis nije bio naopak, već uspravan. Da lakše izbroji svoje novce, stranka bi ih svrstala ispod ili iznad tog natpisa i na pr. rekla račundžiji: »Izračunaj, koliko za toliko i toliko novca mogu dobiti žita, ako je cijena tolika i tolika«.

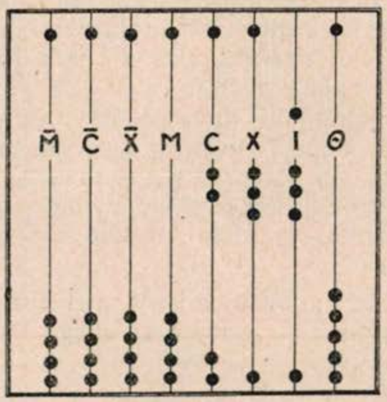
Ako je ploča služila kakovom mjenjaču novca, opet je obrnut natpis mogao služiti u istu svrhu t. j. ne mjenjaču nego stranci, koja je došla mijenjati novac.

Inače, kako rekoh, grčki su spomenici, koji govore o računanju na abakusu, dosta oskudni.

Grčki abakista je naravno morao znati jedamputjedan. Pritome se je doduše mogao služiti i računanjem na prste, kakovo na pr. seljaci u nekim krajevima Rumunjske još uvijek upotrebljavaju. To je već viši stepen računanja na prste, nego što je bilo obično brojenje pomoću prstiju. Palac na svakoj ruci neka znači 6, a od palca dalje pojedini prsti 7, 8, 9 i 10. Hoću pomnožiti dva broja, koji su veći od 5 a manji od 10. Moram odgovarajuće prste položiti jedan na drugog. Na pr. koliko je $6\times7=?$ Ruke drži tako, da im palci budu okrenuti spram tijela. Palac lijeve ruke (multiplikand 6) stavi na kažiprst desne ruke (multiplikator 7). Prema malom prstu brojeno imaš na lijevoj ruci još 4 prsta, na desnoj 3. To izmnoženo daje broj jedinica t. j. 12. Broj prstiju, koji kod toga nisu brojeni, daje desetice. Ima ih 3, dakle umnožak $6\times7=30+12=42$. Pomnoži na taj način 8×9. Srednji prst jedne ruke (8) namjesti na prstenjak (9) druge. Na lijevoj ruci prema malom prstu ostaju 2 prsta, na desnoj 1, a $2\times1=2$ su dakle jedinice produkta, dočim desetice su 7, jer je to broj prstiju, koji još nisu izbrojeni.

Rimljani su računali također na prste, na abakusu i s tabelama. Sl. 6. prikazuje jedan rimski »abacus«. Na kamenoj ili drvenoj ploči urezani su žljebovi, u kojima se pomiču puceta (calculi). Na slici vidimo 8 duljih donjih žljebova i u njihovim produženjima isto toliko gornjih kraćih. Između dolnjih i gornjih pišu oznake za te pojedine redove. Zadnji red nosi oznaku Θ t. j. oznaku za unce, dok su ostali bili posvećeni asima. Drugi red ima znak *I* (jedinice), treći *X* (desetice), četvrti *C* (stotice), peti M (tisuće asova) i t. d. As je imao 12 unca. U svakom dužem žljebu nalazilo se je po 4 puceta, dočim u zadnjem 5 komada. Naprotiv u kraćim gornjim žljebovima bilo je u svakome samo po jedno puce, koje je označavalo peticu odnosno 5 jediničnih puceta iz dolnjih žljebova.

S takovom se je računaljkom računalo na analogan način kao i na grčkom abakusu. Ta ovaj rimski abakus i nije ništa drugo nego li grčki, samo se kamenčići ne smještaju u kolone, nego se već nalaze u žljebovima odnosno na linijama. Kod računanja se calculi primiču i odmiču od polja sa natpisima. Na pr. u sl. 6. je namješten br. 238. Odgovarajući broj kamenčića je naime primaknut polju sa natpisima.



Slika 6.

Navodno je u rimskom carstvu bilo propisano, da svaki bankar ili mjenjač mora imati računaljku. Brojevi, koji su se na računaljci imali zbrajati ili odbijati, množiti ili dijeliti, očito su se posebno ispisivali brojčanim znamenkama, pa se je onda na abakusu izračunao njihov zbroj, razlika, produkt ili kvocijent.

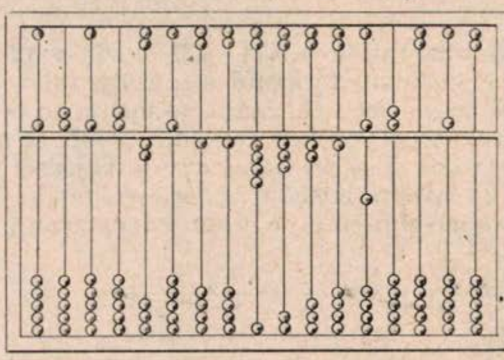
Po nekima računanje na računaljci-abakusu nije izum niti Egipćana, ni Grka ni Rimljana, već Kineza. Iz Kine da je nekako doneseno u Egipat i odatle u Grčku, Rim i t. d.

Kinezi pripisuju jednom ministru cara Huang-ti, koji da je vladao 2637 godina prije naše ere računanja vremena, izum pisma, a drugome ministru Cheou-ly istoga cara izum daske za računanje t. zv. s v a n - p a n a. Ali po svoj prilici računaljka nije djelo pojedinca, već u prvome redu proizvod društveno-ekonomskih prilika, pa je do njene prve upotrebe moglo spontano doći i na više mjesta.

Kineski svan-pan sastoji iz žica sa kugljicama (sl. 7.). U više zemalja se takova sprava još uvijek mnogo upotrebljava.

E s c a y r a c, kojega je Napoleon III. poslao zbog naučnih istraživanja u Kinu, izvješćuje god. 1859. slijedeće: »Na svome svan-panu Kinezi upravo nevjerojatno vješto računaju. Nisam loš račundžija, a ipak su Kinezi, koji nisu ni bili trgovci, izračunali zadatke, koje bi im zadao, dva ili 3 puta brže od mene. Za cigla 2 mjeseca se djeca nauče baratanju sa svan-panom. Svan-pan se nalazi u svim javnim uredima, pa i u uredima evropskih trgovaca, koji imadu namještene Kineze.«

Za razliku od grčkog ili rimskog abakusa, ima svan-pan na svakoj dolnjoj liniji po 5 (a ne po 4), a na svakoj gornjoj po 2 (a ne po 1) kugljicu. C a n t o r kaže, da je u svakome dijelu žice po jedna kugljica suvišna. Istoga je mišljenja i V i l l i c u s. Ne mogu se posve tome prikloniti. Kod kineskog svan-pana nakon 4 dolnje jedinice mogu — ali ne m o r a m — prenesti jednu peticu odnosno nakon 5+4 jedinice jednu deseticu, dok kod grčko-rimskog abakusa to m o r a m učiniti. Iz toga mogu kod računanja, a naročito kod dijeljenja i odbijanja rezultirati i izvjesne prednosti.



Slika 7.

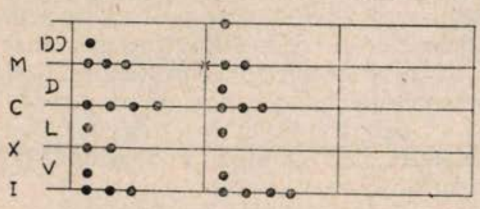
Inače su metode rada na kineskom svan-panu u glavnom iste kao i na abakusu.

Evropski srednji vijek je preuzeo abakus od Rimljana, pa se je računanje na njemu podučavalo u školama. Temelj je bila obuka iz jedamputjedan. A u g u s t i n (g. 354.) kaže, da mu je dodijala pjesma »unum et unum duo, duo et duo quatuor«. Dakle jedamputjedan se je učio kao pjesma naizust. Đaci su tu pjesmu morali tako dugo pjevati, dok nisu naučili jedamputjedan. Stari kroničari kažu, da su se kod toga iz školskih prostorija znali čuti i disharmonični zvuci, cviljenje i jauk, kad bi koji učenik pogriješio, pa bi ga učiteljeva šiba omlatila.

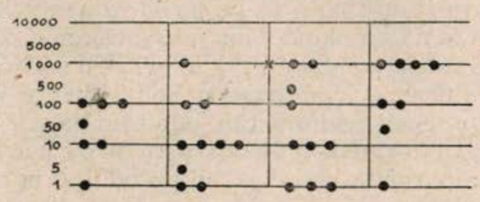
Godine 1534. izdao je J o h a n n A l b r e c h t, »Rechenmeister« iz Wittemberga, knjižicu pod naslovom »Rechenbüchlein auf den Linien«. To računanje na linijama sastoji u slijedećem. Na stolu se nacrtaju paralelne linije. Na prvu se napiše *I* (jedinice), na drugu *X* (desetice), treću *C* (stotice), četvrtu *M* (hiljade). Ova četvrta se označi i sa križićima, pa se dalnje linije opet obilježe sa *X*, *C*, *M*, što će reći 10.000, 100.000, 1,000.000. Između prve i druge crte dolazi znak za petice (*V*), između druge i treće znak za pedesetice (L) i t. d. Računalo se je sa posebnim novčićima za računanje. Novčić na pr. položen između treće i četvrte crte značio je 500. U sl. 8. je u prvoj rubrici namješten broj 8478.

Opisana linijatura je bila presječena sa okomitim crtama i tako razdijeljena u više rubrika, koje su se zvale bankiri. Evo odakle banke vuku svoj naziv. Drugi bankir u sl. 8. prikazuje broj 12859.

Na istu liniju se je u jednoj rubrici najviše postavljalo po 4 novčića, a između dviju linija najviše po jedan, analogno kao kod rimskog abakusa.

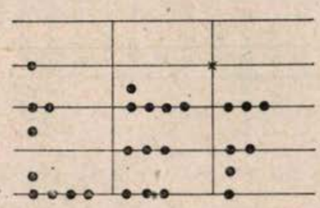


Slika 8.



Slika 9.

Sl. 9. prikazuje zbroj brojeva 371+1247+2633=4251. U prve tri rubrike su namješteni sumandi. Zbrajanje se obavlja tako, da se naprosto na svakoj liniji skupe svi novčići, pa ako ih je manje od 5, stave se na istoj liniji u rubriku rezultata, a ako ih je više od 5, polože se na istu liniju samo oni preko 5, a za svakih 5 se po jedan stavi u slijedeći viši međuprostor. Analogno za po 2 novčića iz međuprostora se stavlja jedan na slijedeću višu liniju. Dakle posao zbrajanja je dosta jednostavan i pregledan.



Slika 10.

Sl. 10. prikazuje odbijanje. U prvoj rubrici je minuend 1259, u drugoj suptrahend 933. Od broja novčića minuenda na svakoj liniji treba odbiti broj novčića suptrahenda na istoj liniji i ostatak upisati u rubriku rezultata. Ako pri tome suptrahend na kojoj liniji ima veći broj novčića nego minuend, jednu višu jedinicu minuenda se pretvori u 5 novčića niže linije, ako je viša u međuprostoru, a u dvije, ako je na liniji.

Multiplikacija i divizija se je u srednjem vijeku obavljala kao na grčkome abakusu.

Sredovječni učenjak Isidorus (570—636) među ostalim kaže: »Tolle numerum rebus et omnia pereunt. Adime seculo computum et cuncta ignorantia caeca complecitur, nec differi potest a ceteris animalibus qui calculi nescit rationem.« (Oduzmi stvarima brojeve i stvari moraju propasti. Oduzmi stoljeću računanje i općenitost hvata slijepo neznanje i ne može se razlikovati od ostalih životinja, tko nezna računati.)

Riječi Isidorusa pokazuju, kako su učene glave i u srednjem vijeku veliku pažnju posvećivale računanju.

R i c h e r, učenik Gerberta (kasnijeg Silvestra II., koji je rođen u drugoj polovici X. vijeka), govoreći o nastavi, među ostalim kaže:

»Ne manja je skrb posvećivana pouci iz geometrije. Za upućivanje u nju Gerbert je dao izraditi jedan abakus t. j. tablu, koja je bila naročito podesna po svojim dimenzijama. Duža je strana bila izdijeljena u 27 dijelova. Na njih je Gerbert smjestio znakove, njih 9 na broju, koji su svaki broj mogli prikazati. Osim toga je dao izraditi 1000 znakova iz rožnine, koji su bili slični prvima. Njih se je naizmjence moglo postavljati na 27 odjela abakusa i tako se je mogla izvesti multiplikacija ili divizija kakovih bilo brojeva. Ove računske operacije su na toj osnovi obavljene tako kompendiozno, da su se uz veliki broj primjera lakše razumjevale nego li što se riječima moglo protumačiti.«

Evropski srednji vijek preuzeo je nauku od starih Grka i Rimljana. I srednjevjekovno računanje na linijama nije ništa drugo nego li računanje na abakusu. Dakle mirne duše možemo reći, da se je na računskoj ploči — abakusu — računalo bar nekoliko tisuća godina, kroz stari i srednji vijek. Doduše naziv »abakus« se već u 13. stoljeću više ne upotrebljava kao oznaka za računaljku t. j. za spravu, već općenito kao oznaka pojma računanja. Na istoku a naročito u Kini se abakus, odnosno svan-pan, još uvijek mnogo upotrebljava.

Moramo se pitati, šta je prekinulo upotrebu abakusa? Zašto se on i dalje ne upotrebljava, kako se je upotrebljavao kroz par tisuća godina? Doduše abakus u obliku žica sa kugljicama još se uvijek kod nas upotrebljava u prvom razredu pučke škole kod zorne obuke iz zbrajanja i odbijanja, ali to su samo ostaci njegovog nekadašnjeg sjaja i uporabivosti. Grci i Rimljani bez abakusa nisu gotovo mogli ni disati. Rimsko carstvo je bilo golem svijet, golema organizacija sa razvijenom administracijom, trgovinom, bankarstvom, poreznim sistemom i t. d. Zar se takova organizacija može zamisliti bez računanja? Da li je Rimljaninu bilo lako zbrojiti bez abakusa najjednostavnije brojeve na pr.:

C M X C I X i D C L XXX V I I I

t. j. 999 i 688. S kojeg kraja da počnem zbrajati takove rimske brojeve, kad je na pr. desetica čas ispred stotice, čas iza nje, ili stotica čas ispred čas iza hiljade i t. d. Ili zar je bilo Grku lako bez abakusa zbrojiti na pr. brojeve:

$\gamma{,}\mu\varepsilon$ i $\delta M \gamma \vartheta \tau \varkappa \beta$,

što će reći 3045 i 49 822.

Koji je dakle razlog tome, da je abakus napušten, gotovo zaboravljen, usprkos tome, što je tisuće i tisuće godina u raznim oblicima vjerno služio čovječanstvu? Zar su otkrivene nove jače vrijednosti, koje su ga smrvile, oborile, odnosno posve zasjenile? Zar se nije mogao prilagoditi novom iznašašću, novim vremenima i novom napretku?

Ex oriente lux — novost, koja je oborila i posve zasjenila i umirovila abakus, ta je novost rođena u Indiji. To je jedno od najvećih iznašašća čovječanstva. Po tome iznašašću se današnje naše računanje i današnji naši strojevi za računanje razlikuju od starovjekog računanja sa abakusom. To iznašašće je pripomoglo stvarati novi vijek historije čovječanstva, novu epohu i silan razvoj tehnike i nauke. Upravo se ne usuđujem izreći naziv toga iznašašća, tog epohalnog izuma, koliko je paradoksalan. To veliko iznašašće, taj veliki izum je nula ili ništica. Zar to ne izgleda duboko paradoksalno. Ništa da je stvorilo ne samo nešto, već i nešto velikog i zamašitog!

U pisanju grčkih i rimskih brojeva nije bilo nule. Doduše, prazna kolona na abakusu je značila ništa, ali neizgovorenu i nenapisanu nulu, preko koje se je mučke prelazilo i s kojom se nije svijesno računalo.

Primitivni američki Indijanci još uvijek, kad izgovaraju brojke, istovremeno i prstima odnosno rukama i nogama pokazuju dotičan broj. Dakle brojevi su kod njih još uvijek povezani s predmetima; nisu generalizirani. Broj 3 još uvijek znači 3 predmeta, 3 prsta ili 3 kamenčića. Naprotiv viši stepen je broj kao pojam, kao matematska veličina.

Pitagorejci nisu jedinicu smatrali brojem, već izvorom i ishodištem sviju brojeva. Postoji starogrčka legenda, da je onaj Grk, koji je iznašao iracionalne brojeve, bio teško kažnjen osvetom bogova. Bogovi ga potopiše u brodolomu, jer da se je drznuo da dirne u područje, koja da su pridržana samo bogovima, jer se je drznuo zaviriti u dubine beskonačnosti. Što bi tek Grci rekli za onoga, koji je otkrio nulu i drznuo se čak računati sa ništa i čitav jedan sistem izgraditi sa ništa.

Ma zvučilo to kakogod paradoksalno, ali činjenica je, da je ništica otvorila novu epohu u računanju. Možda još paradoksalnije je i to, da su kasnija istraživanja najbližih susjeda od ništice, beskonačno malih veličina, dovela matematiku do najvećeg sjaja, otkrivši nova područja, gotovo nove svijetove.

O tome, kada je iznađena nula, su mišljenja podijeljena. Vjerojatno je nastala negde u prvim vijekovima naše ere. Svakako u Indiji. Iz god. 504. postoji indijsko djelo, u kome se među ostalim za broj

432 000

kaže (od desna na lijevo): 3 praznine (nule), zubi (32 — jer čovjek ima 32 zuba) i more (4).

Znamenke, koje mi upotrebljavamo i koje zovemo arapskima, potječu zapravo također iz Indije. Ispravnije bi bilo nazivati ih indijskima. Arapi su te brojke u glavnome preuzeli od Indijaca i predali ih kasnije zapadnoj Evropi. Slika 11. pokazuje u prvom retku staroindijske znamenke za brojeve od 1 do 9 i to iz II. stoljeća, dok u drugom retku indijska slova iz IX. stoljeća (nula ima potpuno današnji svoj oblik), konačno u trećem retku najstarija poznata arapska slova.

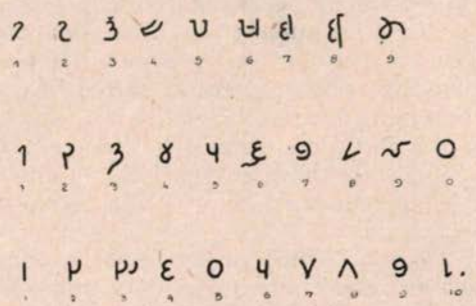
Staroindijski nazivi za brojeve od 1 do 10 upravo čudno naliče našim nazivima. Na pr. 1 je »čka«, 2 je »dva«, 3 je i u staroindijskom »tri«, 4 je »tšatvar«, 5 je »pantšan« (panša = pesnica, dakle svih 5 prstiju), 6 je »šaš«, 7 je »saptan«, 8 je »aštvan«, 9 »navan«, 10 »dašan«.

Naš način pisanja znamenaka je indijski. Ali nije zasluga Indijaca samo u tome. Oni su nam dali i vanredan sistem sastavljanja brojeva iz tih 10 znamenaka. Laplace kaže:

»Svaka veličina da se može prikazati samo sa 9 znakova s time, da se svakome znaku daje istovremeno apsolutna i poziciona vrijednost, ta to je toliko jednostavno, da se tom izumu ne možemo dosta čuditi i diviti. I upravo ta jednostavnost i lakoća, koju ta metoda pruža računanju, uzdiže indijski matematski sistem u rang najkorisnijih otkrića. Ali, kako je teško bilo pronaći tu metodu, možemo zaključiti odatle, što je to iznašašće izmaklo geniju Arhimeda i Apolonija od Perge, dvaju najvećih umova staroga svijeta.«

Indijac Brahmagupta napisao je god. 628. knjigu »Ganitadhjaja« i »Kuttakadhjaja« t. j. računicu i nauku o razlomcima. Koliko je poznato, to je najstarije sačuvano indijsko matematsko djelo.

Brahmagupta naučava na pr. multiplikaciju na 3 načina. Uzmimo, da treba pomnožiti 288 sa 235.



Slika 11.

1. način. Multiplikand se toliko puta redom ispiše, koliko multiplikator ima znamenaka, a znamenke multipliktora se ispišu stepenasto po-

288	2 . .	576
288	3 .	864
288	5	1440
		67680

maknute. Dioni produkti se ispisuju također stepenasto, pa se zbroje, da se dobije traženi rezultat 67 680.

2. način. Multiplikator se povoljno rastavi na pr.

$$235 = 9 + 8 + 8 + 10 + 200$$

i množenje se izvodi kako slijedi:

288	9	2592
288	8	2304
288	8	2304
288	10	2880
288	200	57600
		67680

3. način. Ispod multiplikanda se napiše multiplikator i množi se ili od desne na lijevo ili od lijeva na desno

```
 288
 235      470
  235     1880
   235     1880
        ______
          67680
```

t. j. najprije se 2 pomnoži sa 235, što se ispiše, onda se ponovno napiše za jednu stepenicu niže i u desno 235, koji se množi sa 8 i t. d. Zbroj dionih produkata daje traženi rezultat.

Opisani treći način je već gotovo posve naš današnji, samo što mi ne opetujemo pisanje jednog faktora (gore 235).

Pa u čemu je ta fenomenalna razlika između našeg današnjeg — zapravo indijskog — sistema računanja i računanja sa abakusom. Razlika je u tome, što smo se kod našeg današnjeg računanja posredstvom nule nekako uspeli iznad vlastitih prstiju i iznad kamenčića abakusa. Na posve malome komadiću papira ili čak u glavi možemo izračunati ono, što prije nismo mogli ni zamisliti bez ploče i mnoštva kamenčića. Razlika je naoko sitna, ali u biti vrlo velika. Abakisti su nesvijesno računali s nulom, dok mi danas to činimo svijesno pomoću t. zv. pozicionog sistema pisanja brojeva.

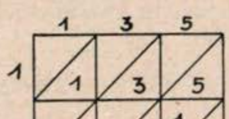
Navesti ću još i nekoliko primjera iz aritmetike indijca Bhascare-Acharia. Primjeri su zaodjenuti u pjesničko ruho. Bhascara je napisao i posvetio tu aritmetiku svojoj kćeri, kako bi se utješila, što još nije udata.

U uvodu svoje knjige Bhascara među ostalim hvali svoje djelo i kaže:

»Poklonih se božanstvu, čija glava naliči glavi slona, a noge su okićene bogovima. Božanstvo pomaže one, koji su mu vjerni i usrećuje one, koji ga poštuju. Polažem pred njega ove jednostavne pouke računanja, koje se ističu ljepotom i slatkoćom elegancije te jasnoćom vezanog, mekog i ispravnog načina izražavanja.«

Evo nekoliko primjera iz »slatke« aritmetike Bhascarine.

»Lijepa i cijenjena Lilavoti, koja imaš dražesne oči poput mlade srne, kaži mi, koliko je 135 pomnoženo sa 12 . . .«



Slika 12.

Riješenje te zadaće prikazuje sl. 12. Iscrta se toliko rubrika, koliko multiplikand ima mjesta i toliko redova, koliko ih ima multiplikator. Nastala polja se dijagonalama razdijele svako na po dva trokuta. Multiplikand se ispiše gore, multiplikator sa strane. Množe se pojedini članovi multiplikanda sa pojedinim članovima multiplikatora i umnošci upisuju u odgovarajuća polja skrižaljke. Ako parcijalni ovakav umnožak pritome ispadne dvoznamenkast, prva se znamenka upisuje u prvi (lijevi) trokut odgovarajućeg polja, a druga u drugi (desni). Na pr. u sl. 12. su parcijalni umnošci 1×1, 1×3, 1×5, 2×1, 2×3 jednoznamenkasti, ali zadnji $2\times5=10$ je dvoznamenkast. Kad su pojedine znamenke multiplikatora izmnožene sa pojedinim znamenkama multiplikanda i kad su parcijalni produkti ovako upisani u skrižaljku, pristupa se zbrajanju onih dijelova parcialnih produkata, koji se nalaze između pojedinih dijagonala skrižaljke. Na pr. zadnja znamenka rezultata je 0, jer je iza zadnje dijagonale u sl. 12 samo 0. Druga znamenka odostraga u rezultatu mora da je 2, jer je zbroj znamenaka između zadnje i predzadnje dijagonale $6+1+5=12$, dakle se dolje kao druga znamenka od kraja upiše 2, a 1 je prijenos i t. d.

Evo dalnji primjer iz Bhascarine aritmetike:

»Lijepa djevojčice svjetlucavih očiju, koja znaš metodu obrtanja brojeva, reci mi, koji broj, pomnožen sa 3, pribrojen k trećini produkta, podijeljen sa 7, suptrakcijom reduciran od trećine kvocijenta, zatim izmnožen sam sa sobom, 52 odbijeno od umnoška, od toga uzet drugi korjen, 8 pribrojeno i zbroj sa 10 podijeljen, daje 2?«

Ili dalnji primjer:

»Od roja pčela spustila se petina na cvijet Kadambe, trećina na cvijet Silinde. Trostruka razlika odletje na mirisav cvijet Kutuje. Samo jedna pčelica preosta, lepršajuć ovamo-onamo, jer ju jednako privlači miomiris jasmina i miomiris Pandame. Dražesna gospođice, kaži, koliko je svega bilo pčela.«

U vezi s time se moramo pitati: zar su to počeci nove epohe računanja s nulom? Ta to je poezija puna nježnih riječi i mirisa. Matematika je najobjektivnija nauka, dok je pjesništvo najsubjektivniji izražaj osjećajnosti. Ta dva ekstrema su spojena u aritmetici Bhascarinoj.

Kako rekoh, od Indijaca su Arapi preuzeli pozicioni sistem pisanja brojeva i na njemu izrađene metode računanja. Te metode su Arapi predali evropskom zapadu.

Najveći arapski matematičar je bio Muhamed ibn Musa Alhvarizmi, koji je živio početkom 9. vijeka. Iz njegovog imena je nastala riječ algoritam. Algoritmičari su bili oni matematičari u srednjem vijeku, koji su se služili s nulom i indijskim pozicionim sistemom za razliku od abakista, koji su računali na abakusu.

Oko god. 1200. evropski je zapad u posjedu računskog umijeća s više strana, u posjedu nule, u posjedu golemog iznašašća, posjedu t. zv. indijskog pozicionog sistema.

Započeo sam s brojenjem na prste i s kamenčićima, završavam sa sutonom abakusa t. j. dobom, kad je evropski zapad došao u posjed nule.