Mlinar Rudolf, Geom. — Kikinda

Vektori u ravni i njihova primena u geodeziji

(Nastavak)

Daljnju primenu vektora prikazat ćemo u nekoliko najobičnijih rešenja, koja su našim stručnjacima inače poznata na primer kod iskolčenja kružne krivine. Sl. 1.

Pretpostavimo dakle, da su poznati osnovni elementi krivine t. j. absolutna vrednost poluprečnika r, ugao između R_o i R_n, kao i položaj tačaka o, n, t. j. vektori položaja ovih tačaka R_o i R_n.

Postavimo zadatak:

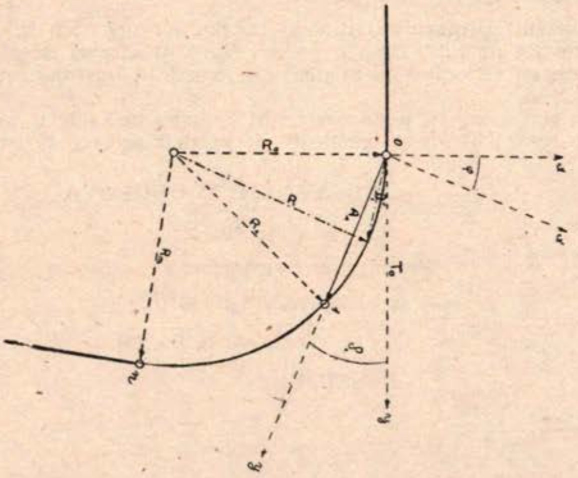
1.) Odrediti krivinu, odnosno luk, od tačke nul do n ortogonalno sa baze $A_1, A_2 \ldots A_n$ tako da bude $x'_{maks} < m$ gde je m maksimalna vrednost upravne na A_n.

2.) Odrediti istu krivinu polarno iz tačaka 0, 1, ... n.

Rešenje:

Uzmimo prethodno centar kruga sa poluprečnikom r kao ishodište koordinatnog sistema (x, y) te pravac na tačku o kao nulti pravac.

Stavimo osim toga:



Slika 1.

$$A = a_\alpha = a_{180} \quad (\varrho) = \varrho_n - \varrho_o$$

$$B = b_\beta = b_{90} \quad (\Delta \varrho) = \varrho - \varrho_o$$

$$\varphi = \delta = \frac{(\varrho)}{2}$$

$$\Delta \varphi = \frac{(\Delta \delta)}{1}$$

onda će biti:

$$1) \quad A_n = A^{\varphi}$$

$$2) \quad B'_n = [B_{\Delta\varphi}]_{-\varphi}$$

vektorsko rešenje ovog zadatka za obadva slučaja.

Numerički primer.

To, Tn, položaj tačaka o, n, određeni su.

Osim toga neka je:

$$R_o = 500_0$$
$$R_n = 500_{98^0}$$

Traže se:

a.) ortogonalni podatci u svrhu iskolčenja kružnog luka u intervalu od 0^0—98^0 pod uslovom, da maksimalna vrednost upravne ne prelazi iznos od 20,00 odnosno

b.) podatci za polarno određivanje tačaka na upitnom krugu.

Rešenje:

1.) Biramo (ϱ) prema postavljenom uslovu, n. pr.

$(\varrho) = 30^0$, pa je h = 500 . 0,0341 = 17,05 = x' maks

a onda je:

$a = r \text{ chord } \varrho = 500 . 0{,}5176 = 258{,}80$
$\varphi_1 = \delta_1 = 15^0$ te iz toga:
$A_1 = 258{,}80_{180} + \varphi 1 = 258{,}80_{195^0}$
2.) Za određenu dužinu luka l, n. pr.

$$l = 96{,}0 \qquad \text{biće } (\Delta\varrho) = \frac{96{,}0}{500{,}0} = 0{,}19199 \text{ ili}$$

$$(\Delta\varrho^0) = 11^0 \qquad \text{te} \qquad \Delta\varphi_1 = 5^0 30'$$

Prema tome će biti:

$$b = r \text{ chord } \Delta\varrho = 95{,}85$$
$$B_{\Delta\varphi_1} = 95{,}85_{90^0 + 5^0 30'} = 95{,}85_{95{,}5^0}$$
$$B'_1 = 95{,}85_{95{,}5^0 - \varphi_1} = 95{,}85_{80{,}5^0}$$

i sada će biti

a.) u ortogonalnom koordinatnom sistemu

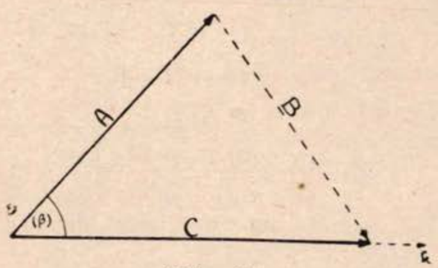
$$\underline{\underline{y'_1 = 95{,}85 \sin 80{,}5^0 = 94{,}53}}$$
$$\underline{\underline{x'_1 = 95{,}85 \cos 80{,}5^0 = 15{,}82}}$$

b.) u polarnom koordinatnom sistemu, ako uzimamo $T_{0\,180}$ kao nulti pravac, odmah

$$B'_1 = 95{,}85_{95{,}5^0} + {}_{90^0} = 95{,}85_{185{,}5_0}$$

Na ovaj način možemo odrediti proizvoljno mnogo tačaka na upitnom luku, bilo pod uslovom određenih razmaka na luku (kao u našem slučaju) ili pod drugim uslovima, kao n. pr. na svaki stepen ili određeni stepen, na jednakim odstojanjima u pravcu usvojene baze A, ili slično.

Osim toga baza A ne mora biti sekanta, nego može biti i tangenta, te je u tom slučaju $B'_n = B_{\Delta\varphi}$ i prema tome postoji dosta mogućnosti, da se prilagodimo terenu.



Slika 2.

REŠAVANJE TROUGLOVA

1. Slučaj:

Poznate su dve strane
a, c, te zahvaćeni ugao (β)

Traži se: b, (γ), (α)

REŠENJE:

$$B = C - A$$

Objašnjenje:

Ovo rešenje možemo skalarno iskoristiti na dva načina:

a.) Stavimo prethodno: $\gamma = o$
onda je $\alpha = -(\beta)$,
ako radimo u levom koord. sistemu.

I sada je

$$A = a(\cos\alpha + i\sin\alpha) = x_1 + i\,y_1$$
$$C = c(\cos o + i\sin o) = x_3 + i\,y_3 = C$$

a iz toga

$$B = x_2 + i\,y_2 = (C - x_1) + i\,(-y_1)$$

Cepanjem realnog od imaginarnog dela dobivamo skalare:

$$x_2 = C - x_1 \qquad b = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$
$$y_2 = \ \ -y_1$$

$$\text{pravac} \quad \beta = \text{arc. tg} \frac{y_2}{x_2}$$

Na ta način smo odredili B = b_β i sada možemo, ako nam je potrebno, odrediti i uglove (γ), (α) iz relacije

$(\alpha) = \beta$

$(\gamma) = 180 - (\beta + \alpha)$

2. način

b.) Po istom osnovu ćemo imati, ako podignemo obe strane na kvadrat

$B \cdot B = (C - A) \cdot (C - A)$

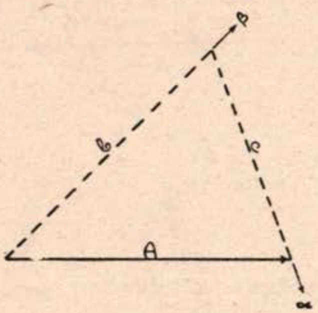
$B \cdot B = C \cdot C - 2\,AC + AA$ odnosno, pošto je to skalarni proizvod:

$b^2 = c^2 - 2\,ac \cos(\gamma - \alpha) + a^2$

iz čega dobivamo absolutnu vrednost vektora B, dok se time istovremeno dokazuje i kosinusna teorema.

Nepoznate uglove (α), (γ) računamo dalje po sinusnoj teoremi, što nam je dovoljno poznato iz prakse.

2. Slučaj



Slika 3.

Poznato je: Jedna strana = a

i dva ugla (β), (γ).

Traže se absolutne vrednosti strana b, c.

Stavimo: $\alpha = o$ pa će biti

$\beta = -(\gamma)$

$\gamma = \ (\beta)$

Iz toga onda

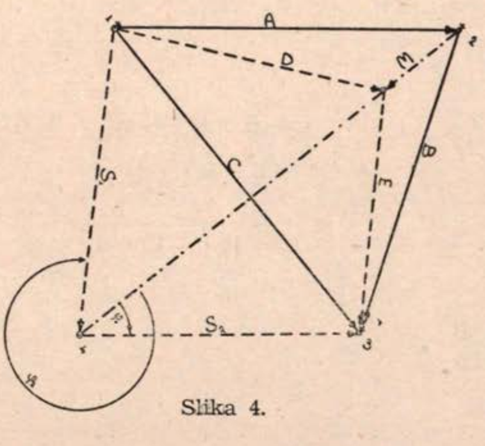
REŠENJE

$$b = A\,\frac{\gamma}{\beta} \qquad\qquad c = A\,\frac{\beta}{\lambda}$$

iz čega sledi n. pr. za b:

$$b = a_0 \frac{\gamma}{\beta} = a\,\frac{\sin(-\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)} = a\,\frac{-\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}$$

POTENOTOV PROBLEM.



Slika 4.

Poznato je: $\left.\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right\{ x, y \Big\}$

t. j. vektori A, B, C

Merneno je: φ_1, φ_2

Traži se vektor položaja tačke 4 t. j. R_4

Stavimo:

1.) $C = A + B = D + E = S_1 + S_2$

2.) $M = D - A = B - E$

Pošto iz merenih podataka dobivamo

$$\| D \| = \delta = \gamma - \varphi_1 \qquad \| E \| = \varepsilon = \gamma - \varphi_2$$

i pošto na osnovu jednačina pod 1.) i 2.) dobivamo

$$d = C\frac{\varepsilon}{\delta} \qquad e = C\frac{\delta}{\beta}$$

$$M = D - A = B - E = x + iy$$

$$\| M \| = \mu = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$$

$$\| S_1 \| = \sigma_1 = \mu + \varphi_2 \qquad \| S_2 \| = \sigma_2 = \mu + \varphi_1$$

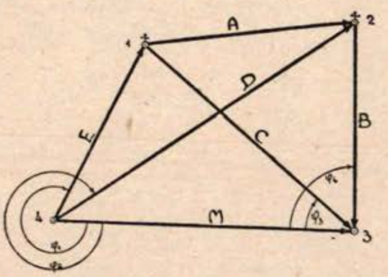
$$S_1 = C^{\sigma_2}_{\sigma_1} \cdot \qquad S_2 = C^{\sigma_1}_{\sigma_2}$$

to možemo sada napisati

$$R_4 = R_1 + C^{\sigma_2}_{\sigma_1} \qquad = R_3 - C^{\sigma_1}_{\sigma_2}$$

i to je rešenje Poteotovog problema.

HANSENOV PROBLEM.



Slika 5.

Poznato: $1_2\{x, y\}$ Vektor A

Mereno: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\ \varphi_4$

Traže se: Vektori položaja za tačke ⊙ 3, ⊙ 4 t. j. R_3, R_4

Stavimo:

1.) $M = E + C = D + B$

2.) $A = D - E = C - B$

Iz merenih podataka dobivamo:

$$\| B \| = \beta = \mu + \varphi_4 \qquad \| C \| = \gamma = \mu + \varphi_3$$

$$\| D \| = \delta = \mu + \varphi_2 \qquad \| E \| = \varepsilon = \mu + \varphi_1$$

dok iz jednačina pod 1.) i 2.) sledi:

$$B = M^{\delta}_{\beta} = M^{\varphi_2}_{\varphi_4}$$

$$C = M^{\varepsilon}_{\gamma} = M^{\varphi_1}_{\varphi_3}$$

$$D = M^{\beta}_{\delta} = M^{\varphi_4}_{\varphi_2}$$

$$E = M^{\gamma}_{\varepsilon} = M^{\varphi_3}_{\varphi_1}$$

$$A = C - B = M^{\varphi_1}_{\varphi_3} - M^{\varphi_2}_{\varphi_4}$$

$$A = D - E = M^{\varphi_4}_{\varphi_2} - M^{\varphi_3}_{\varphi_1}$$

$$M = \frac{A}{1^{\varphi_1}_{\varphi_3} - 1^{\varphi_2}_{\varphi_4}} = \frac{A}{1^{\varphi_4}_{\varphi_2} - 1^{\varphi_3}_{\varphi_1}}$$

Prema tome možemo napisati:

3.) $R_3 = R_1 + C = R_2 + B$

4.) $R_4 = R_1 - E = R_2 - D$

i to je rešenje Hanesenovog problema.

POVRŠINA.

Međusobnim spajanjem triju tačaka nastaje osnovni oblik površine, čija se općenita vrednost može izraziti sa

$$p = f(x, y)$$

Ako stavimo $f(x, y) \equiv \frac{x \cdot y}{2}$ onda time dobivamo osnovni obrazac, sa kojim je određena površina trougla. U specijalnom slučaju ova površina može biti nula ako je jedan od faktora jednak nuli.

Svi ostali oblici, koje izvesna površina može da prima, samo su kombinacije ovog osnovnog oblika. Ma kakav oblik imala međutim jedna površina, ona je uvek određena izrazom

$$p = f(x, y)$$

Zahtevi prakse stvorili su osim ovog osnovnog oblika, t. j. trougla i neke druge osnovne oblike, kao n. pr. pravougaonik, kvadrat, trapez, romb i t. d. gde je za svaki od ovih oblika dat poseban obrazac za određivanje vrednosti odgovarajućih površina. Ovi izrazi nisu međutim ništa drugo, osim razni oblici, koje poprima $f(x, y)$ u određenom slučaju.

Nakon ovih razmatranja prelazimo na vektore.

U prostoru sa dve dimenzije biće tri tačke određene sa tri vektora položaja R_i te će spajanjem tih tačaka biti određen i osnovni oblik površine — trougao.

Sa svoje strane, svaka dva vektora položaja određuju po jedan vektor M_i gde je

$$M_i = R_{i+} - R_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Mi možemo pri tome u svakom slučaju odrediti M_i tako, da bude

$$\Sigma M_i = o = A + B + C$$

Iz $A + B + C = o$ sledi međutim, da je n. pr. $A + B = C_{180}$ ili $A + C = B_{180}$ i t. d. odnosno, ako stavimo $A + B + C_{180} = o$ onda je $A + B = C$ i t. d.

Prema tome, ma koji od ova tri vektora, zavisan je od ostala dva, tako da su i tri tačke u ravni dovoljno određene sa dva od tri vektora, za koje važi

$$\Sigma M_i = o \quad (i = 1, 2, 3)$$

U koliko bi međutim jedan od vektora M_i padao u pravac jednog od ostala dva, onda nastupa specijalan slučaj, u kome se tri tačke nalaze u jednoj pravi, te se prema tome trougao n e može ostvariti.

Kao što je $p = f(x, y)$ tako će biti i $P = f(M, N)$ gde će za osnovni oblik — trougao — u našem slučaju biti

$$\text{a.)} \quad |2P| = |B \times C| = |A \times B| = |A \times C|$$

analogno

$$2p = x \cdot y = a \cdot h$$

Ako u slučaju pod a.) dovedemo dva odgovarajuća vektora na jedan zajednički početak i ako ovaj početak izaberemo za ishodište jednog novog koordinatnog sistema (x, y), onda možemo napisati

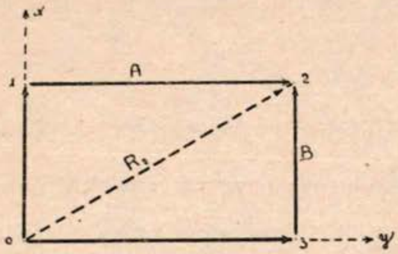
$$\text{b.)} \quad |2P| = |R_1 \times R_2|$$

Pošto su, kao što je uvodno navedeno, svi ostali oblici površina samo razne kombinacije osnovnog oblika, to će i površina makakvog oblika biti određena sa

$$\text{c.)} \quad |2P| = \left| \sum_{K=1}^{K=n} R_K \times R_{K+1} \right|$$

Ako je to tačno, onda moraju i svi ostali obrasci, koji su nam poznati iz prakse slediti iz ovog temeljnog obrasca.

I zaista — uzmimo n. pr. oblik pravougla:



Slika 6.

Poznat obrazac za računanje površine pravougla je

$$p = a \cdot b = x \cdot y$$

Prema obrascu pod c.) je

$$|2P| = \left|\sum_{K=1}^{K=n} R_K \times R_K\right|$$

Za pravougaonik biće n = 3, pa je

$$|2P| = |R_1 \times R_2 + R_2 \times R_3|$$

Pošto je $R_2 = R_1 + R_3$ to je

$$|2P| = |R_1 \times (R_1 + R_3) + (R_1 - R_3) \times R_3|$$

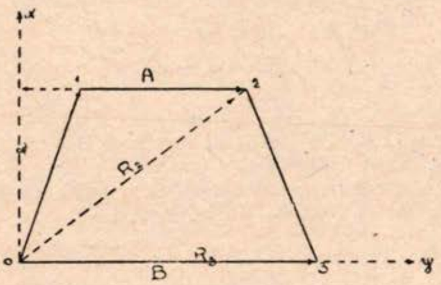
odnosno $|2P| = |O + R_1 \times R_3 + R_1 \times R_3 + O|$

i $|P| = |R_1 \times R_3|$ a pošto je prema pretpostavci

$R_1 \perp R_3$ te $R_1 = B$, $R_3 = A$

to je $|P| = p = r_1 . r_3 = a . b$

Posmatrajmo dalje n. pr. poznati obrazac iz planimetrije za površinu trapeza.



Slika 7.

Tu je $p = \frac{a + b}{2} \cdot h$

Prema našem obrascu je

$$|2P| = \left|\sum_{K=1}^{K=n} R_K \times R_{K+1}\right|$$

Osim toga je u trapezu (vidi sliku)

$A = a_0$
$R_2 = R_1 + A$
$R_3 = B = b_0 = m A$
$h = r_1 \sin \varrho_1$
$n = 3$

dakle $|2P| = |R^1 \times R_2 + R_2 \times R_3| = |R_1 \times (R_1 + A) + (R_1 + A) \times R_3|$

odnosno usled $R_3 = B = m A$

$$|2P| = |R_1 \times R_1 + R_1 \times A + R_1 \times B + A \times m A|$$

$$|2P| = |\quad O \quad + R_1 \times A + R_1 \times B + \quad O \quad|$$

$$|2P| = r_1\, a \sin \varrho_1 + r_1\, b \sin \varrho_1 = a h + b h$$

t. j. $|2P| = 2p = h(a + b)$

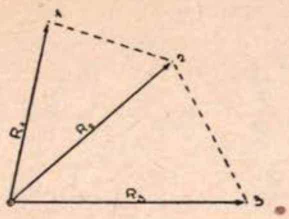
ili

$$p = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

U praksi postoje u glavnom dve metode određivanja površine, polarna i ortogonalna.

Naš obrazac važi za obadve metode.

Tako je n. pr. za četverougao, koji je snimljen polarnom metodom:



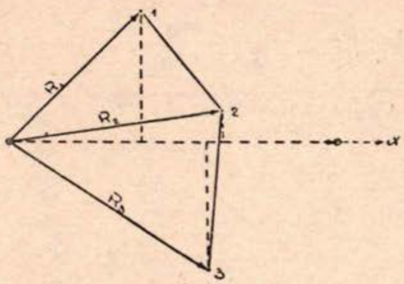
$$2\,p = |R_1 \times R_2 + R_2 \times R_3|$$

odnosno $2\,p = r_1\, r_2 \sin(\varrho_2 - \varrho_1) + r_2\, r_3 \sin(\varrho_3 - \varrho_2)$

što sledi iz definicije vektorskog proizvoda.

Slika 8.

Ako je isti četvorougao snimljen ortogonalnom metodom



onda je opet

$$2\,p = |R_1 \times R_2 + R_2 \times R_3|$$

gde će biti:

$$R_1 = x_1 + i\,y_1$$

$$R_2 = x_2 + i\,y_2$$

$$R_3 = x_3 + i\,y_3$$

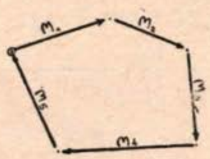
Slika 9.

i konačno

$$2\,p = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \triangle_1 + \triangle_2$$

Sve ovo možemo proširiti na proizvoljan zatvoren poligon, za koji važi isti obrazac, koji je uvodno naveden.

Jednu kontrolu za obračunatu površinu dobivamo iz alternacije vektorskog proizvoda, za koju važi



$$R_1 \times R_2 = -(R_2 \times R_1)$$

Kao druga kontrola mora biti:

$$\Sigma M = o$$

Slika 10.

što je očigledno, ako zatvorimo naš poligon, kao što je prikazano u slici.

U svim dosadašnjim rasmatranjima služili smo se vektorskim proizvodom vektora.

Mi se možemo međutim isto tako služiti i algebarskim proizvodom vektora, jer je

$$R_1 \times R_2 = \overline{R}_1\, R_2{}^0_{90}$$

t. j.

$$\overline{R}_1\, R_2{}^0_{90} = [r_1\, r_{2_{\rho_2 - \rho_1}}]^0_{90}$$

$$[r_1\, r_{2_{\rho_2 - \rho_1}}]^0{}_{90} = \left[r_1\, r_2\, \frac{\sin(\varrho_2 - \varrho_1) - \sin o}{\sin 90 \qquad - \sin o}\right]_{90} = [r_1\, r_2 \sin(\varrho_2 - \varrho_1)]_{90}$$

Pošto je $\quad r_1\, r_2 \sin(\varrho_2 - \varrho_1) = r_2 \sin \varrho_2 \cdot r_0 \cos \varrho_1 - r_2 \cos \varrho_2 \cdot r_1 \sin \varrho_1$

odnosno $\quad r_1\, r_2 \sin(\varrho_2 - \varrho_1) = y_2\, x_1 - x_2\, y_1$

to je, ako smo snimali ortogonalno isto tako:

$$\overline{R}_1\, R_2 \frac{0}{90} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \triangle$$

ili, ako smo snimali polarno

$$\overline{R}_1\, R_2 \frac{0}{90} = r_1\, r_2 \sin(\varrho_2 - \varrho_1)$$

te je prema tome dokazano, da su uvodno navedena dva izraza potpuno ekvivalentna, dok nam n. pr. izraz

$$2\, p = (r_1\, r_{2_{\rho_2 - \rho_1}} + r_2\, r_{3_{\rho_3 - \rho_2}} + \cdots r_{n1}\, r_{n\,\rho n - \rho n1})\, \frac{0}{90}$$

daje osim toga i preciznu uputu za grafičko određivanje površine.

(Nastaviće se)

Geodetska poduzeća trebaju propagirati naš list među stručnjacima, osigurati saradnju u listu i povećati broj pretplatnika.
