

Izjednačenje poligonskog vlaka metodom uslovnih opažanja

U našoj geodetskoj literaturi malo se do sada tretiralo pitanje izjednačenja poligonskog vlaka metodom uslovnih opažanja.

Kako će se u mnogim riješenjima primijeniti metoda precizne poligonometrije za određivanje položaja stalnih točaka, to za ovu metodu mjerena ne mogu zadovoljiti načini izjednačenja kako ih propisuju naše dosadašnje instrukcije.

U ovim radovima neće poligonski vlakovi biti više kratki, a u poligonometriji nižih redova doći će sve više do primjene instrumentarija za precizno optičko mjerjenje dužina.

O rezultatima mjerena ovakovim priborom Zeissove konstrukcije bilo je govora u našem listu*. Kasniji radovi na poligonometrijskom rješenju mreže Karlovca, kombiniranom rješenju na Rijeci, zatim poligonometrija duž Save od Zagreba do Rugvice, te duž rijeke Bosne od Šamca do Modriče potpuno su potvrdili u članku iznesene navode i očekivanja.

Pored toga rezultati mjerena dužina instrumentom Redta, pogotovo ako se on kombinira s poligonalnim priborom, govore o velikim mogućnostima korišćenja ovog instrumenta u navedenoj metodi rada.

U ovim radovima biti će poligonski vlakovi dugački, više ili manje iskrivljeni i nejednakih strana, prema tome nepravilni. Sve te okolnosti — dužina vlaka (5—12 km), nepravilni oblici, utjecaji sistematskog karaktera kod optički mjerjenih vlakova, — govore da za izjednačenje vlaka precizne poligonometrije treba primijeniti točniju metodu.

Ja će u ovom članku prikazati jedan pojednostavljeni način izjednačenja metodom uslovnih opažanja, koji bi se mogao s uspjehom primijeniti u poligonometriji nižih redova, kako ga je razradio Dr. Förstner.**

Dr. Eggert je u članku: »Die Ausgleichung von Polygonzügen nach der Methode der kleinsten Quadrate«. (Zeitschrift für Vermessungswesen. Bd. LVII. 1928. S. 657.), razradio izjednačenje poligonskog vlaka proizvoljnog oblika metodom uslovnih opažanja. Pri tome je uzeo da u takovom vlaku postoje pogreške samo slučajnog karaktera, t. j. poligonski vlak se izravnava samo obzirom na točnost mjerena dužina i prelomnih kutova u vlaku. Prema tome se dakle predpostavlja da sistematske pogreške ne postoje ili da su toliko male da se nalaze unutar veličina slučajnih pogrešaka. Uvedeno je još težište vlaka kao ishodište pomoćnog koordinatnog sistema. Slični načini izjednačenja primjenjuju se i tretiraju u ruskoj praksi i literaturi (Prof. V. V. Danilov »Točnaja poligonometrija« — Moskva 1946).

* Janković: »Rezultati mjerena Zeissovim priborom za točnu poligonometriju i Zeissovom invar letvom od 3 m.« Geod. list 1947 br. 1.

** G. Forstner: Ausgleichung von Polygonzügen. ZfV. 62, S. 49—60, 101—114 (1933).

Metoda izjednačenja po Eggertu može se upotrebiti u poligonometriji viših redova, gdje se za mjerjenje dužina poligonskih strana upotrebljavaju invarne žice i bazisni pribor Jäderina, i gdje se sistemom Laplaceovih azimuta povećava točnost u absolutnom smještaju poligonskog vlaka; drugim riječima tamo, gdje su dužine poligonskih vlakova od 50—200 km.

Za naše prilike i ranije navedeni instrumentarij ova metoda nije više ekonomična obzirom na točnost, koja se od ovakovih radova zahtijeva.

Kod rada priborom za preciznu poligonometriju i optičkim mjerjenjem dužina postavljamo vlakove unutar mreže III. reda, kod nas u Gauss-Krügerovom koordinatnom sistemu.

Ova okolnost, kao i sama metoda mjerjenja i pribor, izaziva u mjerjenju dužina pogreške sistematskog karaktera, koje je Förstner označio kao pogreške mjerila. Ove pogreške su uglavnom dvojake:

1. sistematske ravnomjerne i
2. sistematske neravnomjerne.

U prvu skupinu spadaju:

a) Sistematske pogreške uslijed razlike u horizontu projekcionog sistema (linearna deformacija sistema i razlika nivoa). Ove se pogreške mogu računskim putem ukloniti iz rezultata mjerjenja prema poznatim formulama za redukciju dužina na ravninu projekcije i redukcijom na niveau — plohu mora.

b) Mjerače letve sadrže u sebi male nesuglasice preostale poslije komparacije. U našim prilikama i ne dolazi do komparacije, jer nemamo uređaja za komparaciju ovakovih letava. Ovo izaziva stanovite pogreške sistematskog karaktera. Inače, kad bi imali certifikat komparacije mogli bi ove pogreške računskim putem ukloniti iz rezultata mjerjenja.

U drugu skupinu spadaju:

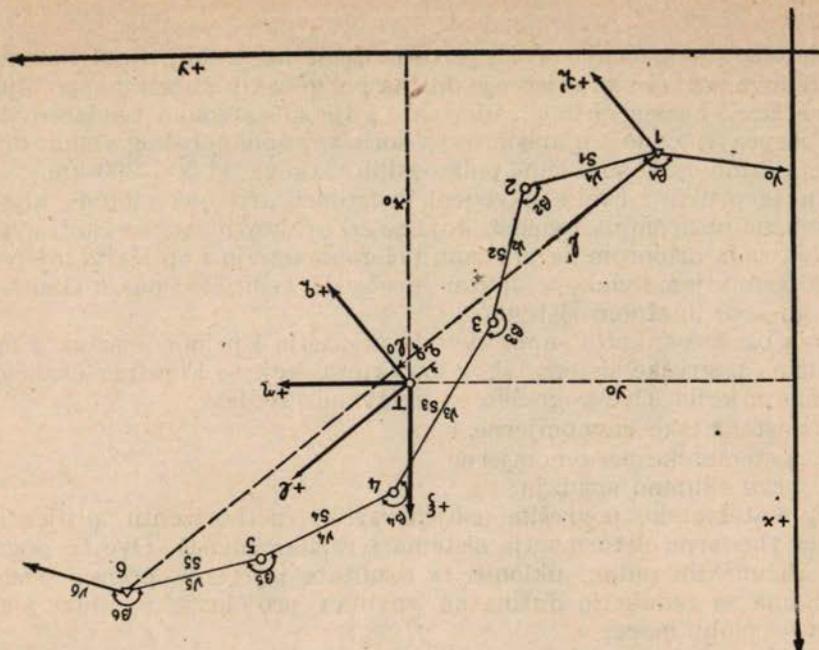
c) Poligonsku mrežu priklučujemo na trigonometrijske točke čiji položaj smatramo bespogrešnim, a to u stvari nije ispunjeno i prema tome unose se u rezultate linearnih mjerjenja pogreške sistematskog karaktera, ali neravnomjerne i ove ne možemo računskim putem ukloniti.

d) Kod optičkog mjerjenja dužina terestrička i bočna refrakcija jednostrano djeluju na rezultate mjerjenja, a to su uzroci čije zakone djelovanja i veličinu ne možemo odrediti, te prema tome ti uzroci unose u rezultate linearnih mjerjenja sistematske pogreške neravnomjerne naravi, koje također ne možemo računski eliminirati.

Sve ove pogreške zajedno čine pogrešku mjerila, koju ćemo u dalnjim tumačenjima označiti sa **dm**.

Sistematske pogreške u mjerenu kutova su u našem slučaju upotrebom poligonalnog pribora i prisilnim centriranjem svedene na takovu mjeru, da možemo smatrati da se praktički nalaze unutar granica slučajnih pogrešaka u mjerenu prelomnih i paralaktičkih kutova.

Förstner je pošao od osnovnih razlaganja Dr. Eggerta i uveo ovu pogrešku mjerila kao novu nepoznanicu u izjednačenje poligonskog vlaka, ali je uveo i novi pomoći koordinatni sistem, čija je abscisna os paralelna sa dijagonalom vlaka L, pravilno smatrajući da matematski izvodi Eggerta vrijede za bilo koji koordinatni sistem, pa i za ovaj, kojega ćemo nazvati l,q-sistem (slika 1).



Sl. 1

U daljnim tumačenjima navedene oznake znače:

- s = mjerene dužine strana
- λ = njihove vjerovatne popravke
- β = mjereni prelomni kutovi
- v = njihove vjerovatne popravke
- y_i, x_i = koordinate poligonskih točaka u pravokutnom koordinatnom sistemu premjera
- y_n, x_n = koordinate završne točke vlaka
- l, q = koordinate točaka u l, q -sistemu obzirom na težište kao ishodište
- l', q' = koordinate točaka vlaka obzirom na početak vlaka kao ishodište
- l_0, q_0 = koordinate težišta u l, q -sistemu
- $\Delta y, \Delta x$ = koordinatne razlike
- $d\Delta y_i, d\Delta x_i$ = popravke koordinatnih razlika
- f_x, f_y = odstupanja po osi X i Y
- f_l, f_q = uzdužna i poprečna odstupanja u poligonskom vlaku
- n = broj točaka u vlaku, uključujući početnu i završnu točku, odnosno broj svih prelomnih i veznih kutova
- ω_β = kutna nesuglasica u vlaku
- ω_y, ω_x = koordinatne nesuglasice u vlaku prije eliminiranja kutne nesuglasice.

U citiranom članku Dr. Eggerta jednadžbe pogrešaka u poligonskom vlaku prestavljene su formulama oblika (1):

$$\left. \begin{aligned} [v] + \omega_\beta &= 0 \\ \left[\frac{\Delta y}{s} \lambda \right] + \frac{1}{\varrho} [(x_n - x_i) v_i] + \omega_y &= 0 \\ \left[\frac{\Delta x}{s} \lambda \right] + \frac{1}{\varrho} [(y_n - y_i) v_i] + \omega_x &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (1)$$

Uvedemo li koordinate težišta vlaka $\frac{[y]}{n} = y_0$ i $\frac{[x]}{n} = x_0$ i koordinate točaka vlaka obzirom na težište kao početak $(y_i - y_0) = \eta_i$ i $(x_i - x_0) = \xi_i$, te ako uzmemo u obzir da kutna odstupanja podijelimo predhodno podjednako na sve kutove u vlaku gornje će jednadžbe poprimiti ovakav oblik:

$$\left. \begin{aligned} [v] &= 0 \\ \left[\frac{\Delta y}{s} \lambda \right] - \frac{1}{\varrho} [\xi v] - f_y &= 0 \\ \left[\frac{\Delta x}{s} \lambda \right] + \frac{1}{\varrho} [\eta v] - f_x &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (2)$$

Na slici 1. prikazan je poligonski vlak u pravokutnom koordinatnom sistemu projekcije i u t. zv. l,q-sistemu. Koordinate točaka u l,q-sistemu računamo po formulama transformacije:

$$\left. \begin{aligned} l' &= (y_i - y_1) \sin \varphi + (x_i - x_1) \cos \varphi \\ q' &= (y_i - y_1) \cos \varphi - (x_i - x_1) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \quad (3)$$

Gdje su y_1 x_1 koordinate početka vlaka, a φ se računa po formuli:

$$\tan \varphi = \frac{|\Delta y|}{|\Delta x|}$$

Prema tome ovo su koordinate, koje se odnose na početnu točku u laku kao koordinatni početak. Koordinate težišta vlaka nalaze se po formulama:

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{|l'|}{n} & |l'| &= l'_1 + l'_2 + l'_3 + \dots \\ q_0 &= \frac{|q'|}{n} \end{aligned}$$

Na temelju toga će koordinate pojedinih točaka vlaka obzirom na težište kao koordinatni početak biti:

$$\begin{array}{ll} l_1 = l'_1 - l_0 & q_1 = q'_1 - q_0 \\ l_2 = l'_2 - l_0 & q_2 = q'_2 - q_0 \\ \cdots & \cdots \\ l_n = l'_n - l_0 & q_n = q'_n - q_0 \\ \hline [l] = 0 & [q] = 0 \end{array}$$

Analogno formulama (2) biti će jednadžbe pogrešaka za lq sistem:

$$\left. \begin{array}{l} [v] = 0 \\ \left[\frac{\Delta q}{s} \lambda \right] - \frac{1}{\varrho} [l v] - f_q = 0 \\ \left[\frac{\Delta l}{s} \lambda \right] + \frac{1}{\varrho} [q v] - f_l = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (4)$$

gdje su f_l i f_q linearno uzdužno i linearno poprečno odstupanje u poligonskom vlaku, a računaju se također po navedenim formulama transformacije:

$$\left. \begin{array}{l} f_l = f_y \sin \varphi + f_x \cos \varphi \\ f_q = f_y \cos \varphi - f_x \sin \varphi \end{array} \right\} \quad \dots \quad (5)$$

Ranije navedena pogreška mjerila djeluje proporcionalno dužinama strana, i ako je uvedemo u jednadžbe pogrešaka, poprimiti će ove slijedeći oblik:

$$\left. \begin{array}{l} [v] = 0 \\ \left[\frac{\Delta q}{s} \lambda \right] - \frac{1}{\varrho} [l v] + [\Delta q] dm - f_q = 0 \\ \left[\frac{\Delta l}{s} \lambda \right] + \frac{1}{\varrho} [q v] + [\Delta l] dm - f_l = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (6)$$

U jednadžbama (6) $[\Delta q] = 0$, a koeficijenti uz nepoznanice predstavljeni su u tablici 1.

Tablica 1

v_1	v_2	...	v_n	λ_1	λ_2	...	λ_n	dm	f	p	korelate	koeficijenti
1	1	1	—	—	—	—	—	$\frac{1}{m^2 \beta}$	k_1	e
$-\frac{1}{\varrho} l_1$	$-\frac{1}{\varrho} l_2$	$-\frac{1}{\varrho} l_n$	$\frac{\Delta q_1}{s_1}$	$\frac{\Delta q_2}{s_2}$	$\frac{\Delta q_n}{s_n}$	—	f_q	$\frac{1}{m^2 \beta}$ ili $\frac{1}{m^2 s}$	k_2	a
$\frac{1}{\varrho} q_1$	$\frac{1}{\varrho} q_2$	$\frac{1}{\varrho} q_n$	$\frac{\Delta l_1}{s_1}$	$\frac{\Delta l_2}{s_2}$	$\frac{\Delta l_n}{s_n}$	Δl	f_l	$\frac{1}{m^2 \beta}$ ili $\frac{1}{m^2 s}$	k_3	b

Radi jednostavnosti postaviti ćemo da su koeficijenti uz nepoznanice u prvoj jednadžbi »c« u drugoj »a«, a u trećoj »b«. Ako pretpostavimo da smo prelom kutove mjerili jednakom točnošću t. j. sa srednjom pogreškom m_β , a dužine sa srednjom pogreškom m_s , to će težine biti predstavljene formulama:

$$p_\beta = \frac{1}{m_\beta^2}, \quad p_s = \frac{1}{m_s^2},$$

$m_s^2 = \mu^2 s$, gdje je μ srednja pogreška jedinice dužine. Ako jednu i drugu gornju formulu pomnožimo još sa μ^2 , bit će težine izražene jednadžbama (7):

$$p_\beta = \frac{\mu^2}{m_\beta^2}, \quad p_s = \frac{1}{s} \quad \dots \quad (7)$$

Pomoći tablice 1 računamo koeficiente normalnih jednadžbi, koji će glasiti:

$$\begin{aligned} [cc] &= n \frac{m_\beta^2}{\varrho^2} & [ab] &= \left[\frac{\Delta l \Delta q}{s^2} m_s^2 \right] + [1q] \frac{m_\beta^2}{\varrho^2} \\ [aa] &= \left[\frac{\Delta q \Delta q}{s^2} m_s^2 \right] + [ll] \frac{m_\beta^2}{\varrho^2} & [ac] &= \frac{1}{\varrho} [l] = 0 \\ [bb] &= \left[\frac{\Delta l \Delta l}{s^2} m_s^2 \right] + [qq] \frac{m_\beta^2}{\varrho^2} & [bc] &= \frac{1}{\varrho} [q] = 0 \end{aligned}$$

Prema tome će normalne jednadžbe korelata biti:

$$\left. \begin{array}{l} [cc] k_1 + \dots + \dots = 0 \\ \dots [aa] k_2 + [ab] k_3 + \dots - f_q = 0 \\ \dots [ab] k_2 + [bb] k_3 + [\Delta l] dm - f_l = 0 \\ \dots [\Delta l] k_3 + \dots = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (8)$$

Iz ovih normalnih jednadžbi odmah možemo sračunati:

$$k_1 = 0, \quad k_3 = 0, \quad k_2 = \frac{f_q}{[aa]} \quad \dots \quad (9)$$

$$dm = \frac{f_l}{[\Delta l]} - \frac{[ab]}{[aa]} \frac{f_q}{[\Delta l]} \quad \dots \quad (10)$$

Jednadžbe popravaka su, prema teoriji pogrešaka, prestavljene formulom u općenitom obliku:

$$v = \frac{1}{p} (a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + \dots) \quad \dots \quad (11)$$

Za naš slučaj možemo napisati

$$v = \frac{1}{p} (ck_1 + ak_2 + bk_3)$$

pa će popravke kutova i dužina biti:

$$v_i = - \left(\cdot \frac{f_q}{[aa]} \cdot \frac{l_i}{\varrho} \cdot \right); \quad \lambda_i = + \frac{f_q}{[aa]} \cdot \frac{\Delta q_i}{s_i} \quad \dots \quad (12)$$

Sa ovim popravkama kutova i dužina popravili bi sada sve mjerene prelomne kutove u vlaku i sve mjerene dužine, i tako računali definitivne koordinate poligonskih točaka. Međutim mi u praksi tako ne radimo, nego računamo popravke koordinatnih razlika. One se računaju po formulama:

$$\left. \begin{aligned} d\Delta y' &= \frac{\lambda}{s} \Delta y + \frac{d\nu}{\varrho} \Delta x \\ d\Delta x' &= \frac{\lambda}{s} \Delta x - \frac{d\nu}{\varrho} \Delta y \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (13)$$

Popravke smjernih kutova d) računamo po formulama:

$$\begin{aligned} d\nu_1 &= v_1 & d\nu_n &= v_1 + v_2 + \dots + v_n \\ d\nu_2 &= v_1 + v_2 \end{aligned}$$

Uzveši u obzir i pogrešku dm biti će popravke koordinatnih razlika prestavljene jednadžbama (14)

$$\begin{aligned} d\Delta y_i &= \frac{f_q}{[aa]} \left\{ \frac{\Delta q_i}{s} \frac{m_s^2}{s} \Delta y - [l_i]_{i=1}^{i=n} \frac{m_\beta^2}{\varrho^2} \Delta x \right\} + dm \Delta y \\ d\Delta x_i &= \frac{f_q}{[aa]} \left\{ \frac{\Delta q_i}{s} \frac{m_s^2}{s} \Delta x + [l_i]_{i=1}^{i=n} \frac{m_\beta^2}{\varrho^2} \Delta y \right\} + dm \Delta x \end{aligned} \quad (14)$$

Označimo popravku dužina sa h:

$$h = \frac{f_q}{[aa]} m_s^2 \frac{\Delta q_i}{s^2},$$

a popravku pravca sa g:

$$g = - \frac{f_q}{[aa]} \frac{m^2}{\varrho^2} [l_i]_{i=1}^{i=n}$$

to možemo jednadžbe popravaka koordinatnih razlika napisati ovako:

$$\left. \begin{aligned} d\Delta y &= h \Delta y + g \Delta x + dm \Delta y \\ d\Delta x &= -g \Delta y + h \Delta x + dm \Delta x \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (15)$$

Za kontrolu mora biti:

$$[d\Delta y] = f_y$$

$$[d\Delta x] = f_x$$

U jednadžbe (15) ulazi nepoznаница dm , коју можемо računati po formuli (10). Međutim vlak se izjednačuje obzirom na točnost mjerjenja, па se prema tome ova pogreška može računati iz preostalih pogrešaka poslije računanja popravaka h i g . U tom će slučaju biti:

$$\left. \begin{aligned} dm[\Delta y] &= f_y - [(h\Delta y + g\Delta x)] = f'_y \\ dm[\Delta x] &= f_x - [(-g\Delta y + h\Delta x)] = f'_x \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (16)$$

$$dm = \frac{f'_y}{[\Delta y]} = \frac{f'_x}{[\Delta x]} \quad \dots \quad (17)$$

Veličine l' i q' mogu se računati po formulama (3). Međutim one se mogu dobiti i grafičkim putem, budući da za njihovo poznavanje nije potrebna veća točnost od 10 m. Prema tome se nacrti poligonski vlak u pogodnom mjerilu (1 : 10.000 ili 1 : 25.000, najbolje na milimetarskom papiru). Iz ovog se crteža grafički očita l' i q' .

Srednje pogreške mjerjenja kutova za razne instrumente računaju se prema podatku instrumenta i broju girusa i za neke instrumente iznose:

Instrument	Broj girusa	$\frac{m^2 \beta}{\varrho^2}$	m_β
Redta, Th IV	bez prisilnog centriranja, 1 girus	$\frac{1}{5}$	$\pm 12''$
Redta, Th IV	sa prisilnim centriranjem, 1 girus	$\frac{1}{20}$	$\pm 6''$
Th II, ThC i ThD	sa prisilnim centriranjem, 3 girusa	$\frac{1}{400}$	$\pm 1''$

Srednja pogreška mjerjenja dužina je za direktno mjerjenje vrpcama, žicama, instrumentima s klinovima kao Redta, Dimess, Wildove i Kernove naprave za precizno optičko mjerjenje dužina prestavljena formulom:

$$m_s = \mu \sqrt{s} \quad \dots \quad (18)$$

gdje je μ — srednja pogreška jedinice dužine — a možemo je računati po formuli:

$$\mu = \frac{f_s}{\sqrt{[s]}}$$

Na temelju podataka iz niza poligonskih vlakova možemo za stanovitu metodu mjerena dužina i za odgovarajućeg opservatora sračunati prosječno m_s i kao takovog uvoditi u daljnja računanja.

Međutim kod mjerena dužina bazinsim letvama, gdje prema veličini poligonske strane primjenjujemo odgovarajući način mjerena i postavljanja letve, srednja se pogreška m_s mjerena dužina odnosi prema samoj dužini nepovoljnije, nego što je dano u gornjem odnosu.

U tablici 2 navadamo ove srednje pogreške svrstane tabelarno, gdje se podrazumijeva da je s u hektometrima.

Tablica 2

Letva	Način mjerena strane	m_s
3 m	basizna letva na kraju	$\pm 1.57 \text{ s}^2$
2 m	pol. strane	$\pm 2.40 \text{ s}^2$
8 m	basizna letva u sredini	$\pm 0.57 \text{ s}^2$
2 m	pol. strane	$\pm 0.84 \text{ s}^2$
3 m	pomoćna baza na kraju	$\pm 0.40 \text{ s}^{1.5}$
2 m	pol. strane $B = \sqrt{ls}$	$\pm 0.47 \text{ s}^{1.5}$
3 m	pomoćna baza u sredini	$\pm 0.24 \text{ s}^{1.5}$
2 m	pol. strane $B = \sqrt{ls}$	$\pm 0.28 \text{ s}^{1.5}$

Za dužine strana, koje računamo pomoćnim poligonskim vlakom bit će srednja pogreška prestavljena formulom za srednju uzdužnu pogrešku:

$$M_i^2 = [qq] \frac{m_{\beta}^2}{q^2} + \left[\frac{\Delta l \cdot \Delta l}{s^2} m_s^2 \right] \quad \dots \quad (19)$$

Ako predpostavimo da je poligonski vlak ispružen t. j. $q = O$ bit će

$$M_i^2 = \left[\frac{\Delta l \cdot \Delta l}{s^2} m_s^2 \right] \quad \dots \quad (20)$$

Ako su u pomoćnom poligonskom vlaku i strane približno jednake onda je $\Delta l = s$, a $[\Delta l \Delta l] = (n-1) s^2$.

$$\begin{aligned} M_i^2 &= (n-1) m_s^2 \\ M_i &= m_s \sqrt{n-1} \end{aligned} \quad \dots \quad (21)$$

Izjednačenje je mnogo jednostavnije, ako su težine mjereneih strana izražene recipročnom vrijednošću dužine strane, kako proizlazi iz formula (7) i (18), jer se u tom slučaju može smatrati da je m_s konstantno za čitav vlak.

Ako se srednje pogreške mjereneh dužina moraju računati prema tablici 2 ili po formulama (19), (20) i (21), onda je računanje komplikiranije.

Ipak smatram, da bi u pogledu točnosti sasvim zadovoljilo, ako predpostavimo da smo i u slučaju mjerena dužina bazisnim letvama mjerili dužine jednakom točnošću, tim više što ćemo vjerovatno projektirati poligonske strane prosječno jednakih dužina. Koeficijent μ računali bi u tom slučaju iz linearog uzdužnog odstupanja u vlaku po formuli $\mu = \frac{f_s}{\sqrt{[s]}}$.

U koliko smo ovim i načinili pogrešku, budući da je ona linearna učiće u preostale pogreške poslije izjednačenja t. j. u pogrešku mjerila, koja se također raspodjeljuje proporcionalno koordinatnim razlikama,

(Nastavit će se)

Naša mlada geodetska služba stoji pred vrlo velikim zadacima. Naš novi društveni sistem, odnosno ekonom-ska i politička struktura tog sistema, stavlja pred našu geodetsku službu nove zadatke. Staro katastarsko pre-mjeravanje naše površine ne odgovara više današnjim potrebama. Naši geodeti moraju riješiti taj krupan zadatak.

(Iz ekspoze Maršala Tita prilikom pretresa prijedloga općedržavnog budžeta za 1949. g.)