Prof. Nikolaj Abakumov — Zagreb

Schreiberev zadatak u primjeni

Schreiberov zadatak bio je djelimično primijenjen pri određivanju osnovne strane (Brezovica—Zagreb) zagrebačke bazisne mreže.* Opažanja pravaca bila su tako izvršena, da postoji mogućnost da se ista strana odredi na četiri različita načina:

1. Izjednačiti bazisnu mrežu s jednakim težinama (6 girusa na svaki pravac).

2. Izjednačiti istu kombinirano, ako se poveća težina nekih pravaca s obzirom na Schreiberov zadatak. Tako je i bila izjednačena zagrebačka bazisna mreža.

3. Primijeniti Schreiberov zadatak, ali s dopunskim mjerenjem nekih pravaca u jednom girusu, radi stvaranja barem nekoliko uslovnih jednadžbi.

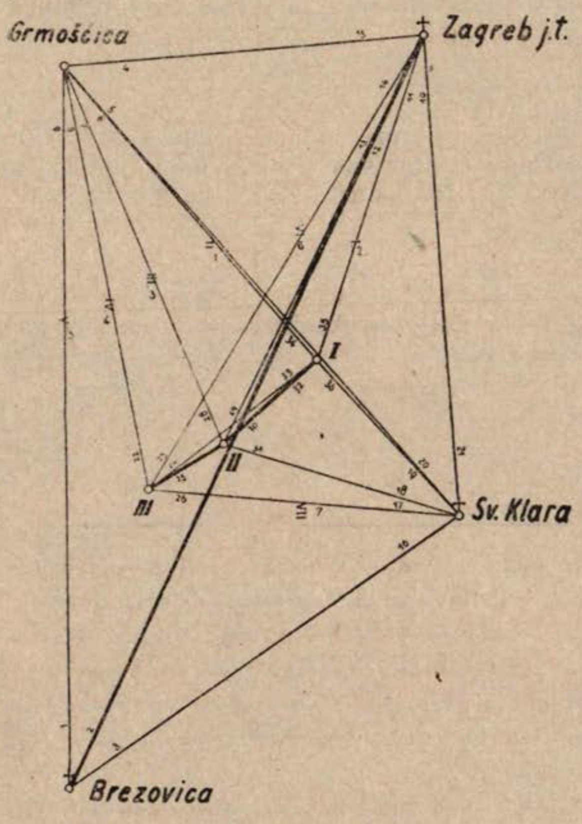
4. Primijetiti čisti Schreiberov zadatak, t. j. izmjeriti određenim brojem girusa samo neophod potrebne pravce za izjednačenje osnovne strane bez uslovnih jednadžbi.

Glavni računski posao izvršili su moji đaci, kojima se ovom prilikom toplo zahvaljujem.

U navedenom članku mi smo naveli literaturu, koja se bavi ovim pitanjem. Sada ću samo ukratok ponoviti princip Schreiberovog zadatka.

Neka imamo već definitivno projektiranu bazisnu mrežu, na primjer bazisnu mrežu Zagreba (slika 1).

Odlučili smo, da na svakoj točci izmjerimo izvjestan broj girusa, na pr. 12. Za našu mrežu dakle broj girusa pravaca bit će 432. Schreiber je predložio



Slika 1

* Prof. Nikolaj Abakumov i Dr Ing. Nikola Čubranić: Bazisna mreža grada Zagreba — Geodetski list god. II. broj 5 i 6, Zagreb 1948.

Tablica 1.

Pravci	F.	p
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	10,2	16
7	0	0
8.	10,2	16
9	0	0
10	0	0
11	22,3	36
12	17,6	29
13	0	0
14	0,7	1
15	4,0	6
16	8,5	14
17	4,7	8
18	0	0
19	0	0
20	0	0
21	3,8	6
22	5,8	10
23	0	0
24	5,8	10
25	0	0
26	0	0
27	2,2	3
28	12,0	20
29	18,6	30
30	4,4	7
31	0	0
32	0	0
33	0	0
34	1,4	2
35	0	0
36	1,4	2
	133,6	216

F u jedinicama 7 dec. log.

da se ova 432 mjerenja raspodijele na datih 36 pravaca tako, da osnovna strana Zagreb—Brezovica dobije maksimalnu težinu. Podvlačim ovdje **maksimalnu težinu,** a ne najmanju pogrešku.

Matematički se Schreiberov zadatak riješava na ovaj način: Odredimo približno (po karti) kutove date bazisne mreže i sastavimo nezavisne uslovne jednadžbe bez slobodnih članova, koje ne ćemo ni znati. Dodajmo uslovnim jednadžbama jednadžbu osnovne strane. Put kojim ćemo doći da osnovne strane je proizvoljan.

Smatrajući koeficiente osnovne strane f kao slobodne članove odredimo t. zv. prelazne koeficiente π_1, π_2 . . . i funkciju

$$F_1 = f_1 + a_1\pi_1 + b_1\pi_2 + \ldots\ldots$$
$$F_2 = f_2 + a_2\pi_2 + b_2\pi_2 + \ldots\ldots$$

Primijenivši Friedrichovu metodu riješenja Schreiberovog zadatka na bazisnu mrežu Zagreba dobili smo tablicu 1., pod uvjetom da smo odlučili izmjeriti 216 girusa-pravaca (po 6 na svaki pravac).

Gauss je u svome djelu: »Teoria motus corporum coelestium« prije Schreibera dokazao, da za riješenje njegova zadatka treba izmjeriti toliko pravaca koliko je neophodno potrebno za konstruiranje točaka.

U tablici 1. dobili smo jedan pravac suvišan, a to je pravac 14 sa f = 0,7. Ali ovaj se pojavio samo uslijed nagomilavanja pogrešaka pri sračunavanju F. Bez ovog pravca dobit ćemo sliku 2.

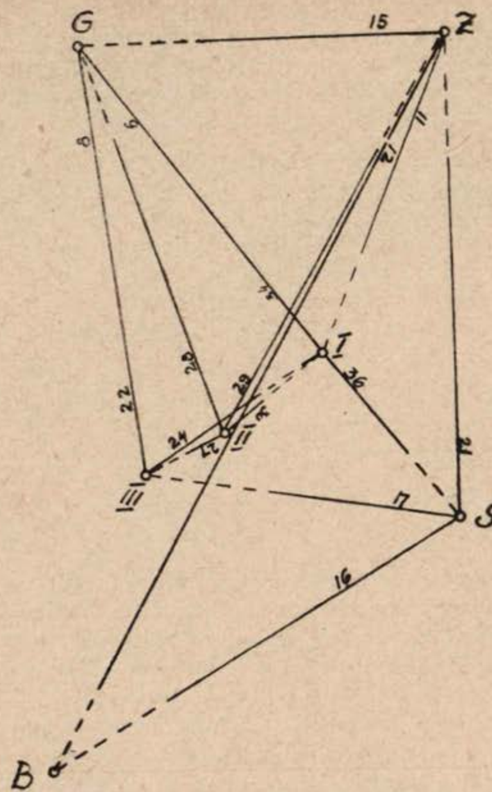
Dobili smo vrlo nezgodan raspored pravaca obzirom na određivanje točaka.

Broj uslovnih jednadžbi na ovoj mreži moguće je odrediti samo pomoću formula Junga ili Blanuše*.

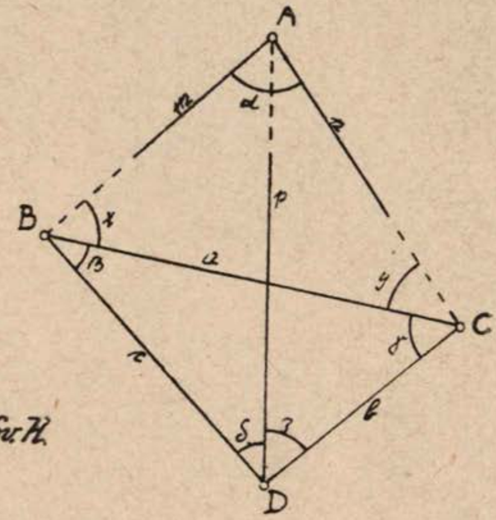
Ova mreža nema niti jedne uslovne jednadžbe. Ovom prilikom moramo obratiti pažnju na jednu činjenicu.

---

* N. Abakumov: Broj uslovnih jednadžbi u triangulacionoj mreži, Geodetski list god. II, br. 3 i 4 Zagreb 1948.



Slika 2



Slika 3

Kod određivanja minimuma F nijesmo stavili nikakav uvjet obzirom na jednostavnost određivanja točaka; zato smo i dobili onakovu mrežu. Kako ćemo kasnije vidjeti neki put možemo dobiti takav raspored pravaca da uopće nije moguće pomoću njih odrediti osnovnu stranu.

Radi određivanja točaka Zagreb i Sv. Klara (sl. 2) moramo riješiti trigonometrijski zadatak prikazan na sl. 3.

Date su strane a, b, c i kutovi α, β, γ, δ, ζ. Traže se kutovi x i y, na temelju kojih ćemo lako dobiti strane m, p, n..

Označimo sferni eksces trokuta ABC sa ε onda je:

$$x = 180^0 - (\gamma + \alpha - \varepsilon) \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sin x = \sin (y + \alpha - \varepsilon)$$

$$\cos x = - \cos (y + \alpha - \varepsilon)$$

$$\text{cotg } x = - \text{cotg } (y + \alpha - \varepsilon) = - \frac{1 - \text{tg } y \text{ tg } (\alpha - \varepsilon)}{\text{tg } y + \text{tg } (\alpha - \varepsilon)} \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin y}{\sin x}; \frac{m}{p} = \frac{\sin \delta}{\sin (\beta + x)}; \frac{n}{p} = \frac{\sin \zeta}{\sin (\gamma + y)}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin \delta}{\sin \zeta} \frac{\sin (\gamma + y)}{\sin (\beta + x)}, \text{ dakle}$$

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin \delta \sin (\gamma + y)}{\sin \zeta \sin (\beta + x)}$$

$$\frac{\sin y \sin \beta \cos x + \sin y \cos \beta \sin x}{\sin x \sin \gamma \cos y + \sin x \cos \gamma \sin y} = \frac{\sin \delta}{\sin \zeta}$$

Ako podijelimo brojnik i nazivnik s produktom $\sin y \sin \beta \sin x$ i pomnožimo lijevu i desnu stranu s $\frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$ dobit ćemo:

$$\frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} \beta}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} \gamma} = \frac{\sin \delta}{\sin \zeta} \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

Odtuda:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\sin \delta}{\sin \zeta} \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} (\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} \gamma) - \operatorname{cotg} \beta \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Obzirom na jednadžbu (2) dobit ćemo:

$$\frac{1 - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} (\delta - \varepsilon)}{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} (\delta - \varepsilon)} = \operatorname{cotg} \beta - \frac{\sin \delta}{\sin \zeta} \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot (\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} \gamma)$$

Nakon jednostavnih transformacija dobit ćemo jednu kvadratnu jednadžbu:

$$\operatorname{tg}^2 y - \frac{\sin \zeta \sin \beta + \sin \delta \sin \gamma - \operatorname{tg} (\alpha - \varepsilon) \sin \zeta \cos \beta + \operatorname{tg} (\alpha - \varepsilon) \sin \delta \cos \gamma \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} (\alpha - \varepsilon) \sin \zeta \sin \beta + \sin \zeta \cos \beta - \sin \delta \cos \gamma}$$

$$- \frac{\operatorname{tg} (\alpha - \varepsilon) \sin \delta \sin \gamma}{\operatorname{tg} (\alpha - \varepsilon) \sin \zeta \sin \beta + \sin \zeta \cos \beta - \sin \delta \cos \gamma} = \emptyset \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Za Sv. Klaru treba kutove β i γ uzimati s negativnim predznakom.

Riješenje je dvostruko, ali to ne smeta, jer ćemo uvijek a priori znati sve kutove barem približno.

Kut x sračunat ćemo po formuli (1) ili radi kontrole možemo sastaviti formulu sličnu (4).

Ing. Reizer je prema tablici 1. izmjerio kutove. S ovim kutovima sračunata je osnovna strana Brezovica—Zagreb. Ja hotimično ispuštam detalje računanja, jer smatram da neće nikome pasti na pamet da ovu metodu primijeni kod obrade bazisne mreže.

Osnovna strana Zagreb—Brezovica iznosi 11.133,357 m.

Naravno kod ovoga nemamo podataka za računanje točnosti ove strane, možemo samo s obzirom na tablicu 1 sračunati recipročnu težinu

$\left[\frac{FF}{p}\right]$.

Ispustivši pravac 14 dobit ćemo:

$$\frac{F}{p} = \frac{132,9}{215} = 0,618; \left[\frac{FF}{p}\right] = 82,1$$

u jedinicama sedme decimale logaritma, smatrajući kao jedinicu težine jedan girus-pravac.

Ako za jedinicu težine uzmemo 6 mjerenja t. j. pravac izmjeren u 6 girusa dobit ćemo:

$$82,1 \times 6 = 492,6$$

Izjednačenje iste bazisne mreže s jednakim težinama (6 girusa) dalo je slijedeće rezultate:

Osnovna strana = 11.133,473 m

$$\Sigma v^2 = 39,3152; \; m_0 = \pm 1'',402; \; [FF] = 940,8$$

relativna pogreška = 1 : 101.000
srednja pog. osn. str. = ± 0,110 m
Kombinirano izjednačenje dalo je slijedeće rezultate:

Osnovna strana = 11.133,503

$$\Sigma v^2 = 49,1372; \; [pvv] = 63,0055; \; m_0 = \pm 1'',775$$

$$\left[\frac{FE}{p}\right] = 543,4; \text{ rel. pogr. } 1 : 105.000$$

srednja pog. osn. str. = 0,106 m

Napravili smo još jedan pokus. Čistom Schreiberovom zadatku (tablica 1 bez pravca 14) dodali smo pravce 4, 10, 19, 25, 26, 32, 33, izmjerivši ih samo u jednom girusu (uzeli smo prve giruse iz Reizerovih mjerenja). Na takav smo način dobili 23 pravca, 4 figurne uslovne jednadžbe, 3 polusne, 1 bazisnu i naravno jednadžbu osnovne strane. Nakon izjednačenja dobiveni su slijedeći rezultati u istim jedinicama:

Osnovna strana = 11.133,220 m

$$\Sigma v^2 = 110,9388; \; [pvv] = 28,627; \; m_0 = \pm 1'',892$$

$$\left[\frac{FF}{p}\right] = 10.777,8;$$

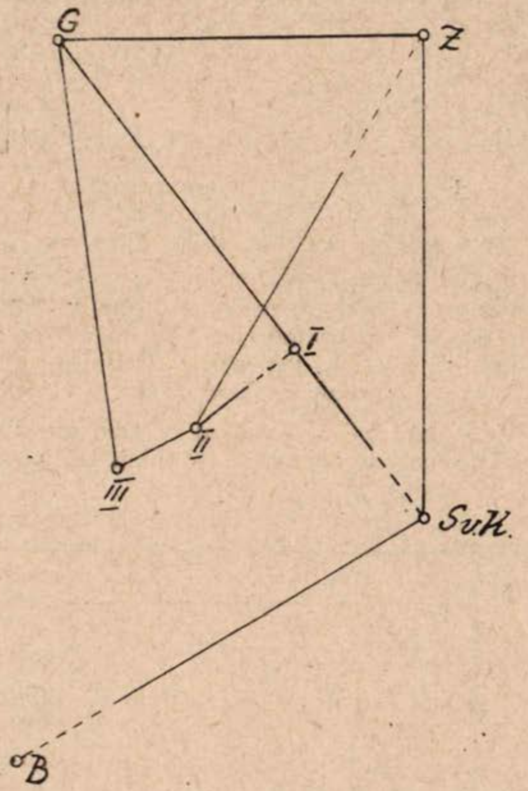
rel. pogreška = 1 : 22.110; pogreška strane = ± 0,503 m

Ovdje pada u oči veliko povećanje recipročne težine u usporedbi s drugim metodama, a smanjenje težine i povećanje pogreške osnovne strane.

Prema tome je napravljen loš izbor dopunskih pravaca. Nakon ove konstatacije uzeo sam ovu bazisnu mrežu kao početnu i odredio ponovno minimalnu ΣF po Friedrichovoj metodi. Dobio sam sliku, kako je naznačeno u tablici 2. Tamo su navedeni samo oni pravci, koje treba izmjeriti. Za sve ostale je F = O.

Tablica 2.

Pravc	F
4	44,0
6	6,2
8	37 8
10	15,0
15	15,0
16	48,2
21	48,2
22	2,5
25	2,5
27	1,6
29	6,0
30	4,4
34	35,2
36	35,2
	F = 301,8



Slika 4

S ovakovim rasporedom pravaca ne možemo odrediti osnovnu stranu, jer na Brezovici imamo samo jedan pravac (sl. 4.). Schreiberov zadatak je za ovaj slučaj zatajio.

Prodiskutirajmo sada Schreiberov zadatak s obzirom na našu bazisnu mrežu.

Prije svega treba konstatirati, da sa teoretske točke gledišta svrha Schreiberovog zadatka je, da se dobije minimum ΣF; on traži maksimalnu težinu osnovne strane. Odbacivši zadnji slučaj kao neispravan imamo:

	recipr. težina	strana	pogr. strane
Čisti Schreiberov zadatak	492,6	11.133,357	?
Kombinirana metoda	543,4	11.133,503	± 0,106
Jednake težine	940,8	11.133,473	± 0,110

Teoretski moramo osnovnu stranu smatrati najtočniju u prvom slučaju. Međutim mi nemamo podatak za određivanje vjerovatne pogreške ove strane, a nama je baš ova pogreška potrebna, a ne težina strane.

Pogreška osnovne strane određuje se formulom:

$$\Delta S = \pm \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{P}\,\mu} S$$

gdje je S = osnovna strana, P = težina, μ = logaritamski modul;

$= \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n}}$ = pogreška pravca, koja odgovara jedinici težine (u našem slučaju srednja iz 6 girusa), n = broj uslovnih jednadžbi.

Dakle ΔS je recipročno proporcionalno težini, a direktno proporcionalno pogreški pravca. Ovo potonje Schreiberov zadatak ne uzima u obzir, što je i prirodno, jer kako smo već rekli, on u čistom obliku uopće eliminira uslovne jednadžbe. Međutim dodavanje nekih pravaca izmjerenih samo jedanput može dovesti do velikih pogrešaka.

U tablici 3 uspoređeni su slobodni članovi uslovnih jednadžbi kombinirane metode i metode jednakih težina.

Tablica 3.

Uslovna jedn.	Jednake težine	Kombinirani met.
I	+ 8,799	+ 7,470
II	+ 1,914	+ 1,314
III	+ 7,797	+ 7,948
IV	— 4,001	— 3,301
V	+ 1,278	— 0,882
VI	+ 3,695	+ 4,736
VII	+ 1,821	+ 1,811
VIII	+ 2,609	+ 1,929
IX	+ 1,890	+ 1,460
X	+ 2,441	+ 2,551
XI	+ 2,799	+ 3,059
XII	+ 6,725	+ 7,434
XIII	— 8,05	— 8'15
XIV	— 6,20	— 6,37
XV	+ 6,64	+ 12,74
XVI	+ 19,14	+ 13,29
XVII	+ 26,37	+ 47,67
XVIII	+ 31,90	+ 34,22
X'X	+ 352,27	+ 166,56
XX	— 353,22	— 185,70

U tablici 3 su veličine izražene u jedinicama 6. decimale logaritma počam od XIII.

Povećavanje broja girusa za neke pravce nije prouzročilo bitnih promjena u slobodnim članovima. Neki su se povećali, a neki smanjili. Ali se suma kvadrata u kombiniranoj metodi povećala.

Jednake težine $\Sigma v^2 = 39,3152$

Kombinirana met. $\Sigma v^2 = 49,1372$; $[pvv] = 63,005$

Pogreška jedinice težine jednaka

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{39,3152}{20}} = \pm 1'',402$$

$$m^0 = \pm \sqrt{\frac{63.0055}{20}} = \pm 1'',775$$

Dakle težina osnovne strane se povećala, ali se povećala i pogreška jedinice težine, uslijed čega je pogreška osnovne strane ostala ista. Sada nastaje pitanje zašto se ovo desilo, kad smo povećali broj girusa?

Mislim da je prvi uzrok u tome, što smo povećali broj girusa za one kutove, koji su potrebni za računanje osnovne strane s najvećom težinom. Ovi su kutovi dobili manje popravke, a drugi kutovi s manjom težinom dobili su veće. Međutim za stvaranje figurnih uslovnih jednadžbi mjerodavni su svi kutovi, a za stvaranje polusnih mogu ulaziti i oni kutovi, koji nijesu potrebni za računanje osnovne strane. Kod izjednačenja s nejednakim težinama imamo posla sa [pvv].

Po teoriji velikim v moraju odgovarati mali p i obrnuto. Ali, kako smo ranije spomenuli, naše p ne može da bude manje od 1. Ova činjenica ima veliku ulogu u povećanju [pvv]. Doduše ovome se može prigovoriti baš na osnovu naših primjera.

Mi smo uzeli za jedinicu težine sredinu iz 6 girusa, prema tome je težina jednog girusa jednaka $\frac{1}{6}$. Ali izbor jedinice težine igra samo relativnu ulogu; u koliko smanjimo [pvv], u toliko se poveća $\frac{FF}{p}$, inače ćemo ostati na istom.

Proces povećanja [pvv] može se vidjeti iz tablice 4. obzirom na naš slučaj.

Tablica 4.

Pravci	Jednake težine	Kombinirana met.	p
1	— 0,248	— 1,342	1
2	+ 1,177	+ 2,032	1
3	— 0,929	— 0,690	1
4	+ 1,010	+ 1,600	1
5	— 0,224	— 0,230	1
6	+ 1,131	+ 0,521	3,666
7	— 1,077	— 1,383	1
8	— 0,117	+ 0,033	3,666
9	— 0,724	— 2,040	1
10	+ 0,478	+ 0,607	1
11	+ 0,853	— 0,499	7
12	+ 0,677	+ 0,752	5,833
13	— 0,456	+ 0,120	1
14	— 0,717	+ 0,004	1,166
15	— 0,835	— 0,794	2
16	+ 0,366	— 0,381	3,333
17	+ 0,055	+ 0,543	2,333
18	+ 2,291	+ 2,826	1
19	— 1,382	— 1,853	1
20	— 0,993	— 1,503	1
21	— 0,337	+ 0,267	2
22	+ 1,029	+ 0,455	2,666
23	— 0,526	— 0,239	1
24	+ 1,654	+ 0.528	2,666
25	— 1,686	— 2,107	1
26	— 0,471	— 0,312	1
27	+ 1,534	+ 0,962	1,5
28	+ 1,374	+ 0,794	4,333
29	+ 0,144	— 0,045	6
30	— 1,838	— 1,561	2,166
31	— 1,214	— 1,158	1
32	+ 1,335	+ 1,871	1
33	— 0,753	— 0,442	1
34	— 1,042	— 1,818	1,333
35	— 0,754	+ 0.438	1
36	+ 1,215	+ 0,381	1,333
	$\Sigma vv = 39{,}3152$	$\Sigma vv = 49{,}1372$	

Popravke pravaca 1, 2 i 9 su se povećale, što je prirodno, pošto ovi pravci imaju težinu 1, pa su primili veće popravke.

	jednake težine	kombinirana metoda
1	$v^2 = 0{,}0615$	$pv^2 = 1{,}8010$
2	$v^2 = 1{,}3853$	$pv^2 = 4{,}1290$
9	$v^2 = 0{,}5242$	$pv^2 = 4{,}1616$

Popravka pravca 11 s najvećom težinom (7) znatno se promijenila, čak je promijenila i predznak, ali se ipak apsolutno smanjila, samo ne toliko da bi smanjila pv^2. Zato je izašlo

11	$v^2 = 0{,}7276$	$pv^2 = 1{,}7430$

Ovo već nije prirodno. Ovakovih neprirodnih promjena ima dosta u tablici 4. Ovu činjenicu moguće je objasniti samo sistematskim pogreškama nastalim uslijed lošeg signaliziranja točaka, griješkama u centriranju i t. d. Sistematske pogreške ove vrste ne možemo smanjiti povećavanjem broja girusa. Prema tome to je drugi uzrok.

Na osnovu svega naprijed navedenog nije nikako moguće stvoriti zaključak o prednosti Schreiberovog zadatka za primjenu u praksi. Doduše mi smo ipak dobili neko povećanje točnosti, ali ne u takovoj mjeri, da se isplati izvršiti dosta opsežne pripremne radove radi dobivanja minimalne ΣF. Inače se duljina osnovne strane dobivene nakon mjerenja bazisne mreže u 6 girusa razlikuje samo za 3 cm od kombinirane metode.

Potreba da geodetska služba poslužuje druge grane proističe otuda što ne postoje planovi koji bi mogli poslužiti za sve tehničke radove. Stoga se pred geodetsku službu postavljaju slijedeći najpreči zadaci: premjer cijele zemlje, geofizička mjerenja i drugo. Slijedeće, 1949 godine: treba za potrebe melioracije izvršiti premjer i izraditi planove i karte na površini od oko milion hektara.

(Iz ekspozea Maršala Tita prilikom pretresa prijedloga općedržavnog budžeta za 1949. g.)
