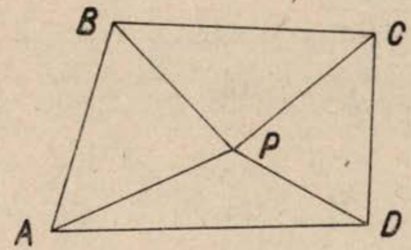
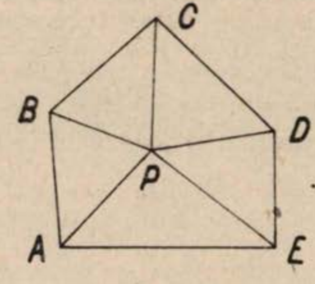
Dr. Ing. N. Čubranić — Zagreb

Izbor polusnih uvjeta

U prostom centralnom sistemu u kojem su vezane pet i više točaka, izbor točke pola ne dolazi u pitanje. Postoji samo jedna mogućnost, da se za točku pola uzme centralna točka. Prema sl. 1a i 1b točka pola može biti samo točka P.

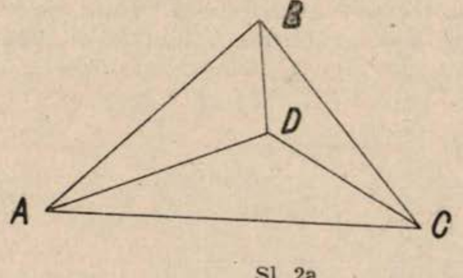


Sl. 1a

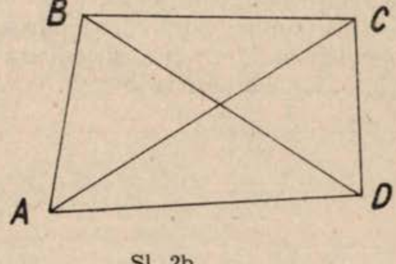


Sl. 1b

Kod sistema, koji povezuje 4 točke, svaka od točaka sistema može se uzeti kao pol. Prema sl. 2a i 2b za pol se može uzeti svaka od točaka: A, B, C, D.



Sl. 2a



Sl. 2b

Danski geodet Zacharia prvi se je bavio ovim problemom, i ukazao na točnost pojedinih točaka uzetih za pol. Svakoj točki odabratoj za pol odgovara druga sinusna odnosno uvjetna jednadžba. No ako bolje uočimo na pr. da uzmemo u obzir samo onih 5 kutova, koji su potrebni za sastav polusnog uvjeta, dobivamo zapravo identične uvjetne jednadžbe, bilo da koju od točaka A, B, C uzmemo kao pol. Izgledat će kao da je svaka jednadžba pomnožena drugim konstantnim faktorom.

Najtočnije popravke dati će ona jednadžba, čiji su koeficijenti popravaka najveći. No bez obzira na ovo, ako postavimo bilo koji uvjet, on će tom jednadžbom biti i zadovoljen.

Ovo možemo objasniti najlakše zakonom o prirastu pogrešaka. Na pr.

$$\begin{aligned} ax &= b \\ 10ax &= 10b \qquad \dots\dots \quad 1 \\ 100ax &= 100b \end{aligned}$$

To su zapravo tri identične jednadžbe. Iz svake izlazi da je

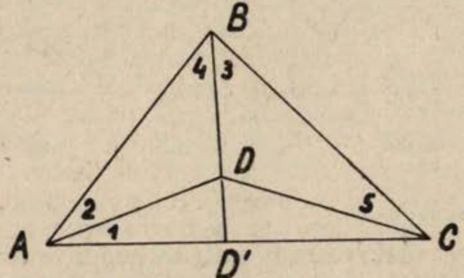
$$x = \frac{b}{a}$$

No ako desna strana nije apsolutno točna veličina, već mjerena, izvađena iz tablica i t. d. i data s točnošću recimo 0,5 posljednje cifre, X će biti dakako uvijek jednak $\frac{b}{a}$ ali točnost određivanja x biti će različita.

$$\begin{aligned} &\text{Prema prvoj jednadžbi biti će} && m_x = \frac{0.5}{a} \\ &\text{,, drugoj ,, ,, ,,} && m_x = \frac{0.5}{10a} \qquad \dots\dots \quad 2 \\ &\text{,, trećoj ,, ,, ,,} && m_x = \frac{0.5}{100a} \end{aligned}$$

Slijedi dakle da je preporučljivo uzimati u svrhu izjednačenja one jednadžbe odnosno uvjete, u kojima dolaze što veći koeficijenti uz popravke.

Pretvorivši prvotnu sinusnu uvjetnu jednadžbu logaritmiranjem u linearan oblik, koeficijenti »a« uz tražene popravke biti će promjene logaritma sinusa odgovarajućih kutova. Kako oštrijim kutovima odgovaraju veći koeficijenti, slijedi da će biti povoljnije uzimati one uvjete, u kojima dolaze oštriji kutovi.



Slika 3

Zacharia je zorno prikazao odnos točnosti pojedinih točaka kao pola. Po njemu se povoljnost točke D kao pola naprama točki B kao pola odnosi kao BD′ : DD′ (sl. 3) Jordan je izveo, da se povoljnost točke D naprama točki B odnosi kao ploštine trokuta ABCi trokuta ADC. (sl. 3.).

Iz toga slijedi, da je kod figura sl. 2a za pol najpovoljnija centralna točka D, a kod figura sl. 2b točka najbliža jednoj od diagonala.

Helmert, da prikaže oštrinu određivanja pojedinih popravaka, daje ovakav primjer:

Prema sl. 3 dati su kutovi

$$
\begin{aligned}
1 &= 0^\circ 30' 02'' + v_1 \\
2 &= 59^\circ 30' 00'' + v_2 \\
3 &= 59^\circ 30' 00'' + v_3 \\
4 &= 0^\circ 30' 00'' + v_4 \\
5 &= 30^\circ 00' 00'' + v_5
\end{aligned}
$$

Uzevši točku A kao točku pola, dobivamo slijedeću uvjetnu jednadžbu:

$$24{,}3v_1 + 0{,}2v_2 + 0{,}4v_3 - 23{,}7v_4 + 0{,}7v_5 = -48{,}6$$

(u jedinicama logaritma sedme decimale).

Uzevši točku D za točku pola dobivamo:

$$2446{,}5v_1 + 24{,}1v_2 + 48{,}9v_3 - 2376{,}5v_4 + 73{,}0v_5 = -4895{,}0$$

Lako je razabrati da su obje jednadžbe identične, jedino su koeficijenti i slobodni član u drugoj oštrije dobiveni.

Kad bi sračunali popravke po jednoj i po drugoj jednadžbi dobit ćemo:

po prvoj jednadžbi	po drugoj jednadžbi
$v_1 = -1{,}0244$	$v_1 = -1{,}0287$
$v_2 = -0{,}0084$	$v_2 = -0{,}0101$
$v_3 = -0.0169$	$v_3 = -0{,}0205$
$v_4 = +0{,}9991$	$v_4 = +0{,}9993$
$v_5 = -0{,}0295$	$v_5 = -0{,}0307$

Ako popravke računamo na 2 ili 3 decimale sekunde, takva oštrina nam i ne će trebati. Sravnivši dobivene popravke nalazimo najveću razliku dobivenih popravaka 0″,004. Znači kad bi se zadovoljavali s točnošću od 2 decimale sekunde mogao bi zadovoljiti jedan i drugi rezultat. No ako uzmemo popravke na prvi način ne će u potpunosti zadovoljiti u jedinicama sedmog mjesta logaritma drugi uvjet. Kako izlazi iz druge jednadžbe promjena v od 0″,01 daje 24 jedinice u slobodnom članu a popravka 0,004 dati će 10 jedinica u slobodnom članu.

Obratno pak popravke dobivene drugom jednadžbom u potpunosti će zadovoljiti prvu jednadžbu.

Preko jednog takvog riješenja moglo bi se preći, kad bi imali na umu samo popravke »v«. No nama je cilj dati dužine stranica jednoznačno. Znači svaki uvjet mora biti u potpunosti zadovoljen do jedne ili, uslijed zaokruživanja, do par jedinica posljednje decimale logaritma.

Prema tome nije samo preporučljivo, da se najpovoljnija točka u četverokutu uzima kao točka pola, nego je to i nužno, jer se inače može dogoditi, da se taj sistem ne izravna.

Trigonometrijske mreže redovito su sastavljene od više centralnih sistema. Najkomplikovanije mreže u pogledu međusobnih veza točaka su bazisne mreže. Kod tih mreža se redovito dade postaviti veći broj uvjetnih jednadžbi, nego što je neophodno potrebno za dotičnu mrežu. Redovito moći će se izabrati, koji će se uvjet uzeti u obzir, a koji će se smatrati zavisnima. Za izbor sinusnih uvjetnih jednadžbi postoji pravilo Bessela. (Korišćenje ovog pravila vidi kod primjera zagrebačke bazisne mreže.)

U stvari Besselovim pravilom ne vrši se nikakav izbor. Besselovim pravilom u stvari kontrolira se, da se ne bi uzelo koji zavisan uvjet u račun, i da se ne bi koji nezavisan ispustio iz vida.

Kao što smo vidjeli, da u jednom četverokutu postoji jedna točka, koja je za točku pola najpovoljnija, tako će vjerojatno i u jednom sistemu od više četverokuta biti povoljnijih i manje povoljnijih četverokuta. Ako ovo postoji, onda u sistemu gdje ima prekobrojnih uvjeta valja uzimati i odabirati povoljnije četverokute. U protivnom slučaju moglo bi se dogoditi, da se takav sistem ne izravna.

Ovdje ćemo nastojati razmotriti, koji su četverokuti s obzirom na cjelokupan sistem povoljniji a koji su manje povoljni. Za ovo vratit ćemo se ponovo na razmatranje jednog četverokuta.

Polusni uvjet ne će izravnati istom točnošću sve kutove, koji dolaze u tom uvjetu. Neka nam uvjetna jednadžba glasi:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + a_n v_n + w = 0$$

Neka je w dobiven s točnošću od jedne jedinice posljednje decimale logaritma.

Ovoj uvjetnoj jednadžbi odgovara normalna jednadžba

$$[aa]k + w = 0$$

ili

$$k = -\frac{w}{[aa]}$$

Prema tome biti će i »k« sračunat s nekom pogreškom, recimo m_k

Popravke »v« određuju se:

$$v_1 = a_1 k$$
$$v_2 = a_2 k$$
$$v_n = a_n k$$

Prema zakonu o prirastu pogrešaka biti će

$$m_{v_1} = a_1 m_k \qquad m_{v_3} = a_3 m_k$$
$$m_{v_2} = a_2 m_k \qquad m_{v_n} = a_n m_k$$

Iz ovog slijedi, da će točnost određivanja pojedinih popravaka u jednoj uvjetnoj jednadžbi biti proporcionalna veličini koeficijenata. Ako je na pr. »a_1« sto puta veći od »a_2«, to će se i popravka »v_1« sto puta točnije odrediti od popravke »v_2«. Postoji dakle naša prvotna tvrdnja, da svi kutovi jednog polusa ne će biti određeni sa istom točnošću. Uzet ćemo za konkretan primjer četverokut II-I-K-III zagrebačke bazisne mreže (iz sl. 4).

Izjednačenjem cjelokupne bazisne mreže prema sl. 4 dobiveni su izravnati pravci, pa pojedini kutovi u razmatranom četverokutu (pravci na sferi) glase:

	°	′	″
19 — 18 =	30	40	52,051
26 — 25 =	35	44	19,335
33 — 32 =	4	29	12,267
32 — 36 =	90	43	05,360
18 — 17 =	11	51	43,263
25 — 24 =	6	30	47,745
30 — 27 =	168	59	59,987
31 — 30 =	58	36	02,603
27 — 31 =	132	23	57,410

Sinusna uvjetna jednadžba za taj sistem glasi:

10,03 (17) — 13,58 (18) + 3,55 (19) + 18,43 (24) — 21,36 (25) + + 2,93 (26) — 26,80 (32) + 26,80 (33) — 0,02 (36) + w = 0 . . . (3)

(u jedinicama šeste decimale logaritma).

Prema gornjim podacima — mreža je izravnata, w = 0.

Povećamo li pravac 36 za 5″360 očito je, da će taj pravac biti za taj iznos pogrešan. Kut 32—36 iznositi će sada 90°43′00″,000. Tolika promjena u kutu izazvati će nesuglasicu u veličini jedne jedinice sedmog mjesta logaritma ili

$$w = -0,1$$

Riješivši izraz (3) dobivamo popravke v:

(17) = + 0″0004	(26) = + 0″0001
(18) = — 0″0005	(32) = — 0″0011
(19) = + 0″0001	(33) = + 0″0011
(25) = — 0″0008	

Iz ovoga primjera vidimo slijedeće:

1. Nesuglasicu, koja je proistekla iz pogrešnog pravca 36 progutat će sasvim drugi pravci t. j. oni, koji ulaze u oštre kutove. Pravac 36 ne prima nikakve popravke.
2. Najveća popravka je 0,001, dok smo pravac 36 promjenili za čitavih 5″36.
3. Možemo reći da će sinusnu uvjetnu jednadžbu praktički zadovoljiti kao kut 90° 43′ 05″,360, a tako i kut 90° 43′ 00″,000.

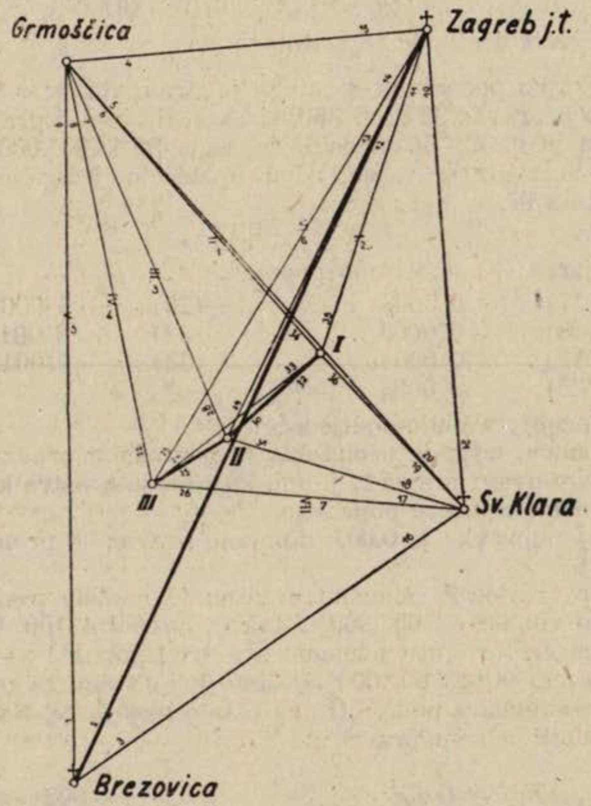
Kad u tom četverokutu uzmemo sva tri figurna i navedeni sinusni uvjet, te sa kutom 90° 43′ 00,″000 riješimo taj sistem, za očekivati je da će se figurna nesuglasica podijeliti i na ostale trokutove. Nakon ovakovog izjednačenja dobiti će se popravci v:

″	″
17 = — 0,656	27 = + 0,002
18 = — 0,690	30 = + 0,674
19 = + 1,346	31 = + 0,672
24 = — 0,643	32 = + 0,638
25 = — 0,031	33 = + 0,703
26 = + 0,673	36 = — 1,341

Najveću popravku dobili su uzajamni pravci 36 i 19 t. j. 1″341 i 1″346. No i to je dosta daleko od u stvari izvršene pogreške 5″36.

Analizirat ćemo malo isti četverokut. Ako su kutovi 25—24 i 33—32 oštro određeni, onda će obzirom na uslov zatvaranja trokuta biti oštro određen i kut 30—27. No u trokutu I-II-K istog četverokuta možemo reći, da je samo kut 19—18 oštro određen. Kut 36—32 može biti dosta pogrešan, a zbog figurnog uvjeta za istu veličinu suprotnog predznaka može biti pogrešan i kut 31—30. Ta će se dakle pogreška prenijeti na razmjerno oštriji kut. Pa ako je logaritam sinusa kuta blizu 90° neosjetljiv na promjenu kuta, to logaritam ovog oštrijeg kuta može biti i te kako osjetljiv. U konkretnom slučaju biti će pravci 36 i 31 razmjerno loše određeni.

Ako se mreža sastoji od jednog ovakovog sistema, ova nas okolnost ne mora zabrinjavati, no ako se mreža sastoji od više ovakovih sistema onda o točnosti određivanja pojedinih kutova odnosno pravaca pri izboru uvjeta moramo i te kako voditi računa.



Slika 4

Neko šematsko pravilo se ne može ovdje postaviti. Treba pojedinu mrežu kod postavljanja uvjeta dobro proučiti.

Možemo ukratko reći, za sinusne uvjete valja izabirati one četverokute, koji imaju što oštrije kutove. Svaki ovakav kut dovoljno je uzeti samo u jednom četverokutu. U sinusnim uvjetnim jednadžbama treba izbjegavati kutove blizu 90°. No ovo ne će biti uvijek provedivo. Za to je potrebno zgodnim odabiranjem uvjeta, određivanje ovakovih kutova pooštriti.

Svakako treba izbjegavati dva sistema četverokuta, koji se sudaraju pod pravim kutom, kad god za to postoji mogućnost.

Izabiranje sinusnih uvjeta demonstrirat ćemo zagrebačkom bazisnom mrežom.

U sinusne uvjetne jednadžbe moramo svakako uzeti oštre kutove 6—5, 20—19, 33—32, 25—24. Upotrebivši Besselovo pravilo možemo dobiti slijedeće nezavisne četverokute:

1.	I G Z K	izbacimo stranu I Z
2.	II III G I	„ „ I G
3.	II G Z K	„ „ II G
4.	III G Z K	„ „ III G
5.	K B G Z	„ „ B G
6.	II III Z K	„ „ III Z
7.	II III I K	„ „ III K

(Prva točka svakog četverokuta je ujedno i točka pola.) Izbacivši navedene strane ne možemo više sastaviti nijednog četverokuta s obim diagonalama.

Da razmotrimo prema ranijim razlaganjima pravilnost ovakovog izbora. Oštri kutovi 25—24 i 33—32 uzeti su čak dva puta u obzir. Ovo samo po sebi ne bi bilo nepravilno. No nije potrebno, a treba imati u vidu, da oštri kutovi daju razmjerno vrlo velike koeficijente uvjetnih jednadžbi, i da će oni nepotrebno otežavati i povećavati računski posao sastava i eliminacije normalnih jednadžbi. Nadalje vidimo, da se u dva susjedna četverokuta (drugi i sedmi) sutiču dva kuta 32—36 i 34—32 koji su blizu 90°. Ovi će kutovi, shodno ranijim razlaganjima po izabratim sinusnim jednadžbama biti manje točno određeni, a prema tome i dopunski kutovi (zatvaranje trokuta) 31—30 i 30—28 odnosno 30—29. Tu će situaciju ponešto ispravljati uvjeti 3 i 6 indirektno boljim određivanjem pravaca 28, 29 i 31, samo to ne mora biti dovoljno da potpuno ukloni tu nezgodnost, naročito ako koji od pravaca u točki Zagreb nije dovoljno točno određen. Uslijed vrlo oštrih kutova u prvom četverokutu, 23′ i 43′ očekivati je, da će njihovi vrlo veliki koeficijenti progutat točnost kuteva 11—10 i 15—11. Pošto pravci 10 i 15 dolaze i u druge uvjete, može ostat pogrešan samo pravac 11.

Da bi ovo izbjegli valja nešto promjeniti izbor uvjeta. Taj izbor u Zagrebačkoj bazisnoj mreži izvršen je ovako. Napušten je drugi četverokut II III G I i umjesto njega uzet četverokut I K II G i na slici odbačena ista strana I G. Time je ispravljeno, da su se dva prava kuta suticali i ujedno su bolje određeni. To popravljanje prenosit će se dalje na cijelu mrežu.

No obzirom na sve što smo do sad rekli bilo bi bolje umjesto napuštenog četverokuta II III G I uzeti ne I K II G nego I II Z K. Redoslijed sad odabiranja i izbacivanja strana označen je na sl. 4 arapskim brojkama.

Za primjer izvršio sam naknadno izravnanje iste mreže sa četverokutom II III G I. Ovdje su iznesene: mjerene veličine, popravke dobivene izravnanjem mreže t. j. uzevši za drugi uvjet četverokut I K II G — i popravke koje bi dobili, kad spomenuti četverokut zamjenimo sa četverokutom II III G I. Uvjetne jednadžbe date su u predhodnom broju Geodetskog Lista članak Bazisna mreža grada Zagreba. Uvjetne jednadžbe ostaju u oba slučaja iste, osim jednadžbe 19 koja odgovara četverokutu I K II G. Za četverokut II III G I ta će se jednadžba izmjenit, pa će za drugi slučaj jednadžba 19 glasiti:

$$6{,}49\,(6) - 16{,}75\,(7) + 10{,}26\,(8) + 0{,}72\,(22) - 18{,}43\,(24) + 17{,}71\,(25) + 26{,}83\,(32) - 26{,}83\,(33) - 0{,}01\,(34) - 42{,}33 = 0$$

Izravnanje je u oba slučaja izvršeno s istim težinama, koje su date u predhodnom broju Geodetskog Lista.

Pošto imamo 2 bazisa I—II i II—III, uvjetnim jednadžbama dodat je i bazisni uvjet, tako da imamo u svemu 20 uvjetnih jednadžba. Redoslijed je sinusnih uvjeta nešto drukčiji, nego što je kod izbora uvjeta izneseno. Radi smanjenja računskog posla nastojalo se je uvjete sa velikim koeficijentima staviti na kraj.

	Mjereni pravci	popravci I. riješenja	popravci II. riješenja
	° ′ ″	″	″
11	0 00 00,00	—0,499	—0,228
12	7 27 30,34	+ 0,752	+ 0,642
13	8 02 17,44	+ 0,120	—0,349
14	13 12 03,38	+ 0,004	—0,396
15	66 58 24,90	—0,794	—0,778
16	337 27 44,00	+ 0,607	+ 0,234
29	0 00 00,00	—0,045	—0,227
30	22 05 41,39	—1,561	—1,271
31	80 41 43,59	—1,158	—1,115
27	213 05 38,88	+ 0,962	+ 1,029
28	310 26 50,06	+ 0,794	+ 0,860
22	0 00 00,00	+ 0,455	+ 0,453
23	43 06 39,16	—0,239	—0,431
24	64 31 44,72	+ 0,528	+ 0,649
25	71 02 35,10	—2,107	—2,118
26	106 46 52,64	—0,312	—0,430
1	0 00 00,00	—1,342	—1,213
2	25 59 19,24	+ 2,032	+ 1,973
3	56 13 31,37	—0,690	—0,760

	Mjereni pravci			popravci I. riješenja	popravci II. riješenja
	°	'	"	"	"
6	0	00	00,00	+ 0,521	+ 0,463
7	17	57	48,76	— 1,383	— 1,442
8	29	34	03,81	+ 0,033	— 0,015
9	40	56	49,49	— 2,040	— 1,800
4	306	27	01,36	+ 1,600	+ 1,778
5	359	36	35,89	— 0,230	— 0,192
19	7	11	17,38	— 1,583	— 1,571
20	7	54	21,72	— 1,503	— 1,421
21	45	14	07,83	+ 0,267	+ 0,101
16	285	28	04,28	— 0,381	— 0,295
17	324	38	39,67	+ 0,543	+ 0,424
18	336	30	20,65	+ 2,826	+ 2,788
34	0	00	00,00	— 1,818	— 2,038
35	59	28	35,63	+ 0,438	+ 0,708
36	178	53	28,25	+ 0,381	+ 0,457
32	269	36	32,12	+ 1,871	+ 1,874
33	274	05	46,70	— 0,442	— 0,529

Kod prvog i drugog riješenja zadovoljeni su potpuno svi uvjeti. No vidimo, da se popravke ipak ponešto razlikuju.

Logaritam osnovne strane Zagreb—Brezovica računat na razne načine iz prvih popravaka iznosi:

1. Iz bazisa II-I preko trokuta II III G, I G Z, Z G B = 4,046 6318$_5$
2. „ „ „ „ „ II I K, I K Z i Z K B = 4,046 6318$_8$
3. „ „ „ „ „ I II Z, I Z K i Z K B = 4,046 6321$_7$
4. „ „ II-III „ „ II III G, II G Z, Z G B = 4,046 6318$_3$

Na temelju drugih popravaka:

1. Iz bazisa II-I preko trokuta I I G, I G Z, Z G B = 4,046 6336$_7$
2. „ „ „ „ „ II I K, I K Z, Z K B = 4,046 6276$_7$
3. „ „ „ „ „ I II Z, I K Z, Z K B = 4,046 6474$_2$

Dakle prema drugim popravkama i ako su svi uvjeti potpuno ispunjeni mreža ne bi bila izravnata, jer ne daje jednoznačne rezultate. Vidimo da između prvog i drugog rezultata postoji razlika za 60 jedinica sedme decimale logaritma a između drugog i trećeg rezultata čak 198 jedinica sedme decimale logaritma. Ovakovo riješenje ne bi mogli nikako smatrati ispravnim.

Kod prvog riješenja prvi drugi i četvrti rezultat se potpuno slaže, a treći se razlikuje od njih za tri jedinice sedme decimale, te se možemo tim riješenjem zadovoljiti. Pošto smo već spomenuli kod ranijih razmatranja da pravac 11 nije dovoljno oštro određen moglo se je i ovim riješenjem dobiti i neko veće neslaganje. (One tri jedinice u trećem slučaju očito potječu iz oštrokutnog trokuta I II Z.) Sigurnije je bilo svakako uzeti:

1. četverokut I G Z K
2. „ I II Z K

a ostale četverokute kao i ranije.

Kako teoretska razlaganja i očekivanja, tako su isto i praktički rezultati pokazali, da u jednoj naročito komplikovanijoj triangulacionoj mreži, kao što su redovito bazisne mreže, valja i te kako voditi računa o izboru polusnih uvjeta .