Geodetski list GLASILO GEODETSKIH SEKCIJA SAVEZA DRUŠTAVA INŽINJERA I TEHNIČARA F. N. R. JUGOSLAVIJE

GODINA II. MART I APRIL 1948. — BROJ — 3 I 4

Sveuč. prof. Nikolaj Abakumov — Zagreb

Broj uslovnih jednažbi u triangulacionoj mreži

Početkom četrdesetih godina u »Zeitschrift für Vermessungswesen« bila su štampana dva članka posvećena pitanju o broju uslovnih jednadžbi.

Prvi članak: »Über die Anzahl der verschiedenartigen Bedingungsgleichungen in Triangulationsnetzen«. Von Heinrich Jung 1941 god.

Drugi članak: »Über die Anzahl der Bedingungsgleichungen in beliebigen geodätischen Netzen«. Von Ing. Danilo Blanuša Zagreb 1944. god.

Pisci ovih članaka dokazuju, da formule, koje se daju u udžbenicima geodezije, za broj uslovnih jednadžbi u triangulacionim mrežama, već u relativno jednostavnim slučajevima mogu zatajiti, i daju za riješenje ovog zadatka druge formule.

Pogledat ćemo u čemu je stvar?

Prije svega navedimo napadnute formule, zadržavši oznake usvojene od strane Junga i Blanuše.

Mjerenje pravaca:

$$\left.\begin{aligned} B &= 2l - l' - 3p + 4 \\ P &= l - l' - p + 1 \\ S &= l - 2p + 3 \\ St &= \varnothing \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Mjerenje kutova:

$$\left.\begin{aligned} B &= W - 2p + 4 \\ P &= l - l' - p + 1 \\ S &= l - 2p + 3 \\ St &= W - 2l + l' + p \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

gdje su: B = broj uslovnih jednadžbi figura, strana i horizonta.
P = „ „ „ figura
S = „ „ „ strana
St = „ „ „ horizonta
l = broj sviju linija jednostrano i obostrano opažanih.
l' = broj jednostrano opažanih linija.
p = broj točaka (bez usamljenih)
W = broj kutova.

Sa ovim oznakama 2 l—l' jednako broju pravaca
l—l' jednako broju obostrano opažanih linija.

U takovom obliku ove su formule date u praktičnoj geodeziji V. Vitkovskoga (drugo izdanje 1911. S. Peterburg str. 501 502.) no samo sa drugim oznakama pri čemu kod izvoda ovih formula Vitkovski počinje riječima: »Promotrimo prvo mrežu s jednom bazom (ili sasvim bez baze) i bez usamljenih točaka.«

U istom obliku i sa istom primjedbom date su ove formule u njemačkom priručniku Jordan-Eggert: »Handbuch der Vermessungskunde« (I. Band 8. Aufl. Stuttgart 1935. § 67), pri čemu Jordan—Eggert uzimaju samo obostrano opažane linije.

Isključenje usamljenih točaka, t. j. točaka određenih samo presjecanjem naprijed ili samo presjecanjem nazad pomoću unutarnjih vizura (Potenotove točke) ima svog smisla. Ove točke, kao pravilo, i ne uzimaju se u obzir pri izjednačenju triangulacija viših redova. Za izjednačenje ovih točaka obično se daju specijalna pravila.

Forme (1) i (2) ni Jung niti Blanuša ne spominju, oni napadaju samo promjenjene formule date u gore navedenom priručniku Jordan—Eggert, koje uzimaju u obzir i usamljene točke.

Pravci:

$$\left.\begin{aligned} B &= 2l - l' - 3p + p' + 4 \\ P &= (l - l') - (p - p') + 1 \\ S &= l - 2p + 3 \\ St &= \emptyset \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

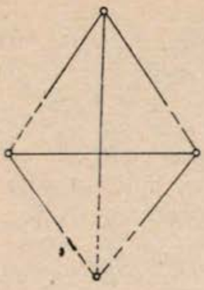
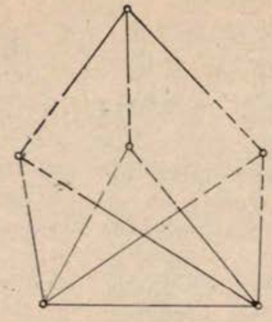
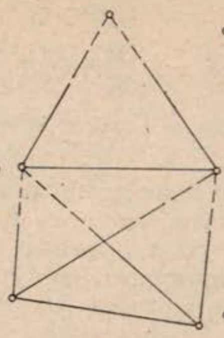
Kutovi:

$$\left.\begin{aligned} B &= W - 2p + 4 \\ P &= (l - l') - (p - p') + 1 \\ S &= l - 2p + 3 \\ St &= W + (p - p') - 2l + l' \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

U ovim jednadžbama P znači broj sviju točaka, uključivši i usamljene, a p' broj osamljenih točaka (presijecanje naprijed i Potenot).

Za formule (4) Jung govori: »Ove formule u većini slučajeva, kod kojih se one primjenjuju u praksi, dobro odgovaraju svojoj svrsi. Ipak pri bližem promatranju izlazi da je krug njihove primjene ograničen, i da one već u posve jednostavnim slučajevima odkazuju. Činjenicu, da ovo nije bilo do sada ustanovljeno, moguće je protumačiti time, što su spomenuti slučajevi toliko jednostavni, da je za njih moguće lako doći do zaključka i bez primjene formula (4), pa ih dakle nije bilo ni potrebno primjenjivati.«

Ovi jednostavni slučajevi izgledaju ovako:


sl. 1 sl. 2 sl. 3 sl. 4

Svi ovi slučajevi po svojoj biti nijesu nikakove triangulacione mreže, nego samo kombinacije poznatih zadaća praktične geodezije. Prvi i drugi slučaj je kombinacija presjecanja naprijed sa Potenotovim zadatkom. Treći spajanje dvaju presjecanja naprijed. Četvrti kombinacija presjecanja naprijed sa Hanzenovim zadatkom.

Kako sam već spomenuo takvi se slučajevi (kao pravilo) ne uzimaju u obzir pri općem izjednačenju, nego se za svaki od njih daju metode riješavanja i izjednačenja, ako postoje suvišni pravci. Nikome od triangulatora nebi palo na pamet, da za ove slučajeve primijeni općenite formule za broj uslovnih jednadžbi. U ovom slučaju je Jung potpuno u pravu, pogotovo jer su formule (1) i (2) sastavljene bez ovih slučajeva.

Jordan i Eggert, davajući formule (3) i (4), imali su u vidu prisutnost usamljenih točaka u triangulacionoj mreži, ali ne i spajanje jedne usamljene točke sa drugom. Ovi slučajevi u triangulacijama viših redova nijesu dopušteni. Sumnjam da bi i u triangulacijama nižih redova nastali ovakovi slučajevi, moguće samo kod nevještog triangulatora. Osim toga potrebno je napomenuti da se triangulacije nižih redova redovito izjednačuju po koordinatima.

Da bi uključili gore spomenute slučajeve u općenite formule (3) i (4), Jung i Blanuša su morali podijeliti geodetske mreže u zasebne dijelove, pri čemu su putovi, kojima su oni u svojim ispitivanjima išli, potpuno različiti. Jung je obratio pažnju na to, da ako se u slikama 1 do 4 povežu usamljene točke dopunskim mjerenjem jednoga kuta, da će sve biti u redu. Na osnovu ovoga on je stvorio zaključak, da u takovim slučajevima treba date točke smatrati sastavljene od 2 mreže ili uopće od »n« mreža. Formule (3) i (4) izgledati će onda ovako:

Pravci:

$$
\left.\begin{array}{l}
B = 2l - l' - 3p + p_v + 4 \\
P = (l - l') - (p - p_v) + n \\
S = l - 2p - n + 4 \\
St = \varnothing
\end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (5)
$$

Kutovi:

$$\left.\begin{aligned} B &= W-2p+4 \\ P &= (l-l')-(p-p_v)+n \\ S &= l-2p-n+4 \\ St &= W-2l+l'+(p-p_v) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

gdje je p_v broj usamljenih točaka određenih samo presjecanjem naprijed. Ako ćemo primijeniti ove formule na gornja četiri slučaja smatrajući da se svaki od njih sastoji iz dva dijela, što u stvari i jest, t. j. $n=2$, dobit ćemo ispravno riješenje.

Blanuša proširuje pitanje. On određuje svoje formule za broj uslovnih jednadžbi pomoću druge metode, koja vrijedi za sve općenite mreže, a ne samo za mreže trokutova, kako je to načinjeno u Jordan-Eggertu i kod Junga. Blanuša uzima jednu proizvoljnu mrežu bez predpostavke čak da je ona geometrički određena izvršenim mjerenjima pravaca. On uzima samo jednu predpostavku, da je na svakoj točki mreže i mjeren ili nijedan ili barem dva pravca, jer jedan pravac nema nikakvog smisla. Pomoću jedne duhovite metode Blanuša izvodi ovakove formule:

Pravci:

$$\left.\begin{aligned} B &= 2l-l'-3p+p_v+4 \\ P &= (l-l')-(p-p')+S \\ S &= l-2p-p+p_v-s+S \\ St &= \varnothing \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Kutovi:

$$\left.\begin{aligned} B &= W-2p+4 \\ P &= (l-l')-(p-p')+s \\ S &= l-2p-s+4(p'-p_v) \\ St &= W-2l+l'+(p-p_v) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

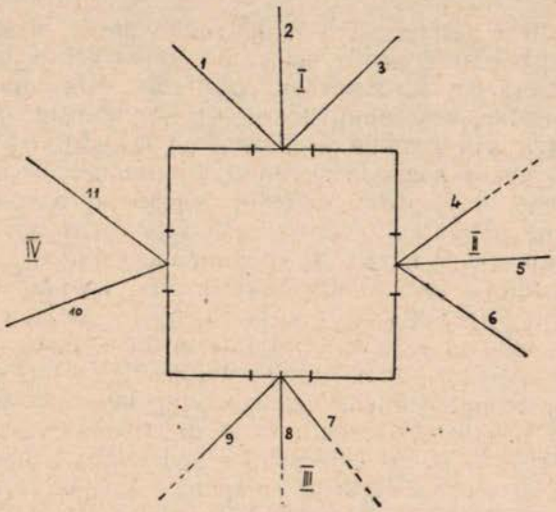
gdje je »s« broj djelova geodetske mreže. Iz sravnjenja Jungovih i Blanuševih formula izlazi da je:

$$s=n-(p'-p_v)$$

p' = broj svih usamljenih točaka, a p_v = broj točaka dobivenih presjecanjem naprijed, prema tome $(p'-p_v)$ jest broj potenotovih točaka. Drugim riječima Potenotove točke je Jung smatrao kao zasebne mreže, a Blanuša nije.

Za pravce po njihovom mišljenju transformacija formula bila je završena, no što se tiče kutova iznikla je nova poteškoća. Ako dopustimo, da na nekim točkama nije opažan jedan ili nekoliko kutova, dobit ćemo određeni broj grupa pravaca, pri čemu ove grupe nisu međusobno povezane. Kao ilustracija ovog slučaja mogu poslužiti mjerenja izvršena sa četiri prozora crkve.

Ovdje imamo četiri grupe nepovezanih pravaca, označenih na slici rimskim brojkama. Triangulator je učinio pogrešku ne povezavši ove grupe. Blanuša ove grupe kalsificira. Grupu, u koju ulazi barem jedna obostrana opažana linija Blanuša naziva prvom klasom; grupu, u koju ulaže samo jednostrano opažane linije — drugom klasom. Na slici 5 ima tri grupe prve i jedna druge klase. Da bi ove grupe međusobno povezali, neophodno je potrebno izmjeriti minimum tri nova kuta. Blanuša klasificira i ove kutove. Kut koji veže grupe prve klase on naziva kutom prve klase. Kut, koji veže grupu prve klase sa grupom druge klase, ili dvije grupe druge klase on naziva kutom druge klase. Broj kutova prve klase označuje sa g_1, a broj kutova druge klase sa g_2. Na slici 5 $g_1=2$, $g_2=1$, međutim možemo smatrati i $g_1=1$, a $g_2=2$.



Slika 5

Jung ne klasificira kutove. Kod njega je broj kutova neophodan za vezu označen slovom g. Na sl. 5 $g=3$.

Vezu između Blanuševog »s« i Jungovog »n« dobit ćemo po formuli:

$$s=n-(p'-p_v)-g_2$$

Dakle formule za broj uslovnih jednadžbi pri mjerenju kutova biti će ovakove:

Blanuša:

$$\left.\begin{aligned} B &= W-2p+4 \\ P &= (l-l')-(p'-p_v)+s-g_1 \\ S &= l-2p-(p'-p_v)-s-g_2+4 \\ St &= W-2l+l'+(p-p_2)+g \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

gdje je $g = g_1+g_2$

Jung:

$$\left.\begin{aligned} B &= W-2p+4 \\ P &= (l-l')-(p-p_v)+n-g \\ S &= l-2p-n+4 \\ St &= W-2l+l+(p-p_v)+g \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Obadva pisca učinili su ovdje jednu principijelnu pogrešku smatrajući, da se slučaj koji mi pretresamo ne može desiti pri mjerenju pravaca. Ovaj slučaj uopće treba tretirati kao nedopuštenu pogrešku triangulatora, koji se može pojaviti i pri girusnoj metodi i pri mjerenju kutova. Svaku zasebnu grupu na sl. 5 možemo mjeriti pomoću jedne ili druge metode (girusi, kutovi). Dakle za ovaj slučaj treba promijeniti i formule za pravce.

Ali sada nastaje pitanje, dali je potrebno uopće mijenjati formule, koje služe za određivanje broja uslovnih jednadžbi? S teoretskog gledišta na ovo pitanje treba odgovoriti pozitivno. Naravno da je veoma korisno imati formule, koje obuhvaćaju sve moguće slučajeve. No ovom uvjetu ne odgovaraju ni formule predložene od Junga ni od Blanuše.

Na primjer: svaki bazis izmjeren u triangulaciji, osim jednog neophodno potrebnog, daje jednu uslovnu jednadžbu bazisa. Ostavljen u sredini prostor ne popunjen trokutovima, daje četiri nove uslovne jednadžbe i to: jednu strane i tri t. zv. poligonske uslovne jednadžbe — širine, duljine i azimuta, ako se izjednačenje vrši na sferoidu; ili apsise, ordinate i smjernog (direktionog) kuta za izjednačenja na ravnini. Kod toga azimutalnu uslovnu jednadžbu (odnosno direkcionog kuta) možemo zamijeniti figurnom jednadžbom datog poligona. U ruskoj geodetskoj literaturi usvojen je termin figurne uslovne jednadžbe baš zbog razlike od ovih poligonskih uslova. Interesantno je da formule za broj uslovnih jednadžbi obuhvaćaju i poligonske uslove. Jednadžba azimuta (smjernog kuta) pojavljuje se u broju figurnih, a širine i duljine (apsise i ordinate u broju jednadžbi strana. Međutim ove su uslovne jednadžbe posve drugog karaktera. Njihovo stvaranje zahtijeva veliki računski posao. Osim toga Blanuša i Jung smatraju da triangulaciona mreža može biti podijeljena; kod Junga na n zasebnih dijelova, a Blanuše na s dijelova. Ovdje treba primijetiti da se u praksi nikad ne izjednačuju zajedno mreže, koje nisu međusobno povezane. Baš obrnuto — u nekim se slučajevima, radi olakšanja rada i uštede vremena, previše velika mreža izjednačuje se po dijelovima. U ovom se slučaju pojavljuju novi t. zv. prisilni uslovi na granicama mreže.

U višoj geodeziji Krasovskog i Danilova (svezak I., odjel 9 str. 149—169 Moskva 1938) pri sastavljanju formula za broj uslovnih jednadžbi isto nijesu uzete u obzir usamljene točke.

Daleko sam od pomisli da su članci Junga i Blanuše suvišni. Baš obrnuto, ja pozdravljam ove, s teoretske točke gledišta, vrlo interesantne radove, i preporučam svakome geodetu da se s njima upozna i da ih prouči.

Ali moje je mišljenje, da nije potrebno ove formule uvoditi u praksu, pošto i onako ne obuhvaćaju sve moguće slučajeve. Ja bih se zadovoljio sa formulama (1) i (2) uz navedene primjedbe, kojima možemo dodati još jednu: »Smatra se, da su na svakoj točki vezani svi pravci (kutovi).«