

Mjerenje bazisa za trigonometrijsku mrežu grada Zagreba 1947. god.

Točno mjerenje bazisa jeste jedan od najozbiljnijih, a u isto vrijeme i najinteresantnijih geodetskih radova. Rijetko se dešava, da terenske prilike dozvoljavaju neposredno izmjeriti jednu čitavu stranu triangulacije. U većini slučajeva izmjeri se jedan relativno kratak bazis pa poslije već jednim sistemom trokutova prelazi na stranu triangulacije, tako zvanu osnovnu stranu. Ovakav sistem trokutova zove se bazisna mreža. Bazis se obično mjeri s najvećom točnošću, koju je moguće postići odgovarajućim bazisnim priborom bez obzira na činjenicu da se točnost, dobivena mjerenjem bazisa, brzo smanjuje pri prelazu od bazisa na osnovnu stranu uslijed pogrešaka u mjerenju kutova.

Ovakova, na prvi pogled, pretjerana točnost ima svojih ozbiljnih razloga. Sama je ova točnost dovedena u pitanje. Ova je činjenica ustanovljena pri mjerenju bazisa. Ako ćemo mjeriti bazis nekoliko puta jednim te istim priborom dobit ćemo rezultate, koji će se međusobno odlično slagati. Ako mi izmjerimo isti bazis drugim priborom, dobit ćemo ponovno fino slaganje, ali sredina obadva mjerenja neki puta imaju relativno velike razlike.

1892. godine od strane pruske državne izmjere bio je četiri puta izmjeren bazis kod Bonna pomoću bazisnog pribora Bessela. U isto vrijeme je isti bazis bio dva puta izmjeren od strane pruskog geodetskog zavoda priborom Brunnera. Oba pribora pripadaju tipu bimetalnih pribora t. j. imaju međusobno vezane dvije štange oko 4 metra duljine iz različitih metala: Besselov pribor iz gvožđa i cinka, a Brunnerov iz mesinga i platiniridijuma. To je vrsta metalnih termometara. Besselov pribor je kontaktni pribor, a Brunnerov optički, t. j. na njegovim štangama na krajevima urezane su crtice, odstojanje između kojih se mjeri pomoću prenosnog komparatora sa mikroskopima.

Dobiveni su slijedeći rezultati:

Bessel	2512,96124 metra	± 0,696 milimetara
Brunner	2512,97249	„ ± 0,649 „

Dakle svaki je pribor zasebno dao točnost veću od jedne milijuntine, a srednina se razlikuju za 1,125 centimetra, što odgovara svega okruglo

$\frac{1}{220.000}$ duljine.

Nakon toga Brunnerov pribor bio je ponovno etaloniran u internacionalnom birou u Sevru. Sa podacima ovog etaloniranja dobivena je duljina bazisa 2512,96662.

Dakle razlika se smanjila na 0,538 cm.

Treba također spomenuti mjerenje Simplonskog tunela invarnim žicama u proljeće 1906. godine od strane Guillaumea, jednog od pronalazača invara, direktora internacionalnog biroa mjera i težina. Guillaume je izmjerio tunel dva puta i dobio duljinu od 21146,01141 m. Mjerenja su se razlikovala za 22,04 mm t. j. relativna pogreška bila je skoro jedna milijuntina. Ali ista duljina bila je određena pomoću zasebne triangulacije. Dobiven je rezultat, koji se razlikuje od Guillaumeovog za 59 cm,

što odgovara pogrešci $\frac{1}{36.000}$

Iste godine kod Humbinena (Istočna Pruska) bio je izmjeren bazis od 6 km priborima Bessela i Jederina. Dobivena je razlika u smislu Bessel-

Jederin = + 44,45 mm što odgovara relativnoj pogrešci $\frac{1}{135.000}$

Izgleda da svaki bazisni pribor ima svoju vlastitu, tako rekuć, personalnu pogrešku. Postoji mišljenje da ova pogreška uglavnom zavisi od neznanja točne temperature mjernih štanga, a dakle od nemogućnosti točnog sračunavanja rastezanja ove štanke. Baš iz ovog razloga bio je pronađen invar (slitina 64% čelika i 36% nikla), koji ima vrlo malen koeficijent rastezanja. Zavaljujući ovomu mi ne moramo tako točno znati temperaturu bazisnih mjernih pribora.

Ali invar, odnosno žice izradene iz njega, imaju svoju manu. Unutrašnja njihova struktura nije stabilna. Žice se u toku deset godina od izrade povećavaju po dužini. Osim toga invarne se žice bazisnog pribora Jederina, kojim smo izvršili mjerenje zagrebačkog bazisa, zatežu pomoću utega od 10 kg, koji vise na konopima prebačenim preko koloturama. Prirodno je, da će na izmjereno rastojanje utjecati trenje u ovim koloturama i t. d. Drugim riječima mi moramo voditi borbu sa svakovrsnim sistematskim pogreškama. Ovo je pak moguće samo u tom slučaju, ako ćemo samo mjerenje vršiti sa maksimalnom točnošću, a nakon mjerenja pažljivo proučavati dobiveni materijal.

Točno mjerenje bazisa ima još jedno čisto praktičko značenje. Glavni izvor pogrešaka u triangulaciji jesu grješke u mjerenju kutova. Bazisni pribor, na primjer Jederina-Guillaumea, dozvoljava odrediti duljinu bazisa sa točnošću do jedne milijuntine, međutim najbolji teodoliti daju kutove sa točnošću do $\pm 0''5$, što odgovara relativnoj pogrešci okruglo

$\frac{1}{400.000}$

Na takav način, počam od točno izmjerenog bazisa mi ćemo sračunavanjem dobivati postupno strane trokutova sa sve većim i većim pogreškama. Tako će na primjer strana desetog trokuta biti sračunata

sa srednjom pogreškom $\frac{1}{400.000} \cdot \sqrt{10} = \text{okruglo } \frac{1}{100.000}$

Jedino sredstvo da se smanji nagomilavanje pogrešaka u stranama triangulacije jest, nakon određenog broja trokutova, mjerenje novog bazisa. Mjeriti treba s najvećom točnošću, pošto u odnosu na pogreške mjerenja kutova, možemo smatrati same bazise bespogrešnima, pa izjednačivati samo izmjerene pravce odnosno kutove.

Ovaj uvod bio je neophodno potreban da nebi izgledalo suvišnim rovarenje u dijelovima milimetra, kod sređivanja podataka dobivenim pri mjerenju bazisa.

Mjerenje zagrebačkog bazisa bilo je izvršeno po molbi Geodetskog odsjeka Gradskog N. O. Pronaći u velikom gradu odgovarajuće mjesto podesno za mjerenje bazisa, nije baš tako laka stvar. Ali mom đaku, a sada kolegi Dr. ing. Čubraniću pošlo je za rukom pronaći ovakvo mjesto na novoj karlovačkoj cesti, jugozapadno od Savskog mosta. Prvo smo mislili mjeriti dva bazisa, jedan na zapadu od Zagreba, a drugi na istoku, iz gore spomenutih razloga, ali iz tehničkih razloga izmjerili smo dva bazisa ali jedan pored drugoga. Tri su se bazisna centra u vidu betonskih stupova sa uzidanim reperima iz mesinga, ukopala ispod razine ceste, na njezinim rubovima, i pokrili gvozdanim poklopcima. Na dubini metar i pol ukopani su i podzemni centri. Mislim da će ovi centri biti sačuvani za dugo vrijeme. Bazisi su povezani dovoljno kompliciranom bazisnom mrežom sa osnovnom stranom triangulacije: Zagreb (južni toranj Kaptola) — Brezovica (crkva). Ali ćemo za sada bazisnu mrežu ostaviti na strani, to će biti predmetom drugog referata, a preći ćemo na samo mjerenje bazisa.

Geodetski zavod Tehničkog fakulteta posjeduje 4 invarne žice od po 24 metra i jednu isto tako invarnu vrpca od 12 metara, za mjerenje bazisnog ostatka.

Ja ne ću ovdje ponavljati teoriju bazisnog aparata Jederina. Koga to interesira može pročitati slijedeće rasprave:

Benoit et Guillaume: La mesure rapide des bases geodesique 5. izdanje
Abakumov: Mjerenje bazisa invarnim žicama, Tehnički list 1931.

„ Utjecaj trenja u koloturima bazisnog aparata Jederina, kod mjerenja duljina, Godišnjak Universiteta Kr. Jugoslavije u Zagrebu 1929.

„ Određivanje točnosti bazisa izmjerenog aparatom Jederina, Tehnički list 1935, br. 19-20 i 21-22. Zagreb.

„ Materijal za proučavanje osnovičnog aparata Jederina, Geodetski list god. III. br. 4 i 5 1941, Zagreb.

„ Invarna vrpca od 12 metara, Hrvatska državna izmjera god. I. br. 6-9, Zagreb 1942.

Invarne žice i vrpca bili su etalonirani u internacionalnom birou u Sevru, i imaju svoje certifikate. U certifikatu date su duljine tetiva žica pod napetošću od 10 kg, za temperaturu od 15° C.

Žica br. 857 = 24 m + 0,35 mm

Žica br. 858 = 24 m — 0,01 mm

Žica br. 859 = 24 m — 0,13 mm

Žica br. 860 = 24 m — 0,16 mm

Ove žice napravljene su iz jedne te iste slitine invara i imaju jednu općenitu formulu rastezanja

$$l_{\theta} = l_0 (1 - 0,000\,000\,581 \theta + 0,000\,000\,00103 \theta^2)$$

Ova je formula dobivena ispitivanjem žica u internacionalnom birou mjera i težina. Takova se ispitivanja vrše pod napetošću od 10 kg. Dakle utjecaj temperature se slaže sa mehaničkim uzrocima i razumljivo je što se neki put, tetiva sa povećanjem temperature skraćuje, kako je to slučaj za naše žice.

Pri uporabi ove formule treba uzeti u obzir, da su navedene dužine žica već reducirane pomoću formule rastezanja na temperaturu + 15° C. U mome članku za mjerenje bazisa invarnim žicama data je tablica rastezanja. Mnogo godišnja ispitivanja dovela su Benoita i Guillaumea do zaključka da invar premještan iz jedne temperature u drugu neće da primi odmah definitivnu duljinu, odgovarajuću zadanoj temperaturi. Da bismo dobili pravu duljinu potrebno je uvesti još jednu korekciju dobivenu pomoću empiričke formule

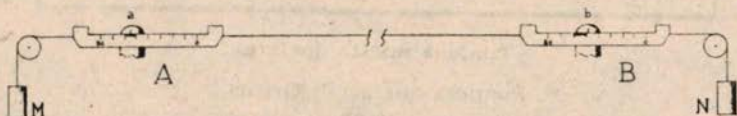
$$\frac{\Delta l}{l} = -0,00325 \cdot (t^2 - 15^2) \cdot 10^{-6}$$

gdje je t srednja temperatura dugog perioda vremena, u kojem su se nalazile žice neposredno prije mjerenja bazisa. U praksi dosta je uzeti srednju temperaturu jednog tjedna. Za ovu sezonsku korekciju, kako je naziva Guillaume, za razliku od svakodnevne θ , isto postoje tablice u knjizi Benoit et Guillaume: »La mesure rapide des bases geodesique« i u mome članku »Mjerenje bazisa invarnim žicama«.

Treba ovdje spomenuti jednu stvar. Etaloniranje je žica i vrpce bilo izvršeno 1929. godine. Dakle prošlo je već 18 godina. U toku ovog vremena bilo je dosta izmjereno bazisa. Materijal dobiven pri mjerenju bazisa pod mojim rukovodstvom čitav je iskorišten u gore spomenutim mojim raspravama. Na žalost nisam mogao doći do podataka mjerenja bazisa izvršenih od bivšeg profesora Horvata. Proučavanjem dobivenog materijala nedvojbeno se pokazalo da žice neki put, uslijed nepažnje za vrijeme mjerenja, mogu promijeniti svoju duljinu. Sada je skrajnje vrijeme za ponovno etaloniranje žica. Ali dok ovo etaloniranje izvršeno nije, moramo se osloniti na staro etaloniranje.

Mjerenje bazisa na karlovačkoj cesti bilo je izvršeno u tri dana, 30. VI., 1. i 2. VII. 1947. god. Samo sa dvije invarne žice br. 857 i 858. Ali da bismo mogli iskoristiti sve četiri žice prije mjerenja (28. VI. 1947.) i nakon mjerenja (3. VII. 1947.), bile su sravnjene međusobno na kontrolnim stupovima postavljenim na rastojanju od 24 m u podrumskim prostorijama Tehničkog fakulteta u Kačićevoj ulici 26, i to po slijedećem programu:

Žice se namještaju, kako je to prikazano na crtežu. Opažač A lagano pomjera žicu na stranu utega *M* t. j. vuče žicu, nakon čega se vrše čitanja na skalama žice. To se ponavlja 10 puta. Zatim opažač A ponovno lagano pomjera žicu, ali u stranu utega *N* t. j. gura žicu. Ponovo se vrše čitanja na skalama i ovaj se postupak ponavlja 10 puta. Nakon toga opažač *B* 10 puta vuče i 10 puta gura žicu. Sad se izvršila izmjena mjesta opažača, te se i isti program čitanja ponavlja. Dakle na svakoj skali bilo je izvršeno 80 čitanja — 40 pri jednom položaju opažača i 40 pri drugom.



Iz ovog materijala mi možemo odrediti utjecaj trenja u koloturima *C* i *D*, personalnu pogrešku opažača, vjerojatne popravke duljina samih žica i odstojanje između kontrolnih stupova.

Kada opažač *A* vuče žicu, uticaj se trenja u koloturu *C* smanjuje i crta će repera *a* zauzeti položaj na manjoj podjeli.

Razlika će se čitanja skala *A* — skala *B* smanjiti.

Kada opažač *A* gura žicu, uticaj se trenja u koloturu *C* povećava i crta će repera *a* zauzeti položaj na većoj podjeli.

Razlika će se čitanja skala *A* — skala *B* povećati.

Dakle razlika vuče — gura mora biti negativna.

Iskustvo je pokazalo da je aritmetička sredina iz dvaju suprotnih čitanja

$$\frac{\text{žica se vuče} + \text{žica se gura}}{2}$$

konstantna veličina slobodna od utjecaja trenja, u granicama točnosti mjerenja.

Pogledat ćemo naš materijal (veličine su donjih tablica aritmetičke sredine iz 10 mjerenja).

28. VI. 1947.

Pomjera opažač *A* (Benčić)

I. položaj: Benčić na sjeveru

žica	vuče	gura	srednje	vuče-gura
857	+ 6,73	+ 7,07	+ 6,90	— 0,34
858	+ 7,78	+ 8,07	+ 7,92.5	— 0,29
859	+ 8,36	+ 8,70	+ 8,53	— 0,34
860	+ 7,96	+ 8,39	+ 8,17.5	— 0,43
				— 0,35

Pomjera opažač B (Grgac)

I. položaj: Grgac na jugu

žica	vuče	gura	srednje	vuče-gura
857	+ 6,91	+ 6,95	+ 6,93	— 0,04
858	+ 7,89	+ 7,99	+ 7,94	— 0,10
859	+ 8,64	+ 8,63	+ 8,63.5	+ 0,01
860	+ 8,12	+ 8,20	+ 8,16	— 0,08
				— 0,05

Izmjena mjesta opažača

Pomjera opažač B (Grgac)

II. položaj: Grgac na sjeveru

žica	vuče	gura	srednje	vuče-gura
857	+ 6,73	+ 6,89	+ 6,81	— 0,16
858	+ 7,76	+ 7,94	+ 7,85	— 0,18
859	+ 8,18	+ 8,59	+ 8,37.5	— 0,41
860	+ 7,97	+ 8,15	+ 8,06	— 0,18
				— 0,23.5

Pomjera opažač A (Benčić)

II. položaj: Benčić na jugu

žica	vuče	gura	srednje	vuče-gura
857	+ 6,83	+ 6,99	+ 6,91	— 0,16
858	+ 7,78	+ 8,04	+ 7,91	— 0,26
859	+ 8,48	+ 8,67	+ 8,57.5	— 0,19
860	+ 8,09	+ 8,38	+ 8,23.5	— 0,29
				— 0,22.5

Utjecaj trenja:

za A = — 0,29 težina 20

za B = — 0,14 „ 20

sredina — 0,22 težina 40

Radi određivanja personalnih razlika uzmimo aritmetičke sredine I. položaja i II. položaja i oduzmimo II. položaj od I. položaja

žica	I. pol.	II. pol.	I.—II.	sredina
857	+ 6,91.5	+ 6,86	+ 0,05.5	+ 6,89
858	+ 7,93	+ 7,88	+ 0,05	+ 7,91
859	+ 8,58	+ 8,47.5	+ 0,10.5	+ 8,53
860	+ 8,17	+ 8,15	+ 0,02	+ 8,16
			+ 0,06	

O promjeni duljine žica može se suditi samo na temelju promjena razlika dobivenih na kontrolnim stupovima. Na temelju ovih razlika, po metodi najmanjih kvadrata možemo dobiti vjerojatnu popravku pojedine žice. Još jednostavnije dobit ćemo iste popravke, ako odstojanje između kontrolnih stupova, dobiveno kao aritmetička sredina od sve četiri žice smatramo za vjerojatno odstojanje, te načinimo odstupanje pojedinih žica.

Po certifikatu odredit ćemo razlike:

$$\begin{aligned} \text{Žica } 857 - 858 &= + 0.36 \\ 857 - 859 &= + 0.48 \\ 857 - 860 &= + 0.51 \end{aligned}$$

Iste će razlike iz podataka dobivenih na kontrolnim stupovima biti jednake:

$$\begin{aligned} 857 - 858 &= + 1.02 \\ 857 - 859 &= + 1.64 \\ 857 - 860 &= + 1.27 \end{aligned}$$

Načinivši razlike *certifikat* — *kontrolni stupovi* dobit ćemo tri jednadžbe:

$$\begin{aligned} (857) - (858) &= - 0.66 \\ (857) - (859) &= - 1.16 \\ (857) - (860) &= - 0.76 \end{aligned}$$

Rješivši ih dobit ćemo ovakove popravke:

$$\begin{aligned} (857) &= \parallel + 0,645 \parallel \\ (858) &= \parallel - 0,015 \parallel \\ (859) &= \parallel - 0,515 \parallel \\ (860) &= \parallel - 0,115 \parallel \end{aligned}$$

Iste popravke možemo dobiti na ovakav način: — Duljinama žica danim u certifikatima dodamo razlike čitanja na skalama, dobit ćemo odstojanje između stupova, doduše ne pravo, pošto nismo uzeli u obzir vremensku povećanost duljina žica i rastezanje uslijed temperature, ali ove veličine kao sistematske neće utjecati na popravku.

Dakle

$$\begin{aligned} \text{Žica } 857 \quad 24 \text{ m} + 0,35 \text{ m} + 6,89 &= 24 \text{ m} + 7,24 \parallel + 0,645 \parallel \\ 858 \quad 24 \text{ m} - 0,01 \text{ m} + 7,91 &= 24 \text{ m} + 7,90 \parallel - 0,015 \parallel \\ 859 \quad 24 \text{ m} - 0,13 \text{ m} + 8,53 &= 24 \text{ m} + 8,40 \parallel - 0,515 \parallel \\ 860 \quad 24 \text{ m} - 0,16 \text{ m} + 8,16 &= \underline{24 \text{ m} + 8,00} \parallel - 0,115 \parallel \\ &+ 7,885 \end{aligned}$$

Otkloni od aritmetičke sredine ovih odstojanja dati će nam tražene popravke duljina žica.

Sada već možemo odrediti i vjerojatne duljine žica pri temperaturi 15° C. Za ovu svrhu certifikatne duljine moramo povećati za + 0,10 mm

(ovu veličinu dobit ćemo iz tablice dane u knjizi »La mesure rapide des bases geodesique« i u mom članku »Mjerenje bazisa invarnim žicama«) i dodati dobivene popravke.

$$\begin{aligned} \text{Žica 857} & 24 \text{ m} + 0,35 + 0,10 + 0,65 = 24 \text{ m} + 1,10 \text{ m} \\ \text{858} & 24 \text{ m} - 0,01 + 0,10 - 0,02 = 24 \text{ m} + 0,07 \text{ m} \\ \text{859} & 24 \text{ m} - 0,13 + 0,10 - 0,52 = 24 \text{ m} - 0,55 \text{ m} \\ \text{860} & 24 \text{ m} - 0,16 + 0,10 - 0,12 = 24 \text{ m} - 0,18 \text{ m} \end{aligned}$$

Odredimo sada pravu duljinu između kontrolnih stupova, ona će nam biti potrebna radi kontrole.

Svakodnevna temperatura θ za vrijeme mjerenja bila je jednaka $+29,8^\circ$, dakle rastezanje će biti jednako $-0,16$ mm. Sezonska temperatura $t = +26,0^\circ$ što će dati $-0,04$ mm.

Dakle

$$\begin{aligned} \text{žica 857} & 24 \text{ m} + 1,10 - 0,20 + 6,89 = 24 \text{ m} + 7,79 \text{ mm} \\ \text{858} & 24 \text{ m} + 0,07 - 0,20 + 7,91 = 24 \text{ m} + 7,78 \text{ mm} \\ \text{859} & 24 \text{ m} - 0,55 - 0,20 + 8,53 = 24 \text{ m} + 7,78 \text{ mm} \\ \text{860} & 24 \text{ m} - 0,18 - 0,20 + 8,16 = 24 \text{ m} + 7,78 \text{ mm} \\ & \underline{\underline{24 \text{ m} + 7,78 \text{ mm}}} \end{aligned}$$

Na isti način obradit ćemo materijal od 3. VII. 1947.

Pomjera Benčić

I. položaj

žica	vuče	gura	sredina	vuče-gura
857	+ 6,73	+ 6,89	+ 6,81	- 0,16
858	+ 7,65	+ 7,78	+ 7,71,5	- 0,13
859	+ 8,32	+ 8,34	+ 8,33	- 0,02
860	+ 8,16	+ 8,23	+ 8,19,5	- 0,07
				- 0,09,5

Pomjera Grgac

I. položaj

žica	vuče	gura	sredina	vuče-gura
857	+ 6,78	+ 7,00	+ 6,89	- 0,22
858	+ 7,61	+ 7,88	+ 7,745	- 0,27
859	+ 8,32	+ 8,62	+ 8,47	- 0,30
860	+ 7,93	+ 8,27	+ 8,10	- 0,34
				- 0,28

Pomjera Grgac

II. položaj

žica	vuče	gura	sredina	vuče-gura
857	+ 6,77	+ 6,90	+ 6,835	— 0,13
858	+ 7,80	+ 7,97	+ 7,885	— 0,17
859	+ 8,33	+ 8,55	+ 8,44	— 0,22
860	+ 8,04	+ 8,27	+ 8,155	— 0,23
				— 0,19

Pomjera Benčić

II. položaj

žica	vuče	gura	sredina	vuče-gura
857	+ 6,80	+ 7,06	+ 6,93	— 0,26
858	+ 7,77	+ 8,02	+ 7,895	— 0,25
859	+ 8,34	+ 8,60	+ 8,47	— 0,26
860	+ 8,10	+ 8,38	+ 8,24	— 0,28
				— 0,26

Utjecaj trenja:

			težina	
	Benčić	— 0,18	20	
	Grgac	— 0,23	20	
	Sredina	— 0,21	40	
žica	I. položaj	II. položaj	I—II	Sredina
857	+ 6,85	+ 6,88	— 0,03	+ 6,87
858	+ 7,73	+ 7,89	— 0,16	+ 7,81
859	+ 8,40	+ 8,455	— 0,055	+ 8,43
860	+ 8,15	+ 8,20	— 0,05	+ 8,71
			— 0,07	

$$857 - 858 = + 0,94$$

$$857 - 859 = + 1,56$$

$$857 - 860 = + 1,30$$

Uslovna jednadžba:

$$(857) - (858) = - 0,58$$

$$(857) - (859) = - 1,08$$

$$(857) - (860) = - 0,79$$

Vjerojatne popravke:

$$(857) = + 0,61$$

$$(858) = + 0,03$$

$$(859) = - 0,47$$

$$(860) = - 0,18$$

(Nastavak slijedi)