Dr. Ing Nikola Čubranić — Zagreb

Trigonometrijsko mjerenje visina i njegova praktična upotreba

(Nastavak)

Ako je maksimalna pogrješka u uzetom periodu vremena jednaka dk_{max}, to će biti srednja pogrješka m_k jedna $m_k = \frac{1}{3}$ dk
Ovdje su razmatrane promjene refrakcionog kuta u toku jednog dana, no dade se naslutiti, da će postojati i promjene između dana i dana, koja razmatranja su za sada napuštena.

Na osnovu prednjih rezultata možemo postaviti slijedeći zaključak, koji može zadovoljiti praktičke svrhe.

Srednja pogrješka u koeficijentu m_k u naprijed spomenutom periodu dana ovisi o udaljenosti vizure od terena, te iznosi:

1. U planinskom i brdovitom predjelu, gdje vizura prolazi daleko od terena . . . . $m_k = 0{,}01$
2. U brdskom i valovitom terenu, gde vizura ne prolazi preblizu terena . . . . $m_k = 0{,}03$
3. U ravnom terenu, u ravnici, gde vizura prolazi blizu terena na udaljenosti 2 do 6 m od terena . . . . . . $m_k = 0{,}07$

Svakako će najčešći biti slučaj 2. Slučaj pod 3 neće doći mnogo do izražaja premda je m_k razmjerno dosta veliko, jer vizure u ravnici, premda prolaze blizu terena, ne mogu biti zbog vidljivosti jako dugačke, a kod kraćih vizura pogrješka u koeficientu refrakcije ne utiče na rezultat mnogo. Svakako duže vizure ne će biti preblizu terena jer ih je teško ostvariti i teško izvršiti mjerenja. A kako se trigonom. točke postavljaju uvijek na terenskim uzvisinama, kojih ima i u ravnim predjelima, to nam redovito, naročito kod dužih vizura, iste neće biti tako nepovoljne, da srednja pogrješka u koef. refrakcije bude 0,07, koja je veličina dobivena za normalno nepovoljne slučajeve u ravnici.

Ako vizura ma gde na svom putu prelazi preko nekog objekta suviše blizu — praktički možemo uzeti za mjeru 2 m — treba ju smatrati nepovoljnom i izbaciti iz kombinacije mjerenja visinskih kuteva.

Prema svemu što je ovdje rečeno može se za normalan slučaj uzeti da je:

<u>Srednja pogrješka u koef. refrakcije $m_k = 0{,}03$</u>

i dopustiti da je u ravnicama kod vizura, koje prolaze normalno blizu terena, srednja pogrješka $m_k = 0{,}07$.

Iz ovog možemo donijeti slijedeći zaključak: Refrakcija kao i pogrješka u refrakciji stoje u linearnom odnosu sa dužinom strane. Ovo vrijedi za vizure, koje prolaze približno kroz iste atmosferske prilike, odnosno jednako daleko od terena. Stabilnost refrakcije odnosno točnost određivanja visinskih razlika mnogo će više ovisiti o udaljenosti vizure od terena i terenskih objekata.

SREDNJA POGRJEŠKA U SVOĐENJU NA CENTAR

Pod srednjom pogrješkom u svođenju na centar smatrati ćemo ukupnu pogrješku određivanja visine instrumenta, visina signala i slijeganje trigonometrijskih oznaka, te ukupnu takvu pogrješku označiti ćemo sa t naime

$$t^2 = m_i^2 + m_e^2 + m_l^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (10)$$

gdje je:

m_i srednja pogrješka u određivanju visine instrumenta
m_e „ „ „ „ signala
m_l „ „ slijeganju trigonom. oznake.

Da analiziramo pojedine vrijednosti prema tome kakvu srednju vrijednost mogu te veličine postići u praksi.

Određivanje visine instrumenta i signala, ako je ista određivana direktnim mjerenjem, možemo bez daljeg smatrati, da vršimo sa točnošću

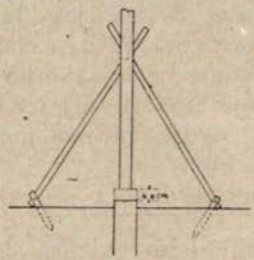
$$m_i = m_e = \pm 1 \text{ cm}$$

Ako se visine instrumenta i signala određuju indirektnim mjerenjem, bit će i pogrješke u njihovom određivanju nešto veće. Iz primjera prakse možemo procjeniti srednju vrijednost ovih pogrješaka na

$$m_i = m_e = \pm 1.5 \text{ cm.}$$

Slijeganje trigonom. oznake najteže je odrediti, a ono kod našeg načina stabilizacije uvijek postoji.

Pošto se podzemni centar stavlja na dubinu od 1 m. a nadzemna je oznaka visoka 65 cm. tako da je 10—15 cm. iznad površine zemlje, to pod kamenom oznakom dobivamo sloj rastresene zemlje od cca 50 cm, pa koliko god mi taj sloj nabijali on se mora slegnuti. Kako pri ukopavanju oznake odmah postavljamo i signal i to neposredno na kamen, to nakon slijeganja signal ostaje u zraku. Imao sam često priliku vidjeti slučaj prikazan na ovoj slici i da razlika između signala i kamena iznosi 6 pa i do 8 cm. Triangulator dolazeći na točku, po izvršenom mjerenju postavlja signal ponovno neposredno na kamen.



Sl. 7

Ova će razlika na obostrano mjerenu visinsku razliku maksimalno samo jedanput uticati — samo kod prvog mjerenja (unapred), jer će kod drugog mjerenja (natrag) signal već stajati na kamenu. Rezultat toga uticaja će biti, da će se pri niveliranju na gore dobiti visinska razlika veća nego što je u stvari, a u slučaju niveliranja na dolje dobiti će se visinska razlika po apsolutnoj vrijednosti manja nego što treba.

Maksimalno slijeganje može dostići do 8 cm. odnosno u srednjem 3 cm. Kako se pak kod točaka kod kojih se signal ne namješta direktno na kamen (piramide, tornjevi) ova pogrješka u tom obliku ne pojavljuje, a gde se i pojavljuje, obzirom na način rada djeluje jednostrano, to možemo uzeti da je $m_l = 2.5$ cm.

Smatram, da su sa gledišta praktične mogućnosti gornje veličine u njihovom srednjem iznosu realne.

Uvrstivši u formulu 10 vrijednosti.

$$t^2 = 1{,}0^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2$$
$$t = \pm\ 3{,}1 \text{ cm.}$$

Iz rješenja sistema jednadžbi 11 tj. iz dvostrukih mjerenja visinskih razlika dobili smo za ovu veličinu vrijednosti $y = t = 3{,}9$ cm.

TOČNOST ODREĐIVANJA VISINSKIH RAZLIKA

U prednjem poglavlju analizirali smo pojedine pogrješke koje možemo očekivati prilikom mjerenja visinskih razlika. Na temelju istih mogli bi već unaprijed odrediti ukupan njihov uticaj na određivanje visinskih razlika. Prema formuli 8 dobiti ćemo:

$$m^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2 m_z^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)^2 dk^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial i}\right)^2 m_i^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)^2 m_l^2$$

$$m^2 = D^2 \frac{m_z^2}{\varrho''^2} + \left(\frac{D^2}{2R}\right)^2 m_k^2 + m_i^2 + m_l^2 \quad \cdots\cdots \quad (11)$$

gdje je:

m . . .	srednja pogrješka	određivanja visinske razlike
m_z . . .	„ „	mjerenja visinskih kuteva
m_k . . .	„ „	koeficienta refrakcije
m_i . . .	„ „	u određivanju visine instrumenta
m_l . . .	„ „	u određivanju visine signala.

U predgovoru već je spomenuto, da raspolažemo sa priličnim brojem podataka trigonometrijskog nivelmana, pak ćemo pokušati točnost odrediti iz tog materijala, odnosno na temelju razlike nivelanja napred i natrag. Svakako, da ovako dobivenim rezultatima moramo dati veću težinu, nego li teoretski dobivenim veličinama u prednjem poglavlju. No u koliko se odgovarajuće veličine budu slagale bolje, to ćemo imati veću sigurnost u dobivene podatke.

Stoje nam na raspolaganju rezultata mjerenja izvršenog u godini 1939. u okolici Bitolja, Resna, Ohrida, Priboja i Sjenice. Rezultati mjerenja sređeni su tako da svakom triangulatoru odgovara jedan list, t. j. sređeni su po opažačima odnosno instrumentima. Da bi se za razne dužine strana odredilo posebice srednja pogrješka, rezultati su takođe svrstani u listove i po dužinama strana zasebice i to:

---

* Pojedine table koje prikazuju rezultate mjerenja nijesmo u mogućnosti ovdje objelodaniti zbog njihove opsežnosti. U koliko pojedinca to osobito interesuje autor će mu iste veoma rado staviti na raspolaganje.

od 0,5 km. — 1,0 km., 1,0 km. — 1,5 km., 1,5 km. — 2,0 km., 2,0 km., — 2,5 km., 2,5 km. — 3,0 km., 3,0 km. — 4,0 i 4,0. — 5,0 km. U pojedinim stupcima izneseno je: 1. redni broj, 2. strana, od koje do koje trigonom. točke je izvršeno opažanje, 3. dužina strane u kilometrima, 4. rezultati mjerenja napred i natrag, odnosno gore i dolje, 5. razlika »d« gore manje dolje. 6. s, 7. težine usvojivši za jedinicu težine 1 km. a po formuli $p = \frac{1}{s^2}$ i 8. pd^2. Naročito je vođena pažnja u pogledu predznaka d, taj je dobiven uvijek tako, da je od pozitivne visinske razlike — nivelanje na gore odbijena negativna visinska razlika — nivelanje na dolje. Konačno su napravljene sume d kao i sume proizvoda.

Prema ovim listovima napravljen je pregled rezultata i za tu svrhu sačinjena je tab. Ia (str. 76.).

Na sličan način napravljeni su za svakog opažanja listovi i u godini 1938 sačinjena Tab. Ib. Kako je napred spomenuto listovi su se izgubili, a ostala je samo tabela (str. 77.).

U tabeli Ia su po opažačima odnosno instrumentima u napred spomenutim intervalima dužine strana iznešene: 1) broj obostranih opažanja, 2) sume pozitivnih i sume negativnih diferencija visinskih razlika, 3) sume produkata kvadrata tih razlika sa odgovarajućim težinama.

SREDNJA POGRJEŠKA ODREĐIVANJA VISINSKIH RAZLIKA

Za svaki interval izračunata je srednja pogrješka jedinice težine odnosno srednja pogrješka na 1 km. nivelanja u jednom pravcu po formuli:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}$$

kao i pogrješka aritmetičke sredine iz mjerenja gore i dolje

$$M_0 = \pm \frac{m_0}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{[pd^2]}{4n}}$$

U slijedećoj skrižaljci izneseni su rezultati za pojedine intervale dužine strane.

Interval	m_o 1938	m_o 1939	m_o 1938+1939	M_o 1938	M_o 1939	M_o 1938+1939
0,5—1,0 km.	± 6,0 cm.	± 6,0 cm.	6,0 cm.	4,2 cm.	4,2 cm.	4,2 cm.
1,0—1,5 km.	± 5,2 cm.	± 5,1 cm.	5,2 cm.	3,7 cm.	3,6 cm.	3,6 cm.
1,5—2,0 km.	± 5,5 cm.	± 5,3 cm.	5,4 cm.	3,9 cm.	3,8 cm.	3,8 cm.
2,0—2,5 km.	± 4,7 cm.	± 5,5 cm.	5,1 cm.	3,3 cm.	3,9 cm.	3,6 cm.
2,5—3,0 km.	± 4,5 cm.	± 4,4 cm.	4,5 cm.	3,2 cm.	3,1 cm.	3,2 cm.
3,0—4,0 km.	±	3,9 cm.			2,8 cm.	
4,0—5,0 km.	±	1,0 cm.			0,7 cm.	

Iz ove križaljke vidi se točnost trigonometrijskog nivelanja na jedan kilometar. Upada u oči vrlo dobro slaganje rezultata dobijenih u god. 1938 sa onim u 1939 godini. Ovo možemo zahvaliti u prvom redu velikom broju mjerenja i iskusnim opažačima. Okolnost, što se ti rezultati tako dobro slažu, daju sigurnu podlogu, da se mogu vršiti daljnja razmatranja i zaključivanja.

Već iz površnog pregleda prednjih rezultata može se dobiti slika o srednjoj pogrješci određivanja visinskih razlika kod trigonometrijskog nivelmana.

Iznos srednje pogrješke za posljednji interval 4.0 km. — 5.0 km. — obzirom na mali broj mjerenja iz kojeg je određena srednja pogrješka — možemo smatrati jako nesigurnim.

Srednja pogrješka, kad se uzmu u obzir sva mjerenja iz 1938. i 1939. godine bit će:

Broj mjerenja	$[pd^2]$
185	13.116,8
644	34.475,7
631	36.750,8
190	9.760,3
36	1.439,2
7	214,3
3	5,5
1696	95.762,6

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{95.762,6}{2x1696}} = \pm 5,3 \text{ cm/km}$$

$$M_0 = \pm \frac{m_0}{\sqrt{2}} = \pm 3,7 \text{ cm/km}$$

Kao dovoljno sigurno može se ustvrditi, da je srednja pogrješka trigonometrijskog određivanja visina u jednom pravcu $\pm$ 5,3 cm/km. Pošto se ali visine redovito određuju obostranim mjerenjem visinskih razlika, to će srednja pogrješka obostrano mjerene visinske razlike iznositi $\pm$ 3,7 cm/km.

Ako uzmemo u obzir, da se visina neke točke ne određuje samo po jednoj strani nego iz više njih, to možemo već sada zaključiti, da će se visine, nakon izravnanja trigonometrijske mreže u visinskom pogledu, dobiti sa točnošću od bar $\pm$ 3,7 cm/km., a ovakvi rezultati mogu naročito u brdskim krajevima zadovoljiti mnoge tehničke potrebe i nadomjestiti u mnogo slučajeva geometrijski nivelman.

Iz tabele Ia upada u oči, da su $[+.d]$ gotovo uvijek veća od $[-d]$ kako po pojedinim opažačima tako i to po pojedinim intervalima. U konačnoj sumi iznose ovi zbirovi:

Zbir pozitivnih diferencija $= [+d] = + 4.736$ cm
„ negativnih „ $= [-d] = - 1.750$ cm

Ovo je trebalo uočiti još prije računanja srednje pogrješke. Pošto je prema tabelama: Ia i Ib uvijek $[+d] > [-d]$ osim kod red. br. 3 tab. Ia gdje je $[+d] < [-d]$.

Izgleda da postoji neka sistematska pogrješka u mjerenjima, koju ne bi bilo na odmet odrediti.

Tabla II.

Redni broj	Br. instrumenta Ime i prezime opažača	DUŽINA STRANE 0.5 — 1.0 km			1.0 — 1.5 km			1.5 — 2.0 km			2.0 — 2.5 km			2.5 — 3.0 km			3.0 — 5.0 km			PROSJEČNO 0.5 — 5 km		
		Broj „n" opažanja	[d]	sistem. pogr. $b=\frac{[d]}{n}$	Broj „n" mjerenja	[d]	sistem. pogr. $b=\frac{[d]}{n}$	Broj „n" mjerenja	[d]	sistem. pogr. $b=\frac{[d]}{n}$	Broj „n" opažanja	[d]	sistem. pogr. $b=\frac{[d]}{n}$	Broj „n" opažanja	[d]	sistem. pogr. $b=\frac{[d]}{n}$	Broj „n" mjerenja	[d]	sistem. pogr. $b=\frac{[d]}{n}$	Broj „n" mjerenja	[d]	sistem. pogr. $b=\frac{[d]}{n}$
1.	Wild 2329 N. Moligin	11	+ 35	+ 3·2	40	+ 206	+ 5·2	40	+ 455	+ 11·4	15	+ 233	+ 15·5	2	+ 40	+ 20·0	3	+ 20	+ 7·0	111	+ 989	+ 8·9
2.	Wild 1871 A. Osipov	14	+ 69	+ 4·9	42	+ 222	+ 10·0	29	+ 270	+ 9·5	9	+ 52	+ 5·8	1	+ 12	+ 12	1	0	·	96	+ 625	+ 6·5
3.	Zeiss 16743 N. Kožin	7	+ 2	+ 0·3	14	— 52	— 3·7	22	+ 3	+ 0·1	·			1	+ 5	+ 0·5				44	— 42	— 1·0
4.	Wild 2758 A. Thorevski	8	+ 40	+ 5·0	60	+ 240	+ 4·0	37	+ 255	+ 7·3	12	+ 2	+ 0·2	2	— 6	— 0·3	1	+ 7	+ 0·7	120	+ 538	+ 4·5
5.	Zeiss 16741 Lj. Pavlović	11	+ 19	+ 1·7	49	+ 346	+ 7·1	28	+ 280	+ 10·0	8	+ 101	+ 12·6		·		·			96	+ 746	+ 7·9
6.	Zeiss 11717 P. Hinčak	7	— 3	— 0·4	37	— 58	— 1·6	42	— 151	— 3·6	11	— 106	— 9·6	1	+ 7	·	1	— 17	·	99	— 328	— 3·3
7.	Wild 1800 N. Zabelin	15	+ 48	+ 3·2	37	— 5	— 0·1	46	+ 117	+ 2·6	20	+ 244	+ 12·2	3	+ 11	+ 3·7	2	+ 41	+ 20·5	123	+ 336	+ 2·7
		73	+ 210	+ 2.9	279	+ 901	+ 3·2	244	+ 1229.	+ 5·0	75	+ 526	+ 7·0	10	+ 96	+ 6·9	8	+ 51	+ 6·2	689	+ 2864	+ 4·1

Mogli bi za pojedine opažače i za svaki interval odrediti veličinu sistematske pogrješke veoma lako načinom, da svedemo da bude

$$[+ d'] = [- d'],$$

takve bi razlike imale slučajni karakter. Pa ako sistematsku pogrješku obilježimo sa δ to bi onda srednja pogrješka bila:

$$m_o^2 = \frac{[pd'^2]}{2n} + f(\delta) \qquad (12)$$

Potrebno je dakle bilo odrediti veličinu sistematske pogrješke, kao i zakon uticaja iste, odnosno funkciju f. Mjerenja sa kojima raspolažem su takva, da mi ovo poslednje nije pošlo za rukom.

U tabeli II iznijete su sistematske pogrješke po pojedinim opažačima odnosno instrumentima za svaki pojedini interval. U poslednjem stupcu sračunata je veličina sistematske pogrješke po opažačima, a u zaglavlju prosječka vrijednost sistematske pogrješke po intervalima dužine.

Svakako, kako se vidi iz tabele II, rezultati su vrlo raznoliki, a da bi se moglo govoriti o nekom zakonu. Približno su takvi rezultati bili za pojedine opažače i instrumente (jer se instrumenti po opažačima nijesu mjenjali) po veličini i predznaku i kod mjerenja u god. 1938. Naročito upada u oči velika vrijednost veličine kod opažača unesenih pod red. br. 1,2 i 5 gdje iznosi: + 8,9, + 6,5, + 7,9 cm. S obzirom da je kod red. broja 3 i 6 ta veličina čak negativna, a kod red. br. 8 razmerno jako malena (+ 2,7 cm) moramo pomišljati, da je tome uzrok sistematska pogrješka instrumenta. Ako analiziramo te pogrješke po pojedinim opažačima imamo:

ad. red. br. 1 Veličina δ povećava se sa dužinom strane (izvedene na temelju malog broja mjerenja neće se uzimati u obzir) i to više nego li proporcionalno dužini — ali ipak ne sa kvadratom dužine.

ad. red. br. 2 Veličina δ je više manje po intervalima konstantna veličina.

ad. red. br. 3 Veličina δ je jednaka nuli

ad. red. br. 4 Veličina δ je po intervalima konstantna veličina.

ad. red. br. 5 Veličina δ je proporcionalna dužini strane.

ad. red. br. 6 Veličina δ je proporcionalna dužini strane i negativna.

ad. red. br. 8 Veličina δ je po intervalima dužine najrazličitijeg karaktera, ali ipak razmerno mala veličina.

S obzirom na nestalnost veličine δ možemo zaključiti, da imade više raznih uzroka, uslijed kojih se ista pojavljuje. Ti uzroci mogu biti:

1) Lična pogrješka,
2) Instrumentalna pogrješka, savijanje durbina i slično,
3) Slijeganje trigonometrijske oznake.

Otklon težišnice, kao i promjene u koeficijentu refrakcije između više i niže ležeće točke, kad bi i postojale, bile bi vrlo malene veličine, i ne mogu po svojoj veličini doći u tolikoj mjeri do izražaja.

1) Lična pogrješka dala bi se ispitati zamjenom instrumenata po opažačima. Ovo sam ispitivanje kanio provesti kod mjerenja u god. 1941, ali su me u tom spriječile ratne prilike.

2) Eventualna instrumentalna pogrješka se iz samih mjerenja ne da razlučiti; potrebna bi bila za to naročita mjerenja. No svakako kod onih instrumenata gdje veličina δ nije konstantna veličina, nego je više manje proporcionalna sa dužinom strane, možemo naslućivati, da postoji sistematska pogrješka instrumenta.

Pokušao sam ispitati tu pogrješku. Pomogao mi je u tom triangulator Osipov. Uzeo sam od instrumenata sa kojima su dobiveni prednji podaci: Wild No. 1871 i Zeiss No. 16741. Pokušao sam dobiti eventualnu pogrješku savijanja durbina, kao i ličnu pogrješku. No nisam tu ništa mogao dobiti, jer su druge neispravnosti instrumenata bile veće. Primjetio sam na pr. ovakovu neispravnost: Naviziravši sa horizontalnim koncem predmet, dovodimo libelu da vrhuni, a kod ove posljednje operacije poremeti se viziranje uvijek u istom smjeru. Kod Wildovog instrumenta je to poremećenje malo, ali ipak uočljivo a kod Zeiss-ovog instrumenta je to poremećenje upravo grubo. Postoji izvjesno vučenje limba na vertikalnom krugu, pošto je limb čvrsto spojen sa durbinom. Pomjeravajući alhidadu prilikom dovođenja libele da vrhuni pomjera se i limb.

Niže iznosim ispitivanja u tom smislu. Mjerenja su izvedena za upotrebljeni Zeiss-ov instrument No. 16.741, te je obilježen i postupak kod toga rada. To je pomjeranje približno konstantno i iznósi u srednju 36″. Jasno je da takva (pogrješka) neispravnosti ne može ostati nezapažena, pak će se viziranje uvijek ponoviti. No kod instrumenata, gdje je ona mala recimo svega par sekunda, kao što je to slučaj kod Vildovog instrumenta No. 1871, je veoma opasna, jer se neće primjetiti, da je viziranje poremećeno, dovođenjem libele do vrhunjenja. Ta bi neispravnost bila opasna i kod spomenutog Zeiss-ovog instrumenta u slučaju, da libela nakon viziranja odstupi za malu veličinu.

I Navizirani predmet, pa dotjerana libela (Iza toga viziranje nije popravljeno)	II Nakon što je dotjerana libela ponovo naviziran predmet	Razlika
91° 23′ 26″	91° 24′ 00″	34″
23 26	24 02	36
23 22	24 04	42
23 25	23 58	33

Ne mislim ovdje reći, da svi Zeiss-ovi kao i Wild-ovi instrumenti pokazuju takovu pogrješku, ali spomenuta dva instrumenta bila su valjda uslijed dugogodišnje uporabe u takovom stanju.

Uz ovakove neispravnosti kod instrumenata postaje jasno, što prilikom ispitivanja instrumenata, koje sam izvršio sa Osipovim, nisam dobio nikakvog praktičnog rezultata u pogledu lične i sistematske pogrješke. Te neispravnosti mogu biti i uzrokom da je [+ d] nerazmjerno uvijek veća od [— d]. Sva pak daljnja točnija ispitivanja u ovom pogledu postaju iluzorna.

3) Na činjenicu, da je [+ d] > [— d] može imati izvjesnog uticaja i slijeganje trigonometrijske oznake obzirom na usvojeni kod nas način

stabiliziranja i signaliziranja, o kojoj pojavi je bilo govora u prednjem poglavlju.

PROSJEČNA POGRJEŠKA U SRAVNJIVANJU SA SREDNJOM POGRJEŠKOM m_0

Da bi se veličine prosječne pogrješke dobivale po formuli $\mu_x = \pm \frac{[|d|]}{n}$ mogla sravniti sa srednjom pogrješkom m_0, moraju se dovesti odnosno reducirati, da bi se odnosila na istu veličinu, na koju se odnosi i pogrješka m_0. Kako razlika d mjerenja napred i natrag sadrži u sebi pogrješku mjerenja napred i mjerenja natrag, to će prosječna vrijednost pogrješke jednog mjerenja biti:

$$\mu = \pm \frac{\mu_x}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{[|d|]}{n}$$

Kako se srednja pogrješka m_0 odnosi na jedinicu težine odnosno na jedan kilometar, to bi trebalo i prosječne pogrješke μ reducirati na jedan kilometar. Ovo bi ali bilo moguće, da sumiramo razlike d za svaku dužinu od 100 do 100 metara, pak da onda reduciramo na 1 km. Kako bi ovo bio prilično dug posao uzeti ćemo za približne prosječne dužine pojedinih kolona Tab. Ia.

za 0,5—1,0 km. = 0,85; km. 1,0—1,5 km. = 1,25; km. 1,5—2,0 = 1,75; km 2,0—2,5 km. = 2,2; km. 2,5—3,0 km. = 2,7; km. 3,0—4,0 = 3,4; preko 4,0 km. = 4,3; te ako ove koeficijente obilježimo sa »k« formula konačno glasila:

$$\mu_0 = \pm \frac{\mu_x}{\sqrt{2k_n}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{[|d|]}{n\,k_n}$$

U literaturi nema ovakvog izvoda koji bi odgovarao prednjoj formuli. Možemo ju nazvati: prosječnu pogrješku mjerenja u jednom pravcu na jedan kilometar. Ista odgovara srednjoj pogrješki mjerenja u jednom pravcu na jedan km. Samo što prva ima karakter prosječne pogrješke a druga srednje pogrješke.

Teorijom dat je odnos između prosječne i srednje pogrješke slijedećom formulom:

$$\mu = m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ približno } 0,8 \cdot m$$

Kad sravnimo u tabeli Ia na kraju iznesene srednje pogrješke m_0 i prosječne pogrješke, nalazimo, da je teorijski odnos veoma točno održan, što nam daje dokaza o relativno dobroj točnosti iznosa kao srednjih tako i prosječnih pogrješaka, a osim toga iz toga slaganja možemo zaključivati, da su težine uzete u račun srednje pogrješke ispravne. S obzirom, da su srednje pogrješke izvedene iz istinskih podataka odnosno razlika d »gore« manje »dolje« prosto prema formuli

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pd^2]}{2\,n}} \text{ te}$$

da suma diferencija d nije nula nego da je [+ d] po apsolutnoj vrijednosti mnogo veća nego [—d] to nam zadovoljenje gornjeg teorijskog omjera n=0,8 m u našim rezultatima daje izvjesnu sigurnost u pogledu veličina sračunatih srednjih pogrješaka, pak uslijed nepoznavanja funkcije f u formuli 10 biti će ipak najsigurnije srednju pogrješku m_0 računati iz istinskih vrijednosti d kao što je i učinjeno tj. po formuli.

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}$$

SREDNJA POGRJEŠKA OBZIROM NA DUŽINE STRANE

Općenito je mišljenje, da se srednja pogrješka kod trigonometrijskog određivanja visina na jedinicu dužine povećava sa dužinom. To se mišljenje crpi od tuda što geodetski udžbenici daju za srednju pogrješku veličinu:

$$m^2 = D^2 \cdot \frac{m_z^2}{\varrho''^2} + \left(\frac{D^2}{2R}\right)^2 \cdot m_k^2$$

odnosno smatraju, da je pogrješka u određivanju visine instrumenata kao i visine signala jednaka nuli. U stvari pak navedene pogrješke naročito pogrješke određivanja visine signala ne smijemo smatrati jednakim nuli, jer one u stvari postoje, kao što je napred bilo govora, a da i ne uzmemo u obzir kod pogrješke određivanja visine signala i uticaj slijeganja trigonometrijske oznake.

U tabeli Ia i Ib imademo sračunatu srednju pogrješku na jedinicu dužine (1 kilometar). U glavnom već površnim pogledom na dobivene rezultate možemo primjetiti izvjesno opadanje tih pogrješaka sa dužinom strane. Kod izvoda srednje pogrješke postoji doduše neka anomalija u drugom i trećem intervalu, no makar da ti rezultati imadu velike težine spram drugih rezultata u ostalim intervalima, ipak se ne možemo oteti dojmu koga dobijamo skupnim pogledom na ove rezultate. Možemo dakle zaključiti, da osim pogrješaka, koje djeluju u nekom odnosu sa dužinom strane, imade i takovih, koji djeluju nezavisno sa dužinom strane, te odmah biva jasno, da to prouzrokuju pogrješke u određivanju visine instrumenta i signala.

Prema tome treba gornju formulu ispraviti za uticaj pogrješke u određivanju visine instrumenta i signala. Ako ukupni uticaj tik pogrješaka obilježimo sa m_t imat ćemo:

$$M^2 = D^2 \frac{m_z^2}{\varrho''^2} + \left(\frac{D^2}{2R}\right)^2 m_k^2 + m_t^2$$

Iz ove formule možemo izvesti slijedeće zaključke:

1) Kad nebi uzimali u obzir poslednji član srednja pogrješka rasla bi proporcionalno dužini strane, kod malih dužina strana.

2) Posljednji član m_t^2 imat će praktičkog uticaja samo kod kratkih strana, te će se kod kratkih strana uticajem istog proporcionalitet ponešto poremetiti na štetu najkraćih strana.

3) Drugi član — uticaj pogrješke u refrakciji — uticati će na ukupnu srednju pogrješku kod većih dužina strana, te će se kod velikih dužina srednja pogrješka naglo povećati.

Možemo dakle reći, da se točnost određivanja visinskih razlika na jedinicu dužine (1 km.) kod kraćih strana ponešto povećava sa dužinom strane i to uslijed pogrješaka u određivanju visine instrumenta i signala. Svakako, da to nemože ići bezkonačno nego do izvjesne dužine strane gdje gornja pogrješka ostaje beznačajna obzirom na pogrješke u mjerenju visinskog kuta i refrakcije. Odatle će se točnost smanjivati linearno sa dužinom strane, te će se taj linearni razmjer postepeno povećavati pak će se kod velikih dužina strana točnost smanjivati sa kvadratom dužine.

ELEMENTI SREDNJE POGREŠKE IZ OBRADE PODATAKA MJERENJA VISINSKIH RAZLIKA

Pogreške koeficienta refrakcije — kako je o tome bilo ranije — na kratke dužine, kao što su naša mjerenja, nema nikakvog praktičkog uticaja. Iz tablice dozvoljenih odstupanja za dužinu od 4 km. uticaj pogreške refrakcije iznosio bi manje od 1 cm. od ukupno 19 cm. Prema tome možemo dobivene srednje pogreške smatrati kao funkciju pogreške u mjerenju visinskog kuta kao i pogreške određivanja visine instrumenata i signala. Ako sa x označimo pogrešku u mjerenju visinskih kuteva, sa y pogrešku u određivanju visine signala i instrumenta, sa m_1 srednju pogrešku svedenu na dužinu intervala, to ćemo za materijal koji obrađujemo moći po pojedinim intervalima postaviti sistem jednadžbi slijedećeg oblika:

$$s_i^2\, x^2 + y^2 = m_i^2 \; \ldots\ldots\ldots\; p_i$$

gdje je s_i srednja dužina intervala, koja je za obje godine uzeta u slijedećim iznosima: 0.85, 1.30, 1.71, 2.14, 2.70, 3.40 i 4.30, a $m_i = m_o \cdot s$ Riješenjem sistema jednadžbi 13 mogli bi dobiti veličinu x i y.

Ako prema gornjoj jednadžbi sastavimo jednadžbe za pojedine intervale imati ćemo:

$$\begin{aligned}
(0.85\ x)^2 + y^2 &= 5.1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 6.2 \\
(1.30\ x)^2 + y^2 &= 6.8^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 21.5 \\
(1.71\ x)^2 + y^2 &= 9.2^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 21.1 \\
(2.14\ x)^2 + y^2 &= 10.9^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 6.3 \\
(2.70\ x)^2 + y^2 &= 12.1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 1.2 \\
(3.40\ x)^2 + y^2 &= 13.3^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 0.2 \\
(4.30\ x)^2 + y^2 &= 3.5^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 0.1
\end{aligned} \qquad 13$$

Da bi mogli riješiti ovaj sistem jednadžbi, moramo ga izvesti u linearnom obliku razvijen u Teylerov red.

$$m^2 = s^2 x^2 + y^2$$

$$F = m_i = (s_i^2\, x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

— — — — — — — —

— — — — — — — —

— — — — — — — —

$$m_i = F(x_0, y_0) + \frac{\delta F}{\delta x_0}\Delta x + \frac{\delta F}{\delta y_0}\Delta y$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

$$l_1 = a_1 \triangle x + b_1 \triangle y$$
$$l_2 = a_2 \triangle x + b_2 \triangle y$$

— — — — — — — —

Gdje je

$$\frac{\delta F}{\delta x_0} = \frac{1}{2}(s_i^2 x^2 + y_2)^{-1/2} \cdot 2 s_i^2 x = \frac{s_i^2}{\sqrt{s_i^2 x^2 + y^2}} = a_i$$

$$\frac{\delta F}{\delta y_0} = \frac{1}{2}(s_i^2 x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2 y = \frac{y}{\sqrt{s_i^2 x^2 + y^2}} = b_i$$

Za približne vrijednosti x_0 i y_0 uzeti ćemo:

$$x_0 = 4.0 \text{ cm}$$
$$y_0 = 5.0 \text{ cm}$$

te po istim vrijednostima sračunati ćemo Fi (x_0, y_0) i koeficiente a_i i b_i te slobodni član l.

$$F_1^2 = 0.72 \times 16 + 25 = 37.5 \qquad F_1 = 6.1$$
$$F_2^2 = 1.70 \times 16 + 25 = 52.2 \qquad F_2 = 7.2$$
$$F_3^2 = 2.90 \times 16 + 25 = 71.4 \qquad F_3 = 8.5$$
$$F_4^2 = 4.60 \times 16 + 25 = 98.6 \qquad F_4 = 9.9 \qquad (14)$$
$$F_5^2 = 7.30 \times 16 + 25 = 141.8 \qquad F_5 = 11.9$$
$$F_6^2 = 11.60 \times 16 + 25 = 210.6 \qquad F_6 = 14.5$$
$$F_7^2 = 18.50 \times 16 + 25 = 321.0 \qquad F_7 = 17.9$$

Iz jednadžbe 13 imamo odnos $F_i = m_i + l_i$, a sravnjenjem sa jednadžbama 14 dobivamo l :

$$m_1 + l_1 = 5.1 \qquad l_1 = -1.0$$
$$m_2 + l_2 = 6.8 \qquad l_2 = -0.4$$
$$m_3 + l_3 = 9.2 \qquad l_3 = +0.7$$
$$m_4 + l_4 = 10.9 \qquad l_4 = +1.0$$
$$m_5 + l_5 = 12.1 \qquad l_5 = +0.2$$
$$m_6 + l_6 = 13.3 \qquad l_6 = -1.2$$
$$m_7 + l_7 = 3.8 \qquad l_7 = -14.4$$

$$a_1 = \frac{2,9}{6,1} = 0.47 \qquad b_1 = 0.82$$

$$a_2 = \frac{6,8}{7,2} = 0.95 \qquad b_2 = 0.70$$

$$a_3 = \frac{11,6}{8,5} = 1.36 \qquad b_3 = 0.59$$

$$a_4 = \frac{18,4}{9,9} = 1.85 \qquad b_4 = 0.50$$

$$a_5 = \frac{29,2}{11,9} = 2.45 \qquad b_5 = 0.42$$

$$a_6 = \frac{46,4}{14,5} = 3.20 \qquad b_6 = 0.34$$

$$a_7 = \frac{74,0}{17,9} = 4.12 \qquad b_7 = 0.28$$

Jednadžbe 13 glasiti će u konačnom obliku: p_i

$0.47 \triangle x + 0.82 \triangle y = -1.0$ 6.2
$0.95 \triangle x + 0.70 \triangle y = -0.4$ 21.5
$1.85 \triangle x + 0.50 \triangle y = +0.7$ 21.1
$1.36 \triangle x + 0.59 \triangle y = +1.0$ 6.3
$2.45 \triangle x + 0.42 \triangle y = +0.2$ 1.2
$3.20 \triangle x + 0.34 \triangle y = -1.2$ 1.2
$4.12 \triangle x + 0.28 \triangle y = -14.4$ 1.0

Riješavajući ovaj sistem jednadžbi po metodi najmanjih kvadrata imamo:

paa	pab	pal	pbb	pbl
1.4	2.4	— 2.9	4.2	— 5.1
19.3	14.3	— 8.2	10.5	— 6.0
39.0	16.9	+ 20.1	7.3	+ 8.7
21.5	5.8	+ 11.7	1.6	+ 3.2
7.2	1.2	+ 0.6	0.2	+ 0.1
2.0	0.2	— 0.8	0.0	— 0.1
1.7	0.1	— 5.9	0.0	— 0.4
92.1	40.9	+ 14.6	23.8	+ 0.4

$$92.1 \triangle x + 40.9 \triangle y = +14.6$$
$$40.9 \triangle x + 23.8 \triangle y = +0.4$$

$x = +0.63, \; y = -1.07$
$x = x_0 + x = 4.63$
$y = y_0 + y = 3.93$

PROBA

S^2x^2	+	y^2 =	F^2	F	F'	F — F'
15.4	+	15.4	30.8	5.6	5.1	— 0.5
36.4	+	15.4	51.8	7.2	6.6	— 0.4
62.2	+	15.4	77.6	8.8	9.2	+ 0.4
98.5	+	15.4	113.9	10.7	10.9	+ 0.2
156.2	+	15.4	171.6	13.1	12.1	— 1.0
248.0	+	15.4	263.4	16.2	13.3	— 2.9
395.0	+	15.4	410.4	20.2	3.5	— 16.7

Dok su u prednjem poglavlju dobijene veličine za ukupnu srednju pogrešku kod pojedinih dužina strana, prednjim smo računom dobili najvjerojatnije vrijednosti za elemente srednje pogreške t. j. za srednju pogrešku u mjerenju visinskog kuta i za srednju pogrešku u određivanju visine signala i instrumenta, dakako sve na temelju mjerenja visinskih razlika u god. 1938. i 1939.

Ovim smo rješenjem dobili konačno, da srednja pogreška u određivanju visine instrumenta i signala za pojedinu visinsku razliku iznosi 3.93 cm. i da srednja pogreška u mjerenju visinskih kuteva iznosi 4.63 cm. po kilometru dužine. Ova posljednja veličina odgovara veličini kuta od 9″4. Ove se veličine odnose na mjerenje u jednom smjeru.

I jedna i druga pogreška ovako dobivena veća je od pogreške, koje su dobivene u prednjem poglavlju.

Naročito ispala nam je neočekivano velika pogreška u mjerenju visinskih kuteva (9″4), dok smo kod analize iz posebnih mjerenja dobili mnogo manje veličine.

No pošto smo ovu posljednju veličinu (9″4) dobili iz razlike mjerenja visinskih razlika gore-dolje moramo svakako za ocjenu točnosti računati sa ovom posljednjom veličinom.

Razlozi, da je ova pogreška nerazmjerno veća od onog, što bi mogli očekivati na osnovu ispitivanja u prednjem poglavlju, biti će:

1.) Zanemarena je pogreška koeficienta refrakcije, koja se je moguće ipak negdje pojavila, naročito gdje je vizura prolazila blizu terena. Isto je tako zanemaren eventualni otklon težišnice.
2.) Srednja pogreška dobivena iz obostranih mjerenja mora biti uvijek veća od srednje pogreške računate iz odstupanja od aritmetske sredine kod mjerenja jednog kuta. Na prvi način dobivena srednja pogreška obuhvaća ne samo pogreške viziranja nego obuhvaća i ostale pogreške, kao ličnu, pa razne sistematske pogreške instrumenata. Već smo i prije pokazali na to, da je $[+d] > [-d]$ pa se taj uticaj očitovao i na srednjoj pogreški.

No za očekivati je, da će se mnoge od ovih pogrešaka u rezultatu (aritmetskoj sredini nivelanja gore i nivelanja dolje) eliminirati, pa će i stvarna srednja pogreška biti od ovdje dobivenih veličina manja. No zbog sigurnosti, mi se na ovaj momenat nećemo obazirati, te ćemo za donja razmatranja uzeti gore dobivene podatke.

SASTAV TABLICE SREDNJIH POGREŠAKA I DOZVOLJENIH ODSTUPANJA KOD TRIGONOMETRIJSKOG MJERENJA VISINA

Tablicu srednjih pogrešaka može se već izraditi jednostavno prema rezultatima dobivenim rješenjem normalnih jednadžbi t. j. ako postavimo da je pogreška na km $x = 4.7$ cm. i konstantna $y = 3.9$ cm. jedno stavno po formuli.

$$(4.6\ S)^2 + 3.9^2 = m^2$$

Uvrštavanjem pojedinih vrijednosti za dužinu strane S može se na lak način dobiti srednja pogreška za izvjesnu dužinu trigonometrijske strane (strane su date u kilometrima). No kako je gornja formula izvedena na temelju obostranih mjerenja dužina strana od 0.5—4.0 km. to da bi htjeli sračunati srednje pogreške u većem intervalu potrebno je uzeti još jedan član, koji do dužine strane od 4 km. nema praktičkog uticaja na visinsku razliku, ali sa povećanjem dužine strane se taj uticaj naglo povećava: pogreška uslijed refrakcije.

Ako uzmemo, da je:

$$x = + 4.7 \text{ cm. što odgovara kutu } 9'' 4$$
$$y = \pm 3.9$$
$$m_k = + 0.03$$

te ako te vrijednosti uvrstimo u formulu 11, imati ćemo:

$$m^2 = 9.4^2 \frac{D^2}{\varrho''^2} + 0.03^2 \left(\frac{D^2}{2R}\right)^2 + 3.9^2$$

$$m^2 = 0{,}000\,000\,002\,07\ D^2 + 0.000\,000\,000\,000\,000\,005\,54\ D^4 + 3{,}9^2$$

Ako izrazimo m u metrima a D u kilometrima

$$m^2 = 0.00207\ D^2 + 0.00000554\ D^4 + 0.00152$$

Maksimalnu pogrešku razlike iz 2 mjerenja jedne strane, napred natrag, odnosno gore dolje dobiti ćemo po formuli:

$$\Delta M = 3\,m \cdot \sqrt{2} = 4\,m$$

Nemamo nikakovih zahtjeva, da tražimo bolje rezultate, te možemo slobodno maksimalnu pogrešku smatrati za dozvoljenu, pak možemo sastaviti prema tome tablicu.

Uz tablicu srednjih pogrešaka može se primjetiti slijedeće:

1. U tablici dobivene vrijednosti odgovaraju instrumentima tipa Zeiss i Wild, podatka vertikalnog kruga 1".

2. Dio tablice koji se odnosi na dužine strana veće od 10 km. i koji je odijeljen imade samo teoretsku vrijednost. Bazira se na predpostavkama koje vrijede za kratke stranice. I ako u tome dijelu tablice podatci nisu dovoljno sigurni ipak daju mogućnost pregleda veličine i povećanja srednje pogreške sa dužinom strane.

3. Vrijednosti za dužine do 5 km. odgovaraju u podpunosti jer su dobivene iz mjerenja visinskih razlika kod dužina strana do 5 km.

4. Vrijednost za dužine preko 5 km. pa do 10 km. mogli bi smatrati, da su izvedene ekstrapolacijom. No s obzirom, da elementi, koji utiču na srednju pogrešku, nisu dobiveni samo iz mjerenja visinskih razlika, kojima smo raspolagali, t. j. sa dužinom strane do 5 km. nego su ustanovljeni i posebnom analizom, koja imade općeniti karakter, to možemo smatrati da će u tablici dobivene veličine biti realne.

Iz tablice srednjih pogrešaka izlazi:

a. Presudno značenje na veličinu srednje pogreške na kratkim stranama do 0.8 km. dužine imade konstantni član formule. Sa povećanjem dužine uticaj konstantnog člana se naglo smanjuje. Kod dužine 1.5 km. je uticaj konst. člana = 1.0 cm. na ukupno 8 cm. a kod 4 km. je taj uticaj = 0.4 cm. na ukupno 19 cm.

b. Uticaj pogreške u koeficientu refrakcije je kod kratkih dužina strana beznačajan, a sa povećanjem dužina naglo raste. Tek kod dužine 5.0 km. je uticaj pogrešnosti koef. refrakcije na ukupnu pogrešku (24 cm.) svega 0.7 cm. No zato kod dužine od 20 km. taj uticaj premašuje ostale uticaje.

c. Ako bi srednju pogrešku izrazili na 1 km. to ćemo za razne dužine dobiti

za 1 km.	6.0 cm/km.	za 6 km.	4.8 cm/km.
„ 2 „	5.0 cm/km.	„ 7 „	4.9 cm/km.
„ 3 „	4.8 cm/km.	„ 8 „	4.9 cm/km.
„ 4 „	4.7 cm/km.	„ 9 „	5.0 cm/km.
„ 5 „	4.8 cm/km.	„ 10 „	5.1 cm/km.

Iz ovoga možemo zaključiti, da je na dužinu 1 km. u intervalu 2—10 km. srednja pogreška više manje konstantna veličina, veličine 4.5—5 cm. svakako zahvaljujući činjenici što u tom intervalu presudan uticaj imade prvi član formule 9 t. j. pogreška u mjerenju visinskih kuteva. Najtočnije podatke odnosno najmanje srednje pogreške na 1 km. dužine dobivamo u intervalu 3—5 km.

Tablica srednjih pogrešaka i dozvoljenih odstupanja kod trigonometrijskog određivanja mjerenja visina za obostrana mjerenja gore — dolje.

Tablica I.

D Kilom	0,00207 D^2	0,00000554 D^2	0,00152	m^2	m	Д m
0.5	0.00 052	0.00 000	0.00 152	0.00 204	0.05	0.18
0.6	0.00 075	0.00 000	0.00 152	0.00 227	0.05	0.19
0.7	0.00 101	0.00 000	0.00 152	0.00 253	0.05	0.20
0.8	0.00 132	0.00 000	0.00 152	0.00 284	0.05	0.21
0.9	0.00 168	0.00 000	0.00 152	0.00 320	0.06	0.23
1.0	0.00 207	0.00 001	0.00 152	0.00 260	0.06	0.24
1.1	0.00 230	0.00 001	0.00 152	0.00 383	0.06	0.25
1.2	0.00 298	0.00 001	0.00 152	0.00 451	0.07	0.27
1.3	0.00 350	0.00 002	0.00 152	0.00 504	0.07	0.28
1.4	0.00 406	0.00 002	0.00 152	0.00 560	0.07	0.30
1.5	0.00 466	0.00 003	0.00 152	0.00 621	0.08	0.32
1.6	0.00 530	0.00 004	0.00 152	0.00 686	0.08	0.33
1.7	0.00 600	0.00 005	0.00 152	0.00 757	0.09	0.35
1.8	0.00 671	0.00 006	0.00 152	0.00 892	0.09	0.36
1.9	0.00 747	0.00 007	0.00 152	0.00 906	0.10	0.38
2.0	0.00 830	0.00 009	0.00 152	0.00 991	0.10	0.40
2.2	0.01 002	0.00 013	0.00 152	0.01 168	0.11	0.43
2.4	0.01 192	0.00 018	0.00 152	0.01 362	0.12	0.47
2.6	0.01 339	0.00 025	0.00 152	0.01 576	0.13	0.50
2.8	0.01 623	0.00 034	0.00 152	0.01 809	0.13	0.54
3.0	0.01 863	0.00 045	0.00 152	0.02 060	0.14	0.58

D Kilom	0,00207 D²	0,00000554 D³	0,00152	m²	m	Д m
3.2	0.02 120	0.00 058	0.00 152	0.02 330	0.15	0.61
3.4	0.02 393	0.00 074	0.00 152	0.02 619	0.16	0.65
3.6	0.02 683	0.00 093	0.00 152	0.02 928	0.17	0.68
3.8	0.02 989	0.00 115	0.00 152	0.03 256	0.18	0.72
4.0	0.03 312	0.00 142	0.00 152	0.03 606	0.19	0.76
4.2	0.03 651	0.00 172	0.00 152	0.03 975	0.20	0.80
4.4	0.04 008	0.00 207	0.00 152	0.04 367	0.21	0.84
4.6	0.04 380	0.00 248	0.00 152	0.04 780	0.22	0.88
4.8	0.04 769	0.00 294	0.00 152	0.05 215	0.23	0.91
5.0	0.05 175	0.00 346	0.00 152	0.05 673	0.24	0.95
5.2	0.05 597	0.00 405	0.00 152	0.06 154	0.25	0.99
5.4	0.06 036	0.00 471	0.00 152	0.06 659	0.26	1.03
5.6	0.06 492	0.00 545	0.00 152	0.07 189	0.27	1.07
5.8	0.06 963	0.00 672	0.00 152	0.07 742	0.28	1.11
6.0	0.07 452	0.00 718	0.00 152	0.08 322	0.29	1.15
6.2	0.07 957	0.00 819	0.00 152	0.08 928	0.30	1.20
6.4	0.08 479	0.00 929	0.00 152	0.09 560	0.31	1.24
6.6	0.09 017	0.01 051	0.00 152	0.10 220	0.32	1.28
6.8	0.09 572	0.01 184	0.00 152	0.10 908	0.33	1.32
7.0	0.10 142	0.01 330	0.00 152	0.11 624	0.34	1.36
7.2	0.10 731	0.01 489	0.00 152	0.12 327	0.35	1.41
7.4	0.11 335	0.01 661	0.00 152	0.13 148	0.36	1.45
7.6	0.11 956	0.01 848	0.00 152	0.13 956	0.37	1.50
7.8	0.12 954	0.02 051	0.00 152	0.14 797	0.38	1.54
8.0	0.13 248	0.02 269	0.00 152	0.15 669	0.40	1.58
8.2	0.13 919	0.02 505	0.00 152	0.16 576	0.41	1.63
8.4	0.14 606	0.02 758	0.00 152	0.17 516	0.42	1.67
8.6	0.15 310	0.03 030	0.00 152	0.18 492	0.43	1.72
8.8	0.16 030	0.03 322	0.00 152	0.19 504	0.44	1.77
9.0	0.16 767	0.03 635	0.00 152	0.20 554	0.45	1.81
9.2	0.17 520	0.03 969	0.00 152	0.21 641	0.47	1.86
9.4	0.18 290	0.04 325	0.00 152	0.22 767	0.48	1.91
9.6	0.19 077	0.04 705	0.00 152	0.23 934	0.49	1.96
9.8	0.19 880	0.05 110	0.00 152	0.25 142	0.50	2.01
10.0	0.20 700	0.05 540	0.00 152	0.26 392	0.51	2.05
11.0	0.25 047	0.08 111	0.00 152	0.33 310	0.58	2.31
12.0	0.29 808	0.11 488	0.00 152	0.41 448	0.64	2.57
13.0	0.34 983	0.15 823	0.00 152	0.50 958	0.71	2.85
14.0	0.40 572	0.21 282	0.00 152	0.62 006	0.79	3.15
15.0	0.46 575	0.28 046	0.00 152	0.74 773	0.87	3.46
16.0	0.52 992	0.36 307	0.00 152	0.89 451	0.95	3.78
17.0	0.59 823	0.46 271	0.00 152	1.06 246	1.03	4.12
18.0	0.67 068	0.58 157	0.00 152	1.25 377	1.12	4.48
19.0	0.74 727	0.72 198	0.00 152	1.47 077	1.21	4.86
20.0	0.82 800	0.88 640	0.00 152	1.71 592	1.31	5.24

TEŽINE VISINSKIH RAZLIKA

Kako su težine recipročne kvadratima srednjih pogrešaka to ih možemo odrediti po jednadžbi

$$p = \frac{k}{m^2}$$

gdje je k proizvoljna konstanta.

Za trigonometrijski nivelman obično se daje za težinu formula

$$p = \frac{1}{s^2}$$

Da zadržimo isti međusobni odnos težine staviti ćemo, da je:

$$\frac{k}{m^2} = \frac{1}{s^2}$$

$$k = \frac{m^2}{s^2}$$

Iz raznih rezultata tako dobivenih može se uzeti srednja, koja će najbolje odgovarati za sve dužine. Praktički biti će najzgodnije za daljnja računanja, da se uzme ona vrijednost za k, koja odgovara jednom km. da jedinica težine bude 1 km. t. j.

$$k = 0.00360$$

U priloženoj tablici težina, sračunate su težine po formuli

$$p = \frac{0.00360}{m^2}$$

kao i recipročne vrijednosti

$$\frac{1}{p} = \frac{m^2}{0.00360}$$

Ujedno su sračunate težine po formuli

$$p = \frac{1}{S^2}$$

Iz dobivenih vrijednosti u tablici II izlazi da od dužine strana 1.5 km. na više možemo slobodno sve težine računati po formuli

$$p = \frac{1}{S^2}$$

dok za kraće dužine te vrijednosti moramo uzeti iz priležeće tablice.

Kako je odnos težina jednostrano određenih visinskih razlika (p') i obostrano određenih visinskih razlika (p) jednak:

$$p = 2p' \quad \text{ili} \quad \frac{p}{2} = p'$$

to možemo sračunati i vrijednosti težina jednostrano mjerenih visina.

U tablici imade 6 stupaca. U 2. stupcu sračunate su težine s obzirom na formulu $p = \frac{k}{m^2}$, a u stupcu 3 obzirom na formulu $p = \frac{1}{s^2}$. Svakako posljednja formula nije potpuno točna, naročito kod malih dužina strana (do 1 km.). Kako su pak težine već po svom karakteru relativno približne veličine, to ih ne treba ni potpuno strogo uzimati. Formula $p = \frac{1}{s^2}$ je praktičnija od prve formule, te se može po njoj računati težina za dužine od 1 km. na više, dočim za dužine kraće od 1 km. svakako težine uzimati iz tablice. Prema ovome su u tablici i ostali stupci (4, 5, 6) računati t. j. do dužine strane 0.9 km. s obzirom na osnovnu formulu $p = \frac{k}{m^2}$ a za dužine strana od 1.0 km. dalje obzirom na osnovnu formulu $P = \frac{1}{s^2}$

TABLICA TEŽINE

Tablica II

S km.	Obostrano odredjene vis. razlike			Jednostrano odredjene vis. razlike		S km.	Obostrano odredjene vis. razlike			Jedn strano odredjene vis. razlike	
	$P = \frac{0.0036}{m^2}$	$P = \frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{P} = s^2$	$P = \frac{1}{2s^2}$	$\frac{1}{P} = 2S^2$		$P = \frac{0.0036}{m^2}$	$P = \frac{1}{S^2}$	$\frac{1}{P} = S^2$	$P = \frac{1}{S^2}$	$\frac{1}{P} = 2S^2$
0.5	1.76	4.00	0.57	0.88	1.13	4.6	0.075	0.048	21.16	0.024	42.32
0.6	1.60	2.78	0.62	0.80	1.25	4.8	0.069	0.043	23.04	0.022	64.08
0.7	1.42	2.04	0.70	0.71	1.40	5.0	0.064	0.040	25.00	0.020	50.00
0.8	1.27	1.56	0.79	0.62	1.61	5.2	0.060	0.037	27.04	0.019	54.00
0.9	1.13	1.23	0.89	0.56	1.78	5.4	0.054	0.034	29.16	0.017	58.32
1.0	1.00	1.00	1.00	0.50	2.00	5.6	0.050	0.032	31.36	0.016	62.72
1.1	0.94	0.83	1.21	0.41	2.42	5.8	0.047	0.030	33.64	0.015	67.28
1.2	0.80	0.69	1.44	0.35	2.88	6.0	0.043	0.028	36.00	0.014	72.00
1.3	0.71	0.59	1.59	0.30	3.38	6.2	0.040	0.026	38.44	0.013	76.88
1.4	0.64	0.51	1.96	0.26	3.92	6.4	0.038	0.024	40.96	0.012	81.92
1.5	0.58	0.44	2.25	0.22	4.50	6.6	0.035	0.023	43.56	0.012	87.12
1.6	0.53	0.39	2.56	0.20	5.12	6.8	0.033	0.022	46.24	0.011	92.48
1.7	0.48	0.35	2.89	0.17	5.78	7.0	0.031	0.020	49.00	0.010	98.00
1.8	0.44	0.31	3.24	0.15	6.48	7.2	0.029	0.019	51.48	0.010	103.68
1.9	0.40	0.28	3.61	0.14	7.22	7.4	0.027	0.018	54.76	0.009	109.52
2.0	0.36	0.25	4.00	0.12	8.00	7.6	0.026	0.017	57.76	0.009	115.52
2.2	0.31	0.21	4.84	0.10	9.68	7.8	0.024	0.016	60.84	0.008	121.68
2.4	0.27	0.17	5.76	0.09	11.52	8.0	0.023	0.015	64.00	0.008	128.00
2.6	0.23	0.15	6.76	0.07	13.52	8.2	0.022	0.015	67.24	0.007	134.48
2.8	0.20	0.13	7.84	0.06	15.68	8.4	0.021	0.014	70.56	0.007	141.12
3.0	0.17	0.11	9.00	0.06	18.00	8.6	0.020	0.013	73.96	0.006	147.92
3.2	0.15	0.10	10.24	0.05	20.48	8.8	0.018	0.013	77.44	0.006	154.88
3.4	0.14	0.09	11.56	0.05	23.12	9.0	0.017	0.012	81.00	0.006	162.00
3.6	0.12	0.08	12.96	0.04	25.92	9.2	0.016	0.012	84.64	0.006	169.28
3.8	0.11	0.07	14.44	0.04	28.88	9.4	0.016	0.011	88.36	0.005	176.72
4.0	0.10	0.06	16.00	0.03	32.00	9.6	0.015	0.011	92.16	0.005	184.32
4.2	0.09	0.06	17.64	0.03	35.28	9.8	0.014	0.010	96.04	0.005	192.08
4.4	0.08	0.05	19.36	0.03	38.72	10.0	0.014	0.010	100.00	0.005	200.00

OCJENA TOČNOSTI POJEDINIH INSTRUMENATA

S obzirom na veličinu srednje pogreške prema priloženoj tablici može se reći, da visinske razlike kod dugačkih strana nisu dovoljno točne, te treba tražiti mogućnosti, da se ista poveća, ako se hoće upotrijebiti trigonometrijsko određivanje visina na dugačkim stranama.

Već su prije iznesene srednje pogreške, što ih daju pojedini instrumenti te postaje jasno, ako se želi povećati točnost mjerenja i određivanja visinskih razlika, da treba primjeniti kod mjerenja univerzalne instrumente starog tipa. (Starke-Kammerer, Maks Hildebrand) sa podatkom doboša na vertikalnom krugu 2″ do 5″.

Kako je već unaprijed izneseno i kako se iz priloženog elaborata vidi, takovim instrumentima postiže se točnost mjerenja kuta u jednom girusu $m = \pm 2''$, a ponavljanjem u 4 girusa smanjuje se srednja pogreška na veličinu $m = \pm 1''$.

Svakako preimućstvo u pogledu točnosti valja dati instrumentima, kod kojih je libela čvrsto spojena za nosač durbina i kod kojih se limbus vertikalnog kruga dade pomicati, da se otklone slučajne i sistematske pogreške podjele istoga.

U poglavlju »Srednja pogreška mjerenja visinskih kuteva« dobili smo za instrumente tipa Zeiss i Wild podatka 1″ srednju pogrešku mjerenog kuta u 3 girusa $m = \pm 6''$. Tamo smo također zaključili, da instrumenti Zeiss-a daju nešto točnije rezultate od Wild-ovih, i to smo pokušali obrazložiti. Iz obostranih mjerenja čiji su rezultati izneseni u tablici Ib izlazi približno isto naime:

$$m_{o\,zeiss} = \sqrt{\frac{37410}{761 \times 2}} = \sqrt{24.58} = \pm 5.0 \text{ cm.}$$

na isti način dobivamo za Wildov instrumenat

$$m_{o\,wild} = \pm 5.6 \text{ cm.}$$

SREDNJA POGREŠKA NAKON IZRAVNANJA MREŽE

Veličina srednje pogreške nakon izravnanja mreže svakako je najznačajnija veličina i vrlo je interesantno pogledati kretanje iste. Tu dobivamo stvarne i sigurne podatke, jer se mreža naslanja na precizni nivelman.

U tablici V.* izneseni su rezultati izravnanja trigonometrijskog nivelmana. Isti se odnose na trigonometrijski nivelman izvršen u okolici Bora (Zaječar). Moram unaprijed spomenuti, da ovdje izneseni podatci (Bora) odgovaraju podpuno po veličini pogreške rezultatima u Makedoniji i Metohiji. Opažanje je izvršeno instrumentom istog tipa, kao što je bilo unaprijed govora, da su se opažanja vršila t. j. Zeiss T. II. Opažač bio je ing. Miodrag Jovanović.

---

* Iz tehničkih razloga tabela sa podacima izravnanja izostavljena.

U toj tabeli izneseno je po vlakovima: dužine pojedinih strana trigonometrijskog nivelmana i popravke što su ih pojedine visinske razlike primile uslijed izravnanja na precizan nivelman.

Ukupno imade 127 visinskih razlika u ukupnoj dužini od 180.2 km. Prema tome je prosječna dužina tih strana bila 1.4 km.

Točnost trigonometrijskog nivelmana možemo procijeniti samo iz onih vlakova, koji se oslanjaju na repere, pošto možemo smatrati visine repera potpuno točnim u sravnjenju sa trigonometrijskim nivelmanom. Iz tih vlakova t. j. iz 3 takova vlaka (Tab. V.) izlazi:

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}\ ; m = \sqrt{\frac{64.86}{15}} = \pm\ 2.08\ \text{cm/km}$$

Svakako ova je točnost prilična i upravo iznenađujuća. Ona je mnogo veća, nego što se dade zaključiti iz obostranih mjerenja visinskih razlika ($m = \pm\ 3.7$ cm). Trebalo je zapravo zbog izravnanja očekivati veću pogrešku od $\pm\ 3.7$ cm. Ova se anomalija u korist točnosti dade objasniti jedno time, da kod mjerenja dolje i mjerenja gore postoje izvjesne sistematske pogreške, koje se u oba pravca eliminiraju. Da izvjesne sistematske pogreške postoje bilo je već spomenuto i izneseno u obradi rezultata mjerenja. Kad uzmemo sve vlakove u obzir dobivamo za srednju pogrešku:

$$m = \sqrt{\frac{1785.65}{126}} = \pm\ 3.76\ \text{cm/km}$$

Prosječna pak pogreška

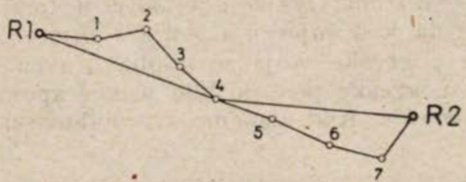
$$m = \frac{509}{180{,}2} = 2.8\ \text{cm/km}$$

Ovdje izneseni podaci su veoma dragocjeni jer nam pokazuju na točnost, koja se može trigonometrijskim nivelmanom postići, a praktički daju mogućnost upotrebu trigonometrijskog nivelmana svagdje i za sve tehničke potrebe, gdje se ne traži veća točnost. U brdskom terenu je ta točnost dovoljna ne samo za sva projektiranja, nego i za izvedbu mnogih radova.

IZRAVNANJE MREŽE

Iz rezultata mjerenja dobili smo, da je srednja pogreška određivanja jedne visinske razlike određene trigonometrijskim nivelanjem tamo i natrag 3.7 cm/km. Za srednju pogrešku nakon izravnanja mreže (okolica Bora) dobili smo veličinu 3.76 cm/km. Tako dobivene srednje pogreške govore nam mnogo, ali nam ne kažu dosta.

Mnogo bi sigurniju sliku imali, kad bi u nekoj triangulacionoj mreži odredili visine trigonometrički i geometrijskim nivelmanom. Geometrijski nivelman obzirom na njegovu milimetarsku točnost možemo u sravnjenju sa trigonometrijskim nivelmanom smatrati za apsolutno točan. Razlike visina dobivene iz oba dale bi prave pogreške trigonometrijskog nivelmana za svaku točku. Iz tih pravih pogrešaka mogli bi dobiti sliku promjene istih u odnosu na udaljenost od datih točaka preciznog nivelmana, kao i u odnosu na način izravnanja mreže. No pošto ovdje nemamo takovih mjerenja — takav rad bio bi dosta skup, jer je precizni nivelman teško svuda provoditi — moramo tu točnost razmotriti iz podataka trigonometrijskog nivelmana. Na temelju takvih razmatranja moći ćemo bolje postaviti i sastaviti plan računanja i izravnanja mreže u visinskom pogledu. Ono je svakako vrlo važno, jer dobrim planom možemo povećati točnost, a lošim smanjiti točnost određivanja visina trigonometrijskih točaka. Taj plan potreban nam je prije nego što počnemo vršiti opažanja. Pretpostavimo da imademo slijedeću situaciju: Imademo dvije točke preciznog nivelmana R_1 i R_2, između kojih se nalazi 7 trigonometrijskih točaka, koje su međusobno i sa reperima spojeni obostranim mjerenjima visinskih razlika. Radi jednostavnosti predpostavimo, da se točke nalaze na podjednakoj međusobnoj udaljenosti od 2 km. Točka 4 biti će, pošto se nalazi na sredini vlaka, svakako u apsolutnom pogledu najlošije određena.



Sl. 8

Srednja pogreška jedne visinske razlike biti će:

$$2 \text{ km} \times 3.7 \text{ cm/km.} = \pm 7.4 \text{ cm.}$$

Na temelju ovoga možemo zaključiti, da će točka 4 biti određena u odnosu na precizni nivelman sa srednjom pogreškom

$$\pm \frac{7{,}4\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \pm 10.5 \text{ cm}$$

Praktički vidimo, da se ta pogreška ni u sredini vlaka neće povećati.

Dopustimo, da točka 4 može biti određena i direktnim obostranim mjerenjima sa R_1 i R_2.

U tom slučaju bi srednja pogreška iznosila $\frac{8 \text{ km} \times 3.7 \text{ cm/km}}{\sqrt{2}} =$ $\pm$ 21 cm. Kraj ovog nismo uzeli u obzir, da već kod dužine od 8 km. pogreška u refrakciji može osjetljivije da utiče na točnost. Dakle i ne uzimajući u obzir pogrešku u refrakciji točka 4 određena direktnim putem imade dvostruku srednju pogrešku nego bi određena preko među točaka.

Da bi točku 4 odredili sa točnošću $\pm$ 10.5 cm. morali bi imati 7 direktnih mjerenja.

Iz ovog možemo razabrati, da će se najpouzdaniji i najtočniji rezultati dobiti, ako koristimo kod računanja i izravnanja najkraće udaljenosti t. j. trigonometrijske pravce četvrtog reda. Osim toga korišćenjem najkraćih udaljenosti, dobiti ćemo visine trigonometrijskih točaka u jedinstvenom sustavu, kao i one, koje su određene preciznim nivelmanom t. j. geoidne visine. Kako je naime rečeno u poglavlju otklona težišnice, promjene smjera težišnice od točke do točke na kratkoj dužini biti će minimalne, a ukoliko i postoje, uvijek će se moći predpostaviti, da se otklon između dviju točaka mijenja proporcionalno dužini.

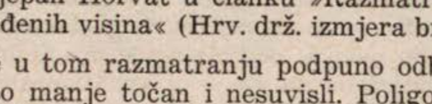
Koristeći pak velike dužine, to ne možemo predpostaviti, te bi nam u tom slučaju trigonometrijski određene točke imale elipsoidne visine, a nivelmanom određene točke geoidne visine.

Kod trigonometrijskog određivanja visine opća geodetska metoda od većeg na manje ne dolazi podpuno do izražaja, barem ne u koliko se tiče izbora dužine. Ovo možemo svakako zahvaliti činjenici, što trigonometrijski nivelman moramo uvijek osloniti na precizni, nivelman, kojega možemo uz glavne prometne linije lako, brzo, jeftino i točno postaviti. Slična bi stvar bila i sa općom triangulacijom t. j. ne bi radili triangulaciju I. pa II. pa III. pa IV. reda ako bi mogli brzo i jeftino astronomskim putem odrediti bar istom točnošću točke I. i eventualno II. reda. No ako upotrijebimo kratke dužine stranica t. j. vizure između najbližih triangulacionih točaka za određivanja visina istih, nećemo se moći koristiti mogućnošću, da iz trigonometrijskog određivanja visina odredimo lokalna skretanja težišnice odnosno određivanje geoida u odnosu na uslovljeni elipsoid, koja je mogućnost bila iznesena u poglavlju — uticaj skretanja težišnice jer su nam za ovu svrhu potrebne uz poseban plan i veće dužine vizura.

Što se pak tiče i samog načina izravnavanja o tome je dao opširan prikaz prof. ing. Stjepan Horvat u članku »Razmatranje o izjednačenju trigonometrički određenih visina« (Hrv. drž. izmjera br. 10-11. god. 1942.).

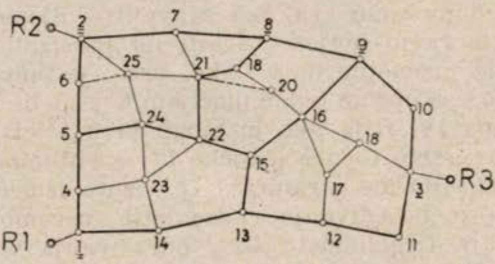
Prof. Horvat je u tom razmatranju podpuno odbacio poligonski način izjednačenja, kao manje točan i nesuvisli. Poligonski način izravnavanja se do sada kod nas upotrebljavao, pak ćemo razmotriti i mogućnosti takovog izjednačivanja. U prvom redu moramo spomenuti, da veliki uticaj na plan računanja, kao i način izjednačenja vrši položaj datih točaka preciznog nivelmana. Osim toga međusobna udaljenost točaka preciznog nivelmana, veličina »praznog« prostora uticati će na izbor dužine vizure, te ćemo u slučajevima velikog praznog prostora, unatoč onog što je naprijed rečeno, primjeniti i duže vizure.

Poligonski način izravnavanja je već sam po sebi najlošiji način. U sravnjenju sa načinom koje iznosi prof. Horvat imade razmjerno mnogo manji broj podataka za određivanje visina, osim toga povezanost je slabija (te u sredini vlaka mogu nastati i deformacije. Pošto između točaka 3. i 8. nije mjerena visinska razlika možemo očekivati veću pogrešku od normalne (donja slika).



Sl. 9.

Nadalje, kod jako velikih vlakova može nastati i krupnija pogreška, koju ne ćemo primjetiti, jer ćemo kod dugačkih vlakova morati dopustiti i veće dozvoljeno odstupanje, a i pogreške se mogu kompenzirati, te ih kod priključka na date visine ne ćemo primjetiti. Dobre su strane kod poligonskog načina, da je brz i jeftin pri izvedbi na terenu kao i obračun u kancelariji. Loše strane mogu se prilično odkloniti, da se mjesto mjerenja dviju vizura mjere sa svake stanice 3—4 vizure. Na taj način povećava se ne samo točnost, nego i pruža mogućnost bolje raspodjelbe pogrešaka i bolji odnos i povezanost točaka u visinskom pogledu. Takav jedan primjer iznijeti ćemo na slijedećoj slici:



Sl. 10

Reperi R_1, R_2, R_3 su dati reperi. Točka 1, 2, 3 . . . . . 25 su trigonometrijske točke čije se nadmorske visine traže, od kojih su točke 1, 2 i 3 od najbližih repera ili nivelane ili trigonometrijskim putem određene Sa ——— označene su mjerene visinske razlike. Da ne bi trebalo cjelokupnu mrežu sa svim mjerenim podacima izravnati, da bi se izbjeglo velikom broju uslova, podjeljena je mreža na glavnu i sporednu. Glavna je mreža obilježena sa ———i konstruirana u vidu zatvorenih poligona. Izravnanjem dobiti će se visina točka 5, 22, 8, 9, 16, 15, 13. Imajući visine veznih točaka, mogu se ostale točke izravnati između ostalog jednostavno putem poligona ili kao čvorne točke.

Svakako takvim načinom je ipak sačuvan princip od većeg na manje, no ne samo u koliko se tiče plana računanja, a ne i odabiranja dužine strana.

Već površnim pogledom razabire se, da je mreža dobro međusobno povezana i da ima dovoljno suvišnih mjerenja, koji povećavaju kontrolu a i točnost prilikom izjednačivanja mreže. Ukupno imademo izjednačenjem odrediti 22 točke (točke 1, 2 i 3 su date). U cijeloj mreži imade izvršenih 38 dvostrukih i 2 jednostruka mjerenja, t. j. ukupno 78 jednosrukih mjerenja. Za određivanje 22 točke potrebne su 22 jednostruka mjerenja, odnosno imademo 56 mjerenja više nego što je neophodno potrebno za sračunavanje mreže. U konkretnom slučaju na svaku točku otpada 3,5 pravca, a neophodno je potreban jedan pravac. Sa daljnim povećanjem broja pravaca se mnogo ne povećava točnost. Ista se povećava sa drugim korjenom iz broja pravca, pa smatram, da je gornji broj pravaca za određivanje visine trigonometrijskih točaka dovoljan.

Ako uzmemo u obzir, da kod triangulacije redovito na svakoj točki imademo 6 do 15 pravaca (na točkama I. i II. reda je taj broj i mnogo veći), te da ti pravci s obzirom na njihov red mogu imati i vrlo velike dužine, gdje nam vizure nijesu uvijek ni dovoljno jasne, biti će vrlo teško izvršiti mjerenja visinskih kuteva na svim pravcima, odnosno trebati ćemo za visinske kuteve još bar toliko vremena, koliko za horizontalnu triangulaciju. Ovako vršeći visinska mjerenja na samo 3—4 kratke vizure koje su uvijek vidljive, možemo lako, bez naprezanja i vrlo brzo izvršiti ta mjerenja uz triangulaciju. Ta mjerenja možemo u svakoj točki izvršiti sa instrumentima tipa Wild za cca 15 min.

U slučajevima, kad imademo dovoljno gustu mrežu preciznog nivelmana, nije potrebno nikakve prelazne mreže, jer će se najtočnije visine točaka u trigonometrijskom nivelmanu dobiti mjerenjem visina između najbližih trigonometrijskih točaka, kako to slijedi iz prednjih razmatranja. Praktički će to biti, da se mjere visinski kutevi u glavnom na stranama triangulacije četvrtog reda.

Ako nemamo dovoljno gustu mrežu geometrijskog nivelmana, te su točke na koje se oslanja trigonometrijski nivelman daleko, koju stotinu kilometara — praktički možemo ovamo uzeti slučajeve, kad su oslone točke na većoj razdaljini od 40 km. tada možemo primjeniti izvjestan prelaz. I ako to matematski nema dovoljnog opravdanja, praktički ima. Naime kod jako dugačkih poligona biti će ocjena točnosti i ispravnosti pojedinih visinskih razlika jako otežana, te bi se moglo u izravnanje povući i krupnije — grube pogreške — odnosno, morali bi postaviti veoma mnogo zatvorenih poligona, što bi ali otešćalo izjednačenje. U koliko bi to htjeli donekle odstraniti, biti će najbolje izabrati prelaznu mrežu sa većom dužinom strane.

Za svrhe prelazne mreže mogli bi izabrati mrežu dužine strana 4—5 km. gdje se još ne osjećaju pogreške uslijed kolebanja refrakcije. Iz sačinjenih tablica za srednju pogrešku izlazi, da je kod dužine strana 4 km. najmanja vrijednost srednja pogreška na 1 km. Pošto se sračuna prelazna mreža po istom principu, kao što je iznesen na sl. 5, sračunati će se ostale točke jednostavnim umetanjem.

Kad su nam točke preciznog nivelmana daleko, kao što je naprijed rečeno, pa međuprostor moramo ispuniti trigonometrijskim nivelmanom mogli bi se poslužiti i jednim kombiniranim rješenjem u pogleđu plana računanja i opažanja. Taj bi se sastojao u slijedećem:

Osnovnu prvotnu mrežu sastavimo po planu, kako je bilo razlagano u poglavlju: uticaj skretanja težišnice. Za veličinu dužina vizura izaberemo pravce dužine 5—8 km. Na tako dobivene visine točaka osnovne mreže, naslonimo ostale točke mjereći vizure između najbližih točaka.

Ovakvim načinom mogli bi osim visina dobiti na svakoj točki osnovne mreže veličinu i smjer otklona težišnice, koji bi nam podaci bili dragocjeni za određivanje geoida.

Pošto će se otklon težišnice očitovati sumarno u pogrešci mjerenja, to da se otklon može izključiti iz iste, moraju ta mjerenja biti izvršena vrlo točno i pažljivo.

Mislim da instrumenti novog tipa (Wild) ne će dati za ovu svrhu zadovoljavajuće rezultate.

ZAVRŠNE NAPOMENE

Prije početka opažanja moramo sastaviti plan opažanja i računanja trigonometrijske visinske mreže. To je svakako potrebno, da ne bi mjerili nepotrebne pravce, a izostavili koji potreban pravac. Kod sastava toga plana možemo uzimati u obzir udaljenosti pojedinih vizura nad terenom i drugim zemaljskim objektima, te vizure, za koje iz rekognosciranja znamo, da prolaze suviše blizu terena ili kakovog objekta, kao nepovoljne (nesigurnosti koef. refrakcije) ne uzimamo u obzir.

Da povećamo kao točnost mjerenja tako i da nam gornja površina kamena trajno daje određenu visinu, morali bi promjeniti način obilježavanja — osiguranja trigonometrijskih točaka. Sadanje obilježavanje izgleda ovako:

Sl. 11

O štetnom uticaju sloja rastresite zemlje pod kamenom, bilo je već ranije govora. Inžinjeri i mjernici često pri vršenju naknadnih radova, kod održanja premjera, kao i drugih tehničkih radova, da bi se osvjedočili da li je trigonometrijska oznaka u horizontalnom smislu na pravom mjestu vade gornju oznaku i traže podzemni centar. Oni doista, kad nađu podzemni centar uspostavljaju točku u horizontalnom smislu, ali ne i u vertikalnom smislu. Kad bi to i imali na umu, pak i htjeli, to bi bilo teško izvesti. Zato bi bilo bolje, da promjenimo način obilježavanja točaka i uvedemo neki drugi kao na primjer ovaj što je prikazan na slici.

U ovom slučaju je točka u visinskom pogledu osigurana i stabilizirana, što se vidi i iz same slike. Da je točka na svom prvotnom položaju t. j. nad centrom kontroliše se, da se pored kamena proturi u zemlju naročita gvozdena motka, koja mora udariti u podzemni centar.

Iz točnosti što je dobivamo za trigonometrijski nivelman, možemo zaključiti, da se isti može upotrijebiti ne samo za topografske svrhe, nego i za izvedbu mnogih tehničkih radova, naročito u brdskom terenu. Kod hidrotehničkih radova u ravnici, gdje nam je zbilja potrebna milimetarska točnost, kao i kod bušenja tunela, ne možemo se osloniti na podatke trigonometrijskog nivelmana.

LITERATURA:

G. Zachariae: Die Geodätischen Hauptpunkte.

Jordan: Handbuch der Vermessungskunde II. 2.

Horvat: Razmatranje izjednačenja trigonometrički određenih visina.

H. Dr. Izmjera br. 10-11 1942. god.

Katastarski pravilnici — Uputstvo za izvršenje trigonometrijskog nivelmana.