

Dr. Ing. Nikola Čubranić — Zagreb

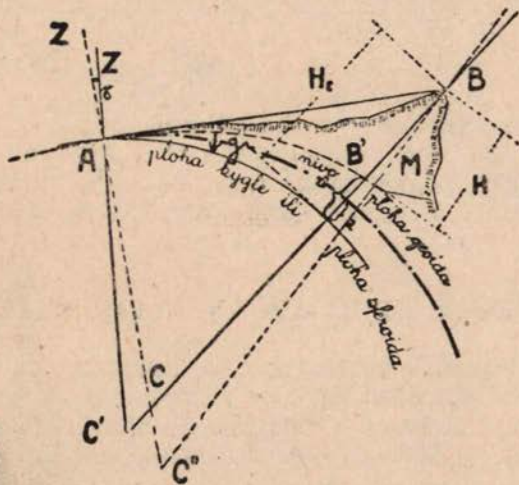
Trigonometrijsko mjerenje visina i njegova praktična upotreba

(Nastavak)

Ako je:

H = istinita visinska razlika (obzirom na nivo plohu geoida);

$H_E = H + a$ = visinska razlika obzirom na kružnu plohu odnosno na usvojeni sferoid (u granicama dužine trig. strane), onda iz slike 4a slijedi da ćemo, koristeći formulu (8), kod računanja visinske razlike po kutu u točki A, odnosno po kutu u točki B, dobiti visinu:



Sl. 4a

$$\Delta H_A = H_E - a' = H + a - a'$$

$$\Delta H_B = H_E = H + a$$

Uzimajući aritmetičku sredinu dobićemo:

$$\Delta H = \frac{\Delta H_A + \Delta H_B}{2} = H + a - \frac{a'}{2}$$

Ako pretpostavimo, da se na odsjeku A B izvodi promjena skretanja vertikalne proporcionalno dužini to možemo staviti da će biti:

$$a' = 2a$$

pa će konačno, visinska razlika biti:

$$\Delta H = H,$$

tj. visinska razlika dobivena iz aritmetičke sredine niveliranja gore i dole odnositi će se na nivo plohu geoida.

Na razmjerno kratkom odstojanju biti će i promjena u odklonu vertikalne malena, jedva primjetna u koliko i postoji, pak se u takvom intervalu može uvijek smatrati, da se promjena skretanja zbiva proporcionalno dužini, odnosno mi ćemo — koristeći kod mjerenja visina kratke udaljenosti i aritmetičku sredinu od niveliranja naprijed i natrag — dobiti visine obzirom na nivo plohu geoida.

Kod većih udaljenosti točaka A i B i kod većih razlika u skretanju proporcionalno dužini odnosno:

$$a' \neq 2a$$

t. j. ne ćemo dobiti ispravnu visinsku razliku.

Praktički se ovakovi slučajevi mogu očekivati u planinskom terenu gdje su uslijed velikih nadmorskih visina i najnepravilnijeg razmještaja masa promjene (smetnje) u skretanju vertikalne velike i najrazličitije, po veličini i po smjeru. Samo promjene u skretanju vertikalne mogu lako doseći i veličinu od 10".

Mjerenja sa kojima raspoložemo su praktične vrste sa dužinom strane u srednju od 1 do 2 km. Kako je samo skretanje mala veličina — to će i promjena skretanja od točke do točke biti mnogo manja veličina — koju će na ovoj udaljenosti progutati pogrješka mjerenja zenitnih udaljenosti, kao i eventualne druge pogrješke mjerenja. Zato kod obrade tih zadataka ne ćemo se ni osvrnuti na uticaj skretanja težišnice, jer praktički ne bi ništa postigli.

POGRJEŠKA MJERENJA VISINSKIH KUTEVA

Pri mjerenju visinskih kuteva postoji nezahvalna okolnost, što mjerenja moramo vršiti oko podneva, t. j. u vrijeme, kad je refrakcija najmanja i najstabilnija, a baš u to vrijeme su likovi najnestabilniji. Ipak ćemo ovdje pokušati ispitati kakovom tačnošću možemo mjeriti visinske kuteve.

Srednju porješku mjerenja visinskih kuteva možemo odrediti posebnim mjerenjima neke zenite udaljenosti u više girusa a možemo je i opredijeliti iz srednje pogrješke iz obostranih mjerenja. Svakako da posljednji način ima većeg praktičkog značenja i veću težinu s obzirom, da tako dobiven rezultat sadrži u sebi i razne druge sitne uticaje — uticaje pogrješnosti mjerenja vertikalnih kuteva, koje nemogu doći do izražaja kod jednostavnog mjerenja neke visinske udaljenosti u raznim girusima.

U manualu mjerenja visinskih kuteva (ne priloži) ispitivana je točnost mjerenja vertikalnih kuteva za instrument Starke Kammerer No. 1076. Izabrana je jedna dobro uočljiva točka na udaljenosti od cca 1 km. Instrument ima libelu čvrsto spojenu sa nosačem durbina, a osjetljivost libele je: 1 pars = 4", podatak doboša na vertikalnom krugu je: 2". U trig. obrascu br. 5 upisana su izvršena čitanja u prvom položaju — krug lijevo, i čitanja u drugom položaju — krug desno. Pošto podatak mikroskopa iznosi 2", to je sredina dobivena zbrajanjem vrijednosti oba mikroskopa. U odgovarajućoj rubrici upisani su krajevi mjehura libele. U stupcu »korigirana sredina« upisani su popravci sredine zbog odstupanja libele. Izmeren je jedan kut u 10 girusa i dobivena je srednja pogrješka mjerenja 1 girusa 2". Ponavljanjem u 4 girusa smanjit će se ova na 1".

Ovakovi instrumenti za praktična mjerenja nisu pogodni naročito danas, kad imalo instrumente novog tipa Wild i Zeiss, gdje osim prednosti u brzini čitanja, ima i ta prednost, da nije potrebno očitavati libelu i računati popravku očitavanja na vertikalnom krugu. Kod starih instrumenata libela je čvrsto spojena sa alhidadom vertikalnog kruga. No ipak u pogledu točnosti moramo dati prednost starom tipu instrumenata. Kod instrumenata novog tipa svakako nepovoljno djeluje okolnost što je vertikalni krug čvrsto spojen sa durbinom, te se ne može iz mjerenja eliminirati ni slučajna ni sistematska pogrješka podjele limba, pak većim brojem girusa možemo povećati samo točnost čitanja, a ne i točnost mjerenja samog kuta. Makar kako točno bila nanešena podjela na vertikalnom krugu sistematska i slučajna pogrješka podjele, i ako u manjem iznosu, ipak će postojati. I sama konstrukcija nije najidealnije riješena u pogledu kretanja alhidade oko limba, jer postoji izvjesno vučenje limba. Uslijed ovih netočnosti i manjkavosti teže je ispitati i savijanje durbina, makar da se očekuje da bi kod ovih instrumenata savijanje durbina trebalo biti manje nego kod instrumenata staroga tipa.

S triangulatorom Aleksandrom Osipov-im izvršio sam ispitivanje točnosti mjerenja visinskih kuteva na instrumentima Zeiss No. 1617 i Wild No. 1871. Ispitivanje vršeno je istovremeno viziranjem na jedan dobro osvijetljen predmet na udaljenosti cca 2 km. Ispitivanje izvršeno je viziranjem sa gornjim, srednjim i donjim koncem — zatim to isto u drugom položaju durbina, t. j. kao da je visinski kut mjeren u tri girusa. Ta operacija ponavljena je pet puta (5×3 girusa).

Sračunata je srednja pogrješka visinskog kuta sa tri girusa (jednog girusa s tri konca) na temelju odstupanja od pojedinačnih aritmetičkih sredina m_1 i na temelju odstupanja od ukupne aritmetičke sredine m_2 dobiveni su slijedeći rezultati.

Wild No. 1871	Osipov	$m_1 = \pm 2",6$	$m_2 = \pm 4",5$
" "	Čubranić	$m_1 = \pm 2",0$	$m_2 = \pm 4",6$
Zeiss " 1617	Osipov	$m_1 = \pm 2",4$	$m_2 = \pm 4",9$
" "	Čubranić	$m_1 = \pm 2",1$	$m_2 = \pm 2",3$
Sredina		$m_1 = \pm 2",3$	$m_2 = \pm 4",1$

Veličina m_1 trebala bi biti jednaka m_2 , pošto obadvije predstavljaju srednju pogrješku opažanog kuta u tri girusa.

Što ove veličine nisu jednake možemo pripisati slijedećem:

1. Srednja pogrješka m_2 dobivena je mjerenjem u dužem vremenskom periodu (5×3 girusa) gdje se mora više osjetiti uticaj refrakcije.

2. Mjerenje sa tri konca u jednom girusu u potpunosti neće odgovarati mjerenju jednim koncem u tri girusa.

Svakako sam mišljenja, da je srednja pogrješka m_2 realnija.

Raspolagao sam sa podacima u kojima su računane pogrješke za instrumente Zeiss, No. 16717 i 16741 te Wild No. 2329 i 2123. Ovi podatci nisu uzeti samo zbog iznalaženja srednje pogrješke, nego su uzeti iz mjerenja visinskih kuteva u trigonometrijskoj mreži — svaki se naime kut mjerio u tri girusa. Kako se limb kod ovih instrumenata neda pomjeriti, to umjesto da se vrši čitanje u dva ili tri girusa na jednoj te istoj podjeli limba, usvojeno je bilo, da se mjerenja vrše u jednom girusu vizirajući na sva tri konca, što bi konačno trebalo odgovarati mjerenju u 3 girusa.

U tim je podacima sa „v” obilježeno za svaki girus odstupanje od aritmetičke sredine iz sva tri konca za svaku vizuru na jednoj stanici. Dobiveni rezultati izneseni su u slijedećoj skrižaljci:

Ime i prezime	Instrument	V ²	Broj mjerenja u 1 girusu	Srednja pogrješka mjenog kuta	
				u 1 girusu	u 3 girusa
Petar Himčak	Zeiss 16717	6.704	873	± 3",39	± 1",96
Ljubo Pavlović	Zeiss 16741	3.239	528	± 3",03	± 1",75
Nikola Maligin	Wild 2329	6.911	528	± 4",43	± 2",56
Dimitrije Dimitrijević	Wild 2123	7.441	528	± 4",60	± 2",66

Dakle i iz ovih mjerenja dobivena srednja pogrješka mjenog kuta u tri girusa (1 girus \times 3 konca) odgovara gotovo podpuno, onoj istoj srednjoj pogrješci koju smo ranije dobili zasebnim mjerenjima i obilježili sa m_1 . No svakako mislim, da će za srednju pogrješku biti realnije uzeti veličinu $m_2 = 4",1$.

Dobivene veličine za srednje pogrješke iz tri girusa su više manje prividne. U stvari naime ne možemo višestrukim ponavljanjem znatno smanjiti srednje pogrješke iz jednog girusa zbog slučajnih i sistematskih pogrješaka podjele limba.

Začuđuje nas u gornjoj tablici, da je srednja pogrješka kod Zeissovih instrumenata za cca 25% manja nego li je kod Wildovih instrumenata, ovo nas začuđuje tim više, što je Wildov instrument mnogo veći od Zeiss-ovog instrumenta toga tipa. Ova se okolnost daje protumačiti slijedećim razmatranjem: kod Zeiss-ovih instrumenata limb na vertikalnom krugu podjeljen je na stupnjeve i dalje normalno, kao što je podjeljen i

horizontalni limb a zenitnu distanciju dobivamo normalno po formuli:

$$z = \frac{KD - KL}{2} .$$

Kod Wildovih instrumenata kutevi na vertikalnom limbu nisu naneseni u pravoj veličini nego u dvostruko većoj, svakako sa namjerom da se pojednostavni računanje. Kod ovih instrumenata visinski kut dobiva se bez dijeljenja sa 2 jednostavno po formuli:

$$h = K1 - KD .$$

Kako je točnost viziranja kod obaju instrumenata gotovo ista, a isto tako i točnost koindicanja, to se točnost kod Zeiss-ovog instrumenta povećava time, što se rezultat čitanja dijeli sa 2. Svakako da se time smanjuje pogreška očitavanja.

Očito je da srednja pogreška u mjerenju visinskih kuteva kod ovih instrumenata mnogo zaostaje za srednjom pogreškom kod instrumenata starog tipa, kao n. pr. za unapred spomenutim instrumentom Starke—Kammerer. Pa da i pretpostavimo da je razlika koju smo ispitivanjem ljubili, možda malo i prevelika, ipak moramo zaključiti, da tehnika u pogledu točnosti visinskih kuteva nije napredovala.

POGRJEŠKA KOEFICIENTA REFRAKCIJE

Iz formule (6) slijedi da je uticaj promjene koeficienta refrakcije-kolebanja — proporcionalan sa kvadratom dužine stranice, te se nemože kod kraćih dužina ni primjetiti. Općenito se može reći, da se promjene u koeficijentu refrakcije mogu ozbiljno ispitivati kod dužina iznad 5 km. Tada naime promjene u koeficijentu refrakcije imaju već takovu vrijednost, koja se može osjetiti u ukupnoj srednjoj pogreški.

Pošto se naša mjerenja koja ćemo kasnije obraditi odnose na kratke stranice to u pogledu promjene koeficienta m_k , makar bila i mnogo veća nego ona s kojom se računa, ne će kod kratkih dužina stranica imati nikakvih uticaja na mjerenje visinskih razlika.

Jordan-Egert u »Handbuch der Vermessungskunde« II/2 daje vrijednost koeficienta refrakcije $k = 0,13$ ($1 \pm 0,25$). Po tome bi bio $m_k = 0,033$. U katastarskom pravilniku II. dio usvojena je ova veličina naime $k = 0,13$, $m_k = \pm 0,03$. U naputcima prof. Horvata veličina k iznosi 0,125.

Novija ispitivanja refrakcije kao n. pr. mjerenja K. Broks-a na Sonnblicku u Srednjim Alpama (Vertikaler Temperaturgradient und terrestrische Refraktion — Veröff. Meteor. Inst. d. Univ. Berlin), daju za veličinu k istu vrijednost koju daje i Jordan, dočim za m_k daju znatno manju veličinu tj. $m_k = \pm 0,007$. Gornje se vrijednosti doista odnose na apsolutne visine od cca 3.000 m. i na približno horizontalne vizure. Ovdje moramo napomenuti, da i ako refrakcija kao takova nije još dovoljno ispitana, a i neće biti moguće podpuno i točno njeno poznavanje, jer bi zato trebali poznavati atmosferske prilike duž cijele vizure, no

ipak ona nije tako nesigurna, kao što se to ranije smatralo, kada su se i razni uticaji otlona težišnice pripisivali uticaju refrakcije. Svakako ako vizura prolazi blizu zemlje i u neznatnoj apsolutnoj visini biti će kolebanje refrakcije mnogo veće, nego ako zraka prolazi daleko od zemlje. Kod većih dužina stranica vizura će zbog vidljivosti morati redovito prolaziti udaljenije od površine zemlje nego kod kraćih stranica. Refrakcioni koeficijent odnosno njegovo kolebanje mora se ustanoviti i obzirom na vrijeme mjerenja visinskih kuteva. Kod praktičnih radova triangulacije III. a naročito IV. reda neće se čekati sredina dana za mjerenje vrt. kuteva, nego će se izvršiti onda kada se dođe na točku, jer bi čekanje poskupilo i otežalo izvedbu triangulacije. Prema tome bit će takvih mjerenja, koja će se izvršivati samo ujutro i na večer. Kolebanje refrakcije najnepovoljnije je pri izlasku i zalasku sunca. Da bi se ovaj štetni uticaj kolebanja donekle izbjegao preporučljivo je, da se mjere dolaskom na stanicu u jutro najpre horizontalni kutevi a zatim visinski kutevi a dolaskom na stanicu pred večer najprije visinski a onda horizontalni kutevi. Napominjem da su se, s obzirom na vrijeme opažanja, tako vršila i opažanja čije rezultate obrađujemo.

U poglavlju »Osnovne formule kod računanja trigonometrijskog nivelmana« imali smo, da je refrakcioni kut

$$\delta = K \frac{C}{2} = K \frac{D}{2R}$$

iz čega slijedi da je veličina refrakcionog kuta proporcionalna sa dužinom trigonometrijske stranice. Diferencirajući gornju jednadžbu imamo

$$d\delta = \frac{D}{2R} dK$$

i ako uvrstimo

$$dK = m_k$$

biće

$$m_k = \frac{2R}{D} \cdot d\delta = \frac{2R}{D} \cdot \frac{d\delta''}{\rho''} \dots \dots \dots (9)$$

Na temelju ovih diferencijalnih izvoda možemo zaključiti, da će se veličina pogrješke u refrakcionom kutu povećati sa dužinom trigonometrijske strane u linearnom odnosu. Svakako ovaj teoretski odnos vrijedi za istovremena opažanja i kad vizura prolazi na razne daljine kroz bar približno iste (jednake) slojeve zraka i kad su vizure podjednako udaljene od terena i od drugih raznih objekata. Da bi dobio nekakvu sliku o tome, izvršio sam posebna ispitivanja kolebanja visinskog kuta.

Ova posebna mjerenja su izvršena instrumentima Starke-Kammerer 8. IV. 1942 g. sa No. 1023, podatak doboša 2", visinske libele 1 pars — 2"41, a 21. V. 1942 g. sa No. 1026, podatak doboša 2", visinske libele 1". Limbus vertikalnog kruga nije kod pojedinih girusa bio pomicat, što bi inače bilo pravilo kod mjerenja visinskih kuteva, već su sva čitanja vršena pri istom položaju vertikalnog kruga, a sve u cilju, da se može što točnije motriti kolebanje refrakcionog kuta.

Ako rezultate ovih mjerenja prikažemo grafički, to će iz toga prikaza slijediti, da je najveća vrijednost refrakcionog kuta pri izlasku sunca, a najmanja i najstabilnija vrijednost oko podne (vrijeme mjerenja srednjeevropsko-mirnodobsko). Iz istodobno izvršenih mjerenja, sa stajališta kod kupališta na Savi, na točke: Sljeme — udaljenost 15 km., Sv. Marko — 4.7 km., dimnjak kuće 2 km., dobivena je razlika između maksimalne i minimalne vrijednosti refrakcionog kuta (Tabela IIIa):

GRAFIČKI PRIKAZ KOLEBANJA VIZURE

u toku jednoga dana opažano sa stajališta kod kupališta na Savi u Zagrebu prema
priležećoj karti 1:100000

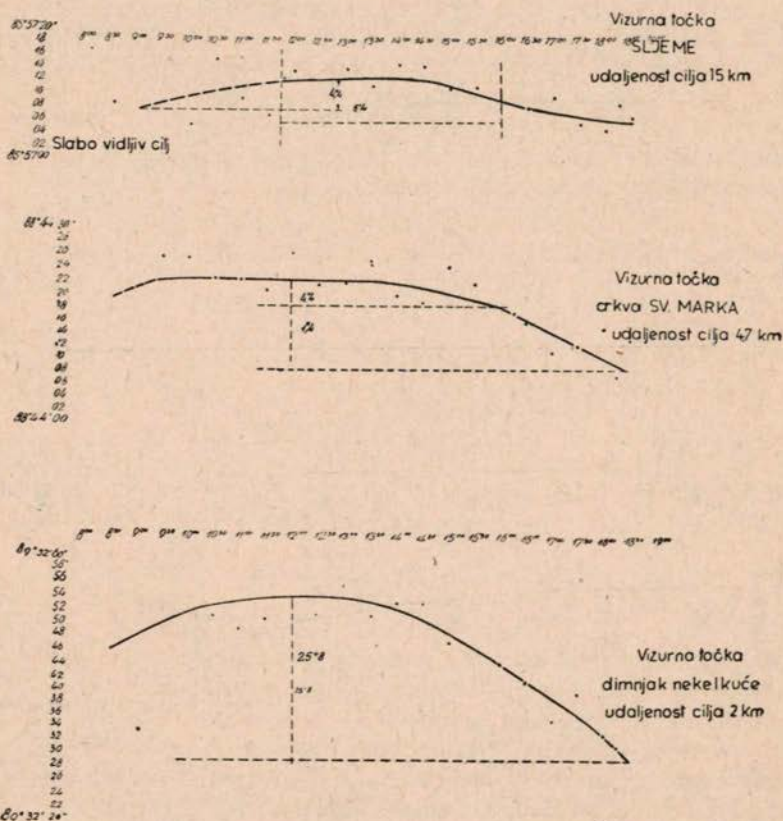


Tabla IIIa

15 km. — Sljeme	6",4
4.7 km. — Sv. Marko	14"
2.0 km. — dimnjak	25",8

Svakako ovi nam rezultati predstavljaju jednu anomaliju s obzirom na ono što bi prema prednjim diferencijalnim formulama mogli očeki-

vati. No ako analiziramo prolaz pojedinih vizura kroz atmosferu imademo slijedeću sliku: Vizura na Sljeme prolazi odmah počev od stajališta instrumenta visoko iznad terena, te je cijelo vrijeme u velikoj udaljenosti od terena i u većoj nadmorskoj visini. Vizura na točku Sv. Marko prolazi niti predaleko niti preblizu terena, cca 10—15 m. od zemlje i krova kuća. Vizura na dimnjak kuće, koji je cca 10 m. visok dobrim dijelom ide blizu terena na par metara, a blizu cilja prelazi preko krova kuće na udaljenost cca 0.70 m.

GRAFIČKI PRIKAZ KOLEBANJA VIZURE
u toku jednoga dana opažano sa stajališta u Bregani prema priležećoj
karti 1:100000

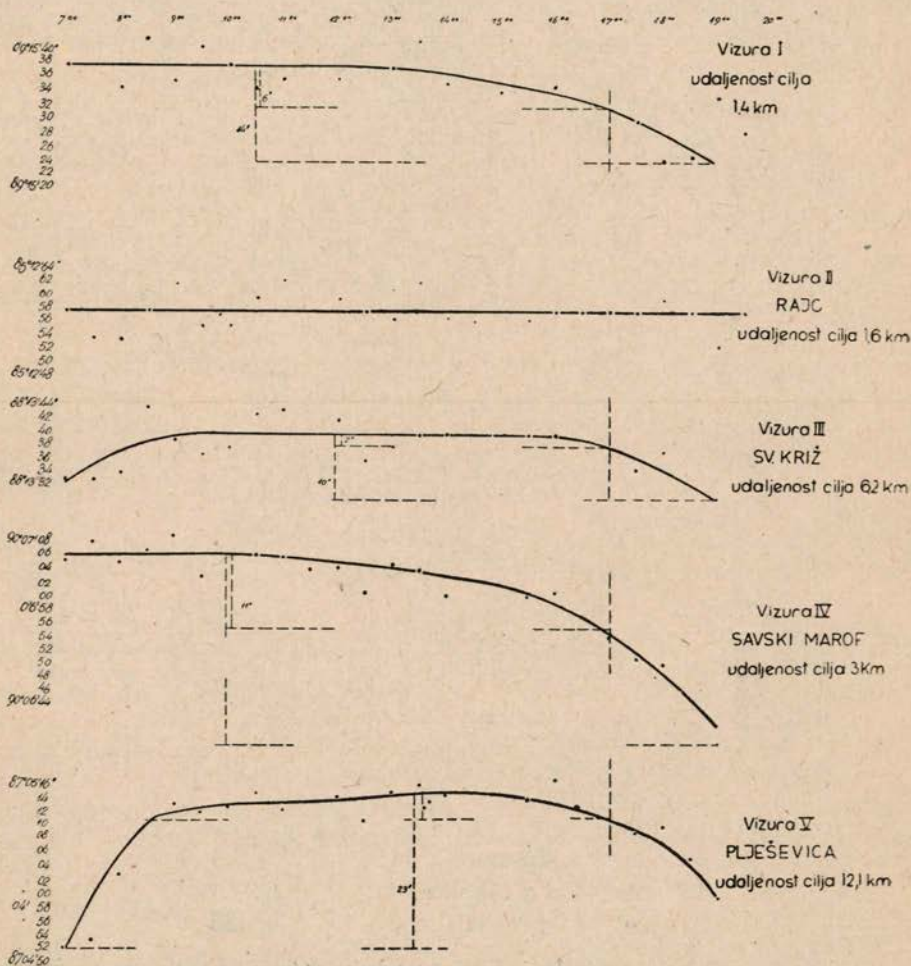


Tabla IIIb

Iz razmatranja rezultata grafičkog prikaza kolebanja vizura sa stajališta kupališta na Savi slijedi, da i ako bi teoretski promjena refrakcionog kuta trebala biti proporcionalna sa dužinom strane, ipak na promjenu istog mnogo jače djeluje blizina zemlje ili raznih zemaljskih objekata. Ako vizura prolazi preblizu nekog zemaljskog objekta, kao što je to slučaj, kad vizura prelazi preko krova kuće na 70 cm, nastaju takova kolebanja u visinskom kutu, da trigonometrijski nivelman postaje neupotrebljiv.



Sl. 6.

U slici 6* označene su vizure na kojima su istovremeno kroz cijeli dan mjereni visinski kutevi. Vizura I na udaljenosti 1,4 km. u podpuno ravnom terenu, visina cilja 4 m. Vizura II Rajc na udaljenosti 1,6 cm. kako se iz karte vidi prolazi odmah visoko iznad terena. Vizura III. Sv. Križ na prvom kilometru dužine prolazi blizu terena do maksimum 10 m. zatim se udaljava od terena sve više. Vizura IV Savski Marof cilj prozor zgrade cca 6 m nad terenom prolazi preko rijeke Save cca 8 m. iznad vode. Vizura V. Plješivica — diže se na kotu 780 m., prolazi podosta daleko od terena, ali ni izdaleka tako kao što je bila prije vizura na Sljeme, prolazi cca 35 m. iznad šume kod Dubrave i cca 25 m. iznad šume Gregorić breg i V. Červec. I ako bi se vizura na Plješivicu po visini cilja mogla donekle sravnivati sa vizurom na Sljeme, ipak je kolebanje visinskog kuta na Plješivicu (23") gotovo 4 puta veće od kolebanja visinskog kuta na Sljeme. Svakako toj razlici mora biti jedino uzrok različita udaljenost vizure od terena. Razlika između maksimalne i minimalne vrijednosti refrakcionog kuta iznosi (Tabela IIIb) :

1,4 km.	— I	14"
1,6 „	— Rajc	0",0
6,2 „	— Sv. Križ	10",0
3,0 „	— Sav. Marof	24",0
12,1 „	— Plješivica	23",0

Vizura I. i Rajc su na približno istoj udaljenosti. Dok vizura I. daje dnevnu promjenu u refrakciji 14" dotle kod vizure na Rajc je dnevna promjena nikakova. To je bilo i za očekivati zbog toga, što vizura na Rajc prelazi visoko iznad terena slično vizuri na Sljeme a udaljenost je razmerno malena.

* Iz tehničkih razloga reljef izostavljen. Situacija je smanjena prema karti mjerila 1 : 100 000 smanjeno za približno 3 puta. Tko se od čitalaca interesira može pravce rekonstruirati na karti.

Ako po gornjim podatcima sračunamo pogrješke u koeficijentu refrakcije (vizuru na dimnjak zbog napred rečenog ćemo iz daljih razmatranja izostaviti) imat ćemo po formuli:

$$dK = \frac{2R}{D} \cdot \frac{d\delta''}{\rho''} = 0,062 \frac{d\delta''}{D k_m}$$

Sljeme	dk = 0,026
Sv. Marko	„ = 0,18
Vizura I	„ = 0,60
Roje	„ = 0,0
Sv. Križ	„ = 0,10
Sav. Marof	„ = 0,49
Plješivica	„ = 0,12

Iz analize gornjih rezultata možemo razabrati da je veličina dk zavisna od udaljenosti od terena i da je kod vizura približno slično položenih prema površini zemlje i veličina dk približno jednake vrijednosti. Slično položene vizure prema terenu po skupinama biti će

- I. 1. Sljeme, 2. Rajc dk = 0,00—0,09
 II. 1. Sv. Marko, 2. Sv. Križ, 3. Plješivica dk = 0,10—0,18
 III. 1. Vizura I, 2. Sav. Marof dk = 0,49—0,60

I ako su vizure u III. skupini naročito izabrane kao nepovoljne — tu se stvarno i najjače očituje pogrješka u promjeni refrakcije — ipak u ravninama imati ćemo pretežni broj vizura tako položenih tj. neposredno blizu terena. Tu nam sama promjena u koeficijentu refrakcije iznosi 4 do 5 puta veću vrijednost od vrijednosti samog koeficijenta refrakcije.

Kako se iz priloga IV i V vidi najjače djelovanje refrakcije je u jutro i na večer. Da bi izbjegli štetna djelovanja i uticaj na rezultate mjerenja, potrebno je u tom pogledu izvršiti izvjesno ograničenje u pogledu vremena opažanja visinskih kuteva.

Ako ograničimo vrijeme opažanja u rano proljeće i u jesen od 9 do 16 sati, a u kasno proljeće i ljeto od 8 s. 30 m. do 17 sati dobiti ćemo takove vrijednosti koje mogu zadovoljiti praktična mjerenja. Opažanja izvan toga perioda ne možemo smatrati ispravnim.

Za taj vremenski period imamo slijedeće razlike d'' maksimuma i minimuma i veličine dk:

Vizura	d''	dk_{max}	$\frac{1}{3} dk$
1. Sljeme	4",4	0,018	0,006
2. Sv. Marko	4",4	0,058	0,019
3. Vizura I	5",0	0,220	0,073
4. Roje	0",0	0,000	0,000
5. Sv. Križ	2",0	0,020	0,006
6. Sav. Marof	11",0	0,226	0,075
7. Plješivica	4",0	0,020	0,006

Nastavak slijedi.