Sastavimo i za ovaj slučaj tablicu:

φ	$\Delta \varphi$
0^0	$+\ 3^0 31' 37''$
15	+ 4 4 21
30	+ 7 3 14
45	∞
60	– 7 3 14
75	– 4 4 21
90	– 3 31 37

Dakle na geografskoj širini 45^0 promjena u širini ne utječe na gradient $\frac{\partial g}{\partial x}$. Ali i na ekvatoru i na polovima promjena širine od 3^0 31' 37" izazvati će promjenu u gradientu svega za jedan Etveš. Slijedi da pomoću variometra ne može biti ni riječi o kakvoj kontroli promjene geografske širine. Ali ova konstatacija ima i svoju dobru stranu. — Pri obradi gravimetrijskih radova nije potrebno znanje točne geografske širine.

★

Geodet Emil Adamik, Zagreb.

Transformacija koordinata.

1929. god. izdat je »Katastarski pravilnik« I. dio »Triangulacija«, kojim se kod nas uvodi Gauss-Krügerova konforna poprečna cilindrična projekcija sa 3 meridijanske zone, kao podloga za novu izmjeru. Kao osnova ove nove projekcije usvojene su geografske koordinate trigonometrijskih točaka I. reda, koje je za Srbiju, Makedoniju i Crnu Goru izračunao i izjednačio Vojni Geografski Institut, a u ostalim pokrajinama države uzete su geografske koordinate objavljene u »Ergebnisse der Triangulierungen ...« sv. I. Beč 1901.

U trigonometrijskoj mreži I. reda bečkog geografskog instituta postojale su velike praznine u Bosni, Vojvodini, a manja u Sloveniji. Da bi se ova praznina popunila od 1928. god. započeta su nova opažanja na svim starim i novim točkama, a njihovo računanje i izjednačenje izvodilo je bivše Odelenje katastra. Ovi radovi bliže se kraju, te ćemo uskoro imati jednostavnu mrežu trokutova na cijelom području države sa svim koordinatima točaka I. reda.

U Geodetskom listu br. 1-2 za 1947. god. izložio je Ing. Dr. Čubranić razne projekcione sisteme, koji su postojali kod nas do usvojenja Gauss-Krügerove projekcije, a u kojima se još i danas računaju koordinate. Ovim sistemima treba još dodati nove sisteme Gauss-Krügerove projekcije u kojima su izračunate koordinate trig. točaka I. reda, a to su: već spomenute koordinate iz »Ergebnisse der Triangulierungen...«, a zatim i koordinate trig. točaka I. reda, koje su izračunali Talijani za Istru i primorski lanac na otocima od Rijeke do Šibenika. Pored svega izloženog izvjestan broj koordinata izračunat je na osnovu lokalnih triangulacija, pa je sasvim razumljivo da i njih treba uklopiti u jedinstveni državni sistem.

Ovo uklapanje trig. točaka u novi koordinarni sustav svakako je najbolje izvesti preračunavanjem po postojećim mjerenjima. To bi bilo dugotrajan posao, a za jedan dio točaka nemamo više ni podataka mjerenja. Nameće nam se pitanje transformacije koordinata, ukoliko bi koordinate dobijene transformacije zadovoljile traženu točnost.

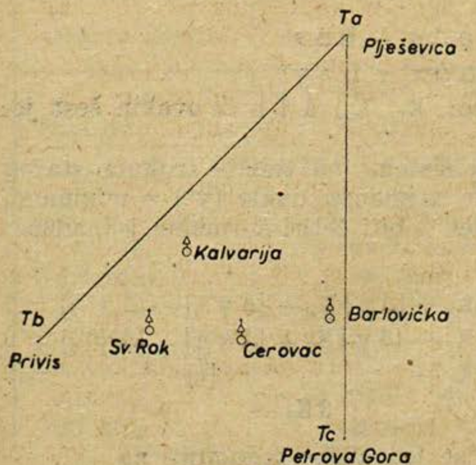
U članu 52 (katastarskog) pravilnika I. dio date su formule za transformaciju koordinata izračunatih bez obzira na zemljinu krivinu, a njihov teoretski dio obrađen je u »Geodeziji« Svečnikova i Kostića. U čl. 5 Pravilnika je napomenuto da će se transformacija koordinata tačaka viših redova, t. j. onih gdje se uzima u obzir sferoidalni oblik zemljin, vršiti po naročitim uputstvima za svaki sistem.

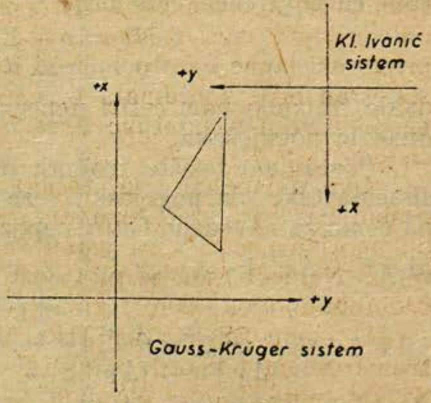
Kod spomenutog načina transformacije koordinata uzeta je u obzir translacija i rotacija novog koordinatnog sistema prema starom, s obzirom na dvije tačke Ta i Tb poznate u oba sistema, a zatim i dužina strane između tih dviju točaka. Ostale točke, koje treba transformirati smaraju se kao umetnute između točaka Ta i Tb, poznatih u oba sistema. Ovaj način dao bi dobre rezultate, kada bi točke, koje se trebaju transformirati, bile zbilja umetnute, ali one to nisu, nego se nalaze raspoređene oko baze Ta—Tb. Stoga ako neku grupu točaka (sl. 1) transformiramo po jednoj bazi na pr. Ta—Tb dobit ćemo jedne vrijednosti koordinata, pa kad ih zatim transformiramo po susjednoj bazi Ta—Tc dobit ćemo opet druge vrijednosti koordinata. Tada nastaje dvojba, koje koordinate treba usvojiti. Radi očitijeg prikaza, uzeo sam trokut I. reda, Petrovac—Plješivica—Privis, pa sam izvršio transformaciju 4 točke po obim bazama, te sam dobio nove koordinate, koje se međusobno razlikuju po y od 4—27 cm, a po x od 50—88 cm.

Naziv točke	y	x	Naziv točke	y	x
Petrovac	63 471.37	19 441.21	Privis	24 992.10	27 021.14
Barlovička	58 660.25	38 058.10	Barlovička	58 649.98	38 058.61
Cerovac	48 965.42	32 166.75	Cerovac	48 965.30	32 167.43
Sv. Rok	38 242.49	25 443.77	Sv. Rok	38 242.53	25 444.65
Kalvarija	40 000.75	39 125.72	Kalvarija	40 000.84	39 126.32
Plješivica	52 382.15	66 105.95	Plješivica	52 382.15	66 105.95

Tablica 1.

Transformaciju sam izveo iz Kl. Ivanićkog sustava, u kome se sustavu date točke nalaze u III. kvadratu, dok se u 5. zoni Gauss-Krügerovog sistema date točke nalaze u I. kvadrantu, kako se to vidi iz sl. 2.





Sl. 1. i sl. 2.

Uzmu li se u račun originalne koordinate Kl. Ivanićkog sustava, dobiju se transformacijom neke fiktivne vrijednosti koordinata traženih točaka, pa se moraju prethodno dopunom do 100.000 prilagoditi Gauss-Krügerovom sistemu.

Najvjerojatnije vrijednosti koordinata transformacijom dobiju se po Helmertovom postupku, koji je kod nas malo poznat.

Ovdje razlikujemo 2 slučaja transformacije:

I. Slična transformacija, koja se koristi kada su oba koordinatna sistema istovjetna, t. j. transformiramo koordinate na pr. iz jednog Gauss-Krügerovog sistema u drugi Gauss-Krügerov sistem, što će kod nas biti česti slučaj.

Kod Helmertovog postupka ne uzimamo za osnovu transformacije samo jednu bazu Ta-Tb nego cio trokut Ta-Tb-Tc, pa po nađenim koeficijentima a i b transformiramo sve točke u zahvatu toga trokuta. Označimo koordinate starog sistema sa y i x, a novog sa $\bar{y}$ i $\bar{x}$.

Iz datih koordinata starog sistema nađemo težište trokuta kao ishodište: $y_0 = 1/3\,[y]$ i $x_0 = 1/3\,[x]$, tada ćemo imati ovo opće rješenje, analogno transformaciji koordinata u »Geodeziji« Kostić-Svećnikov:

$$\bar{y} = K_1 + (q \sin \varphi)\, \Delta x' = (q \cos \varphi)\, \Delta y' + v_y$$
$$\bar{x} = K_2 + (q \cos \varphi)\, \Delta x' = (q \sin \varphi)\, \Delta y' + v_x$$

gdje su K_1 i K_2 nepoznate konstante, a V_y i V_x su pogrješke veze po osama y i x.

Stavimo da je:

$$q \cos \varphi = a + 1$$
$$q \sin \varphi = b$$

i napravimo razlike:

$$\Delta y = \bar{y} - y_0 \qquad \text{i}\ \Delta y' = y - y_0 \qquad \eta = y - y'$$
$$\Delta x = \bar{x} - x_0 \qquad \Delta x' = x - x_0 \qquad \xi = x - x'$$

tada će pogrješka veze biti:

$$V_y = \eta - K_1 - a\,\Delta y' - b\,\Delta x'$$
$$V_x = \xi - K_2 - a\,\Delta x' + b\,\Delta y'$$

dakle trebamo naći četiri nepoznanice: K_1, K_2, a i b iz ovakih šest jednadžbi pogrješaka.

Postavimo težište trokuta novog sistema na težište trokuta starog sistema tako, da pogrješka veze bude najmanja, dakle $[v^2]$ = minimum, pa ćemo za navedene četiri nepoznanice dobiti četiri normalne jednadžbe:

$$[\Delta y'^2 + \Delta x'^2]\ a \qquad + [\Delta y']\,K_1 + [\Delta x']\,K_2 - [\Delta y'\eta] - [\Delta x'\xi] = 0$$
$$[\Delta y'^2 + \Delta x'^2]\,b + [\Delta x']\,K_1 - [\Delta y']\,K_2 + [\Delta x'\eta] + [\Delta y'\xi] = 0$$
$$[\Delta y']\,a + [\Delta x']\,b - \quad 3\,K_1 - \qquad [\eta] \qquad = 0$$
$$[\Delta x']\,a - [\Delta\ y \quad + \qquad 3\,K_2 -$$

Pošto je: $[\Delta y'] = [\Delta x'] = 0$, ove će se jednadžbe reducirati na

$$K_1 = 1/3\,[\eta] \qquad K_2 = 1/3\,[\xi]$$

$$a = \frac{[\Delta x'\xi] + [\Delta y'\eta]}{[\Delta x'^2 + \Delta y'^2]} \qquad b = \frac{[\Delta x'\eta - [\Delta y'\xi]}{[\Delta x'^2 + \Delta y'^2]}$$

Jednadžbe za transformaciju koordinata glasit će:

$$\bar{y} = Y_0 + K_1 + \Delta y' + a\,\Delta y' + b\,\Delta x'$$
$$\bar{x} = X_0 + K_2 + \Delta x' + a\,\Delta x' + b\,\Delta y'$$

Iz jednadžbi pogrješaka veze naći ćemo i granice odstupanja, koje se transformacijom dobiju.

Za trokute I. reda Tuholić-Bijela Lasica-Veli vrh konstante a, b i K_1 i K_2 sračunate su po navedenim formulama

$$a = -0.000\ 2041 \qquad K_1 = +\,2.04$$
$$b = +\,0.0000\ 0415 \qquad K_2 = -\,1.39$$

i na temelju ovih koeficijenata sračunate su pogrješke veze (tablica 2)

Naziv	Vy	Vx
Tuholić	— 0.10	+ 0.21
Bijelu Lasicu	— 0.01	— 0.30
Veli Vrh	+ 0.11	+ 0.09

Taalica 2.

U tablici 3 prikazane su vrijednosti transformacije koordinata datih tačaka iz Gauss-Krügerovih koordinata po Ergebnisima na novo sračunate koordinate. Sve su ove koordinate preračunate i po normalnom načinu računanja. Te su vrijednosi upisane ispod dobivenih koordinata u zagradi. Vidimo da se Novi Vinodol razlikuje po x-osi za + 0,43 m, dok se ostale razlike kreću u granicama ± 1 dm.

Naziv točke	y	x	y	x
Tuholić	— 27 711.24 (711.34)	5021 671.07 (671.28)	— 27 711.34	5021 671.28
Zagradskj Vrh	— 16 883.06 (883.12)	5009 790,14 (790.07)	— 16 883.16	5009 790.13
Veternjak	— 18 154.61 (154.56)	5006 256.01 (255.86)	— 18 154.53	5006 256.00
Novi Vinodol	— 16 076.15 (076.07)	4998 278.26 (277.83)	— 16 076.09	4998 278.20
Veli Vrh	— 25 183.07 (182.96)	4985 285.93 (286.02)	— 25 182.96	4985 286.02

Tablica 3

a) Slična transformacija b) afina transformacija

Mjesto nereduciranih koordinata možemo uzeti i reducirane koordinate.

Izvršimo li transformaciju koordinata u zahvatu mreže trokutova II. reda, razlike će biti osjetno manje.

II. Afina transformacija. Imamo li transformirati koordinate iz starog koordinatnog sistema, u novi koordinatni sistem, koji se razlikuju po načinu projiciranja (na pr. iz perspektivnog na cilindrični sistem) tada se ne možemo poslužiti sličnom transformacijom, nego moramo pribjeći afinoj transformaciji.

Obilježimo koordinate starog koordinatnog sistema x' i y', a novog $\bar{x}$ i $\bar{y}$.

Uzmimo opet opće rješenje iz »Geodezije« Kostić-Svečnikov, pa analogno njemu stavimo:

$$\bar{y}_i - y'_i = \eta_i = (q \cos \varphi) \Delta y'_i + (q \sin \varphi) \Delta x'_i$$

$$\bar{x}_i - x'_i = \xi_i = (q \cos \varphi) \Delta x'_i - (q \sin \varphi) \Delta y'_i$$

gdje su $\Delta y' = y'_{n+1} - y'_n$ i $x' = x'_{n+1} - x'_n$

Označimo opet: $q \cos \varphi = a + 1$

$q \sin \varphi = b$

pa će gornje jednadžbe glasiti:

$$a \Delta y'_i + b \Delta x'_i - \eta_i = 0$$

$$a \Delta x'_i - b \Delta y'_i - \xi_i = 0$$

Postavimo trokut novog koordinatnog sistema na trokut starog koordinatnog sistema tako, da im se 2 strane poklope jedna na drugu, tada možemo pisati za:

$$T_1 \rightarrow T_2 \qquad a_1(y'_2 - y'_1) + b_1(x'_2 - x'_1) = \eta_2 - \eta_1$$
$$T_2 \rightarrow T_3 \qquad a_1(y'_3 - y'_2) + b_1(x'_3 - x'_2) = \eta_3 - \eta_2$$
$$T_1 \rightarrow T_2 \qquad a_2(x'_2 - x'_1) - b_2(y'_2 - y'_1) = \xi_2 - \xi_1$$
$$T_2 \rightarrow T_3 \qquad a_2(x'_3 - x'_2) - b_2(y'_2 - y'_1) = \xi_3 - \xi_2$$

Imamo četiri jednadžbe sa četiri nepoznanice: a_1 b_1 i a_2 b_2. Riješimo li ih po metodi jednakih koeficijenata dobit ćemo

$$a_1 = \frac{(x_3 - x_2)(\eta_2 - \eta_1) - (x_2 - x_1)(\eta_3 - \eta_2)}{(y_2 - x_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1)}$$

$$b_1 = \frac{(y_2 - y_1)(\eta_3 - \eta_2) - (y_3 - y_2)(\eta_2 - \eta_1)}{(y_2 - y_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1)}$$

$$b_2 = \frac{(x_2 - x_1)(\xi_3 - \xi_2) - (x_3 - x_2)(\xi_2 - \xi_1)}{(y_2 - y_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1)}$$

$$a_2 = \frac{(y_2 - y_1)(\xi_3 - \xi_2) - (y_3 - y_2)(\xi_2 - \xi_1)}{(y_2 - y_1)(z_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1)}$$

Formule za afinu transformaciju bi tada glasile:

$$\Delta \bar{y} = \Delta y' + a_1 \Delta y' + b_1 \Delta x'$$
$$\Delta \bar{x} = \Delta x' - a_2 \Delta x - b_2 \Delta y'$$

Do bi ove formule bile podesnije za računanje dvostrukim računskim strojem, zamijenio sam oznake a_2 sa b_2, a da se nebi moralo voditi računa o predznaku — člana kod — $b_2 \Delta y'$ promijenio sam predznak koeficijentu b_2 već kod njegovog računanja. Tako su koeficijenti a_1 i b_1 ostali nepromijenjeni, a koeficijent b_2 i a_2 glase:

$$a_2 = -\frac{(x_2 - x_1)(\xi_3 - \xi_2) - (x_3 - x_2)(\xi_2 - \xi_1)}{(y_2 - y_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1)}$$

$$b_2 = \frac{(y_2 - y_1)(\xi_3 - \xi_2) - (y_3 - y_2)(\xi_2 - \xi_1)}{(y_2 - y_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1)}$$

pa će i konačne formule za transformaciju glasiti:

$$\Delta \bar{y} = \Delta y' + a_1 \Delta y' + b_1 \Delta x'$$
$$\Delta \bar{x} - \Delta x' + a_2 \Delta y' + b_2 \Delta x'$$

Po izloženim jednadžbama transformirao sam iste koordinate u trokutu: Tuholić-Bijela Lasica-Veli Vrh, u Tablici 3b, te sam dobio približno iste vrijednosti koordinata kao u 3a, dapače su i približniji pravim njihovim vrijednostima. Postupak računanja i kontrola kod afine transformacije i onome opisanom u Pravilniku isti su, ali ovim putem dobivene vrijednosti koordinata vjerovatnije su.

Transformacijom koordinata u istom ovom trokutu Tuholić-Bijela Lasica-Veli Vrh iz Kloštar Ivanićkog sustava u Gauss-Krügerov pokazuju se velike razlike za točke Neternjak i Fratarska glavica (Novi Vonidol), ali nije mi poznato da li su ove točke u jednom i drugom sistemu identične, kao i točka I. reda Veli Vrh (Triskavac).

Stoga treba težiti da se nove točke uvijek postavljaju na stara mjesta, ukoliko to nove potrebe dozvoljavaju, jer to za geodetsku nauku ima velikog značaja, a opise položaja starih i novih točaka vršiti detaljno i vrlo brižljivo.

Naziv točke	Y	X	koeficienti
Petrovac	63.475.37	19.441.21	$a_1 = -0.000.1179$
Barlovička	58.650.26	38.058.11	$b_1 = -0.017.7171$
Cerovac	48.965.50	32.167.03	
Sv. Rok	38.242.68	25.444.37	$a_2 = +0.017.6904$
Kalvarija	40.000.90	39.126.19	$b_2 = -0.000.1155$
Plješivica	52.382.14	66.105.94	

Tablica 4

U tablici 4 prikazane su vrijednosti koordinata točaka Kl. Ivanićkog sustava u zahvatu trokuta Petrovac-Plješivica-Privis. Usporedimo li dobivene koordinate sa onima u tablici 1, koje su izračunate po postupku opisanom u katastarskom pravilniku, ustanovit ćemo da se na pr. koordinate Barlovička u vlaku br. 1) skoro potpuno slažu, jer je Barlovička gotovo uz samu bazu Petrovac-Plješivica, a ostale, koje se nalaze prema središtu trokuta prilično se razlikuju.

Dopunu koordinata nije ptorebno uzimati.

O općoj tačnosti izračunatih koordinata iz Kl. Ivanićkog sustava u Gauss-Krügerov možemo dobiti samo grub zaključak. Naime Kalvarija izračunata je ponovo u Gauss-Krügerovom sustavu po opažanjima iz 1856. god. i naslonjena na koordinate iz »Ergebnisa«. Te izračunate koordinate Kalvarija glase: y = 5540 001,78 x = 5039 125,26, što bi značilo da je točnost transformiranja oko ± 1 m.

Kada se uzmu manji trokutovi na pr. II. reda za transformaciju koordinata, greška će se znatno smanjiti.