Dr. Ing. Nikola Čubranić — Zagreb

Trigonometrijsko mjerenje visina i njegova praktična upotreba*

PREDGOVOR

Potpun trigonometrijski operat zahtjeva osim mjerenja horizontalnih kuteva i mjerenje visinskih kuteva, kako bi mogao konačno poslužiti i pružiti na upotrebu ne samo geografske odnosno ravne koordinate, koje bi se odnosile na kakvu plohu (sferoid, ravninu) nego i visine trigonometrijskih točaka. Izvjesna točka na površini Zemljinoj potpuno je definirana sa tri koordinatne veličine: dužinom, širinom i visinom.

Koncem prošlog stoljeća radilo se je mnogo na trigonometrijskom određivanju visina. Vršila su se mnoga ispitivanja u tom pravcu, naročito se je ispitivao uticaj refrakcije na određivanje visinskih razlika. Kasnije zbog visoke točnosti, koju je pružio geometrijski nivelman u uspoređivanju sa trigonometrijskim nivelmanom, zanemarena je donekle upotreba posljednjega. Praktički visinska mjerenja trigonometrijskim putem upotrebljavala su se samo za topografske svrhe.

U novije vrijeme traži se od detaljnih planova ,a naročito od preglednih planova krupnijih mjerila, nego što su topografske karte, i visinska slika tla. Time bi uz horizontalnu sliku bio dat potpun plan i uporabiv ne samo za katastarske nego i za privredno-gospodarske i tehničke svrhe.

Kod nas je već i madžarski katastar kod obnove i dopune triangulacije u hrvatskim krajevima koncem prošlog i početkom ovoga stoljeća prilikom mjerenja horizontalnih kuteva na trigonometrijskim točkama vršio ujedno i mjerenja visinskih kuteva. Sračunate su ujedno i visinske razlike. Do konačnog izračunavanja mreže u visinskom pogledu — koliko je meni poznato — nije došlo, te trigonometrijske točke nisu ni dobile vrijednosti u pogledu visina .

Bivše Odeljenje katastra u Beogradu počelo je a i završilo sa trigonometrijskim određivanjem visina u hrvatskim krajevima 1940 godine. U srpskim krajevima počelo se je sa trigonometrijskim određivanjem visina 1938 godine.

Ovo su ujedno u bivšoj Jugoslaviji bili početci i ispitivanja, a na rezultatima tih ispitivanja počima donekle i ova rasprava. Ne mogu nažalost potkrijepiti ova razmatranja rezultatima mjerenja izvršenih na području Hrvatske, jer mi propašću stare Jugoslavije ti podatci manjkaju — nisam ih mogao više dobiti. Takva mjerenja koja su se vršila na teritoriju Hrvatske zahvaćaju kotareve: Varaždin, Ludbreg, Novi Marof, Ivanec,

---

* Prvi manji dio ovog članka već je bio štampan u Geodetskom glasniku, koji je u 1946 god. izlazio u Beogradu. Ovdje donosimo taj dio ponovno želeći onima koji glasnika nijesu primali, dati cijelinu. Molimo stoga drugove koji su imali prigode taj članak već pročitati, da nam to uvaže.

Uredništvo.

Zlatar, Sv .Ivan Zelina, te dijelove kotareva: Koprivnica, Križevci i Bjelovar. Svakako da bi ovi podaci bili za nas korisniji i da bi dali ovim razmatranjima jasniju i sigurniju sliku (podlogu), u prvom redu zato, što se odnose na naše prlike, a u drugom redu, što se podaci sa kojima raspolažemo odnose pretežno na brdovit teren, a iz podataka, koje bi dobili iz mjerenja u gore spomenutim kotarevima, naročito u dijelu između Ivančice i Kalnika, s jedne strane a rijeke Drave s druge strane, mogli bi dobiti podatke, koji bi bolje odgovarali našim ravnim krajevima Slavonije i Srijema, jer će svakako tu koeficijent refrakcije, budući vizura prolazi vrlo blizu površine zemljišta, preko rijeka, potoka, imati veća kolebanja. Bila mi je namjera, da pokupim i te podatke, ali me je u tom nastojanju spriječio rat.

Kad sam već na podatcima moram spomenuti, da su podatci, koji su u glavnom podloga ovoj raspravi, odnosno na temelju kojih se ovdje vrše razni zaključci, izvedeni i sakupljeni iz triangulacije u području: Bitolja, Resna, Sjenice, Prijepolja i Bora. Sama mjerenja sa čijim podatcima raspolažem izvršena su 1938 i 1939 godine. Rezultati tih mjerenja sažeti su i tabelarno izneseni te je za rezultate dobivene mjerenjima u 1939. god. sačinjena Tab. I-a, a za rezultate dobivene mjerenjima u god 1938 sačinjena Tab. I-a. (Tablice su prikazane u izvodu).

Ovdje mogu samo spomenuti, što se razabire sravnjivanjem Tab. I-a i I-b, da se rezultati iz god. 1938 u pogledu srednje pogrješke na jedinicu težine — veoma dobro, upravo idealno, slažu sa rezultatima iz god. 1939 zahvaljujući dakako priličnom broju izvršenih mjerenja i sigurnosti opažača.

Osim navedenih podataka izvršio sam komparaciju mjerenja raznim instrumentima, ispitivao sam eventualno savijanje durbina, kao i kolebanje vizura — uticaj refrakcije — na razne zemaljske predmete u toku jednog dana, kako bi mogao dati konačnim rezultatima općeniti karakter.

Cilj je ovih razmatranja: da se ustanovi: je li moguće i kod trigonometrijskog mjerenja visina postaviti granice odstupanja i u kojoj veličini, kao što je moguće i kao što je učinjeno i kod ostalih geodetskim radova, da se odrede težine i napokon, da se ustanove dužine strana — vizura, kod kojih se u trigonometrijskom nivelmanu postiže najveća točnost, odnosno koje su dužine u pojedinim slučajevima najpreporučljivije.

Literatura o tome ništa ne donosi — bar ja ništa slična tome nisam mogao pronaći.

U praksi redovito računa se jedna točka sa više sračunatih — datih — susjednih točaka, pri čemu se ni veća neslaganja — odstupanja — ne zanemaruju, već se uzimaju u račun, jer mogu imati svoj opravdani razlog, t. j. ne moraju biti zato pogrješna.

Svakako netočno poznavanje koeficijenta refrakcije, njegovo dnevno kao i međudnevno kolebanje, zatim uticaj lokalnog skretanja težišnice — na ovo posljednje se kod trigonometrijskog nivelmana ranije nije mnogo ni mislilo — u priličnoj mjeri utiču na nesigurnost sračunatih visinskih razlika, te osjećajući veću nesigurnost nisu se postavljale ni granice.

REZULTATI MJERENJA U GOD. 1939.

Tab. I. a

Redni broj	Ime i prezime opažača / Instrumenat	DUŽINE STRANA 0.5—1.0 km Br. opažanja	[+d] [—d]	[pd²]	1.0—1.5 km Br. opažanja	[+d] [—d]	[pd²]	1.5—2.0 km Br. opažanja	[+d] [—d]	[pd²]	2.0—2.5 km Br. opažanja	[+d] [—d]	[pd²]	2.5—3.0 km Br. opažanja	[+d] [—d]	[pd²]	3.0—4.0 km Br. opažanja	[+d] [—d]	[pd²]	preko 4 km. Br. opažanja	[+d] [—d]	[pd²]
1.	Wild 2329 N. M.	11	+54 —19	697.16	40	+242 — 36	1881.95	40	+488 — 33	2591.96	15	+233 — 0	950.35	2	+ 40 0	174.75	3	+21 — 1	23.60	—	— —	—
2.	Wild 1871 A. O.	14	—81 —12	1493.41	42	+296 — 74	2825.47	29	+343 — 73	2645.30	9	+111 — 59	700.82	1	+ 12 0	17.28	—	— —	—	1	0 0	0.00
	i t. d.																					
8.	Wild 1800 N. Z.	15	+74 —26	1282.1	37	+141 —144	2029.6	46	+325 —208	3156.1	20	+254 — 15	1442.9	3	+ 36 — 25	222.4	2	+41 + 0	116.3	—	— —	—
	Ukupno	83		5858.3	307		16152.5	281		15824.4	83		5009.2	11		433.5	7		214.3	3		5.5
	Ukupno bez r. br. 7.	75	+319 —109	5134.3	279	+1492 — 591	14930.2	244	+1949 — 720	14456.4	75	+807 —281	4631.3	10	+100 — 31	428.1	6	+62 —18	165.9	2	+ 7 — 0	2.7
	Srednja pogrješka jeedinice težine po formuli		+ 210	+ 2.9		+ 901	+ 3.2		+ 1229 + 615	+ 5.0		+ 526 + 263	+ 7.0		+ 69 + 34			+ 44 + 22	+ 7.3		+ 7.0 + 3.5	+ 3.5
	$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}$		$\pm 5.96 \frac{cm}{km}$			$\pm 5.14 \frac{cm}{km}$			$\pm 5.31 \frac{cm}{km}$			$\pm 5.48 \frac{cm}{km}$			$\pm 4.44 \frac{cm}{km}$			$\pm 3.92 \frac{cm}{km}$			$\pm 0.96 \frac{cm}{km}$	

$$m_0 = \sqrt{\frac{43.497.7}{2.775}} = \pm 5.3 \frac{cm}{km}$$

REZULTATI MJERENJA U GOD. 1938.

Tab. I. b

Redni broj	Ime i prezime opažača / Instrumenat	DUŽINE STRANA 0.5—1.0 km Broj opažanja	$[d^2]$	$[pd^2]$	1.0—1.5 km Broj opažanja	$[d^2]$	$[pd^2]$	1.5—2.0 km Broj opažanja	$[d^2]$	$[pd^2]$	2.0—2.5 km Broj opažanja	$[d^2]$	$[pd^2]$	2.5—3.0 km Broj opažanja	$[d^2]$	$[pd^2]$
1.	P. H. Zeiss 16717	11	528	748.3	45	2450	1541.5	35	1469	522.3	14	345.3	825.8	2	425	54.4
2.	P. B. Wild 2747	4	90	102.4	24	1180	736.5	34	4631	1525.9	8	727	155.8	—	—	—
	i t. d.															
8.	Lj. P. Zeiss 16741	14	986	1206.1	33	3880	2357.4	40	11356	3880.8	8	2743	454.9	3	1425	219.6
9.	N. Z. Zeiss 16617	7	639	968.1	26	4082	2484.1	41	11749	4186.4	18	2385	520.7	2	458	56.2
	ZBIROVI	102	5417	7258.5	337	29664	18323.2	350	60349	20926.4	107	22983	4756.2	25	7183	1005.7
	Srednja pogrješka jedinice težine $m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}$	$\pm$ 6, cm			$\pm$ 5,2 cm			$\pm$ 5,5 cm			$\pm$ 4,7 cm			$\pm$ 4,5 cm		

$\Sigma\,[pd^2] = 52269{,}9$

Σ broja opažanja $= 921$

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{52269.9}{2 \times 921}} = \pm\, 5{,}3\ \text{cm/km}$$

No kako nam je kod običnih praktičnih mjerenja nemoguće ispitivanje tih uticaja, da bi ih mogli eventualno odstraniti iz rezultata mjerenja, to te pogrješke povećavaju vrijednost i veličinu slučajnih pogrješaka mjerenja, kod ocjene njihove točnosti.

Za sačinjenje plana računanja, odnosno mjerenja visinskih kuteva na trigonometrijskim točkama neophodno je potrebno znati: kakva se točnost kod izvjesnih dužina strana može očekivati, da bi se mogla u svakom konkretnom slučaju jedne mreže odrediti najpovoljnija dužina strane, te plan (način) kako će se visinska mjerenja izvršiti.

O izravnavanju trigonometrijskog nivelmana napisao je prof. ing. Stjepan Horvat, opširan članak pod naslovom »Razmatranja o izjednačenju trigonometrički određenih visina«. (Hrv. drž. izmjera god. 1942 br. 10—11). To je svakako jedan vrlo dobar prijedlog naročito zbog jedinstva sustava. Mi ćemo se stoga ovdje držati u glavnom prikazivanja samih pogrješaka iz kojih želimo naći kriterij za srednju pogrješku i dozvoljena neslaganja. No da nadopunimo prazninu iznijeti ćemo rezultate izjednačenja mreže na način koji je 1938 god. uvelo Odeljenje katastra kod triangulacionih radova (rezultati izjednačenja područja Bora) kao i mogućnost primjene i te metode izjednačenja .

RAZLOZI ZA ODREĐIVANJE DOZVOLJENIH ODSTUPANJA:

U naravi mjerenja su pogrješke. Svakako ove mogu biti veće ili manje. Potpuno je jasno, da se pored malih pogrješaka, koje prelaze u okvir slučajnih pogrješaka čine i veće pogrješke, koje ali nemožemo staviti u okvir slučajnih pogrješaka. To su t. zv. grube pogrješke. Nastojimo uvijek takva mjerenja, u kojima su se očitovale grube pogrješke, izbaciti iz obrade računanja odnosno ta mjerenja ponoviti. No za ovu operaciju potreban je neki kriterij, koji će omogućiti da se uoči gruba pogrješka i razlikuje od slučajne.

Ako je poznata točnost mjerenja, poznata je i maksimalna pogrješka unutar koje mogu se kretati točni rezultati. Sve što prelazi ovaj okvir, ne može se smarati točnim mjerenjima. Takve pogrješke, makar one bile i male, smatraju se za grube, a mjerenja netočna i moraju se, a i dadu se odbaciti, da ne bi loše uticale na daljnje sračunavanje. Takvih pogrješaka imade u geodeziji mnogo, a naročito ih se može primjetiti kod finijih i točnijih mjerenja. Izvor je njihov najrazličitiji. Primjerice kod triangulacije I reda pogrješke u zatvaranju trokuta veličine 3", 4", makar je to mala veličina, smatraju se grubima i takva mjerenja netočnima, a redovito se pak pogrješke ne samo pronađu i isprave, nego se i redovito ustanovi i uzrok takve pogrješke kod prvobitnog mjerenja.

Kod trigonometrijskog nivelmana može biti u relaciji prema drugima geodetskim radovima čest slučaj malih, ali ipak grubih pogrješaka. Najčešći pak slučajevi dešavaju se primjerice, da opažač navodeći horizontalni konac durbina na vizurnu točku zaboravi dotjerati libelu na visinskom krugu u ispravan položaj, a izvrši čitanje vertikalnog kruga, ili da se uslijed dotjerivanja libele, kao i za vrijeme dotjerivanja poremeti viziranje, ili napokon da sunce direktno ugrije koji dio instrumenta.

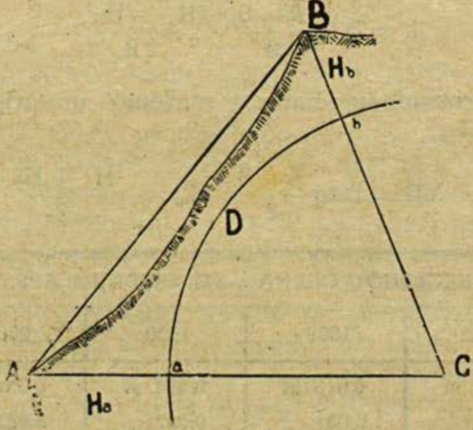
Na svaki način poželjno je imati neki kriterij, koji će pomoći, da nismo u nedoumici, da li je neko mjerenje točno ili nije, da li ga smijemo ili ne smijemo uzeti u račun. Potrebno je takav kriterij, ako je moguće samo, postaviti i za radove kod trigonometrijskog mjerenja visina.

OSNOVNE FORMULE KOD RAČUNANJA TRIGONOMETRIJSKOG NIVELMANA

Prije nego pređemo na razmatranje pogrješaka, svakako je potrebno da iznesemo način i formule računanja visinskih razlika. Moramo biti načistu, što nam koja formula predstavlja .

Ne će se ovdje iznositi u potpunosti izvodi formula za računanje trigonometrijskog nivelmana, jer se to uvijek može naći u raznim udžbenicima, nego će se iznijeti samo glavne i osnovne formule, koje su potrebne za daljna razmatranja u konačnom obliku.

a — b je nulta nivo ploha, D je dužina AB na nivo plohi, AC i BC su normale na nultu nivo plohu. Iz △ ABC izlazi konačno (Sl. 1):



Sl. 1.

$$H_b - H_a = 2\,R\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}\,\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}\left(1+\frac{H_a+H_b}{2R}\right) \qquad (1)$$

Ova je formula potpuno točna. Da bi bila praktičnija za daljne računanje izvede se zamjena tako da se $\mathrm{tg}\frac{C}{2}$ razvije u red i izvrši zamjena:

$$C = \frac{D}{R}$$

nakon čega će biti:

$$H_b - H_a = \Delta H = D\,\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}\left(1+\frac{H_a+H_b}{2R}+\frac{D^2}{12R^2}+\cdots\right) \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

pri čem imajmo u vidu da je korekcioni član $\frac{D^2}{12R^2}$ neznatan čak i za velike dužine strana. Ako uzmemo dužinu strane do 10 km njegova vrijednost iznosi 0,000.0002. Dakle može se bez dalnjeg zanemariti. Zanemarivši korekcioni član možemo formule (2) pisati:

$$H_b - H_a = \Delta H = D \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} + D \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \cdot \frac{H_a + H_b}{2R} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Drugi član jednadžbe (3) je mala veličina obzirom na prvi član, te ga možemo smatrati korekcionim članom i obilježiti slovom λ. Vrijednost korekcionog člana λ sračunata je i iznešena u donjoj tablici po visinskoj razlici Δ H i srednjoj apsolutnoj visini

$H_m = \frac{H_a + H_b}{2}$, te ćemo konačno imati:

$$H_b - H_a = \Delta H = D \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} + \lambda \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

gdje je $\lambda = D \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \cdot \frac{H_a + H_b}{2R}$.

Vrijednost korekcionog člana λ možemo unaprijed sračunati po elementima Δ H i H_m

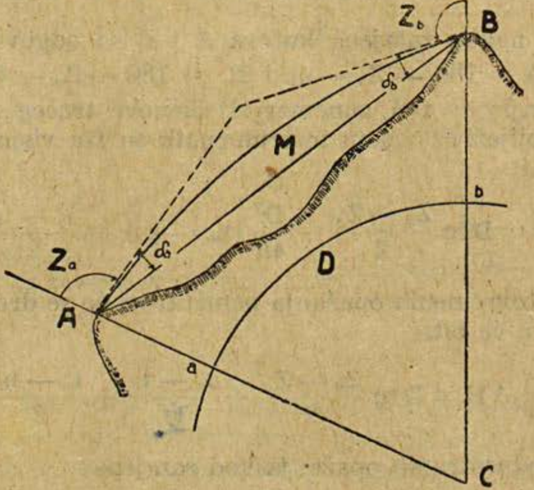
gdje je $\Delta H = D \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}$; $H_m = \frac{H_a + H_b}{2}$.

VRIJEDNOST KOREKCIONOG ČLANA λ PO SREDNJIM APS. VISINAMA $H_m =$					
Δ H	500 m	1000	1500	2000	2500
100 m	0,008 m	0,016 m	0,024 m	0,031 m	0,039 m
200 „	0,016 „	0,031 „	0,047 „	0,063 „	0,078 „
300 „	0,024 „	0,047 „	0,071 „	0,094 „	0,118 „
400 „	0,031 „	0,063 „	0,094 „	0,125 „	0,157 „
500 „	0,039 „	0,078 „	0,118 „	0,157 „	0,196 „

Imajući ovakvu tablicu biva jasno, da će se visinske razlike računati jednostavno po formuli

$$H_b - H_a = D \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

a vrijednost korekcionog člana dodavati će se visinskoj razlici neposredno pred izravnanjem mreže u visinskom pogledu, t. j. onda, kad se već može raspolagati sa približnim vrijednostima apsolutnih visina točaka. Kako se kod trigonometrijskog nivelmana visinske razlike računaju do na centimetar točno, to se u ravničastim terenima, kao što je naša Slavonija, korekcioni član može potpuno zanemariti.



Sl. 2.

Uticajem zemljine atmosfere vizirna linija ne ide u pravcu AB nego malo u izbočenom luku AMB, koji ima svoju konkavnu stranu okrenutu dolje k zemlji (sl. 2). Ovdje promatramo mi samo v e r t i k a l n u k o m p o n e n t u te krive vizurne linije, te je nazivamo t e r e s t r i č n o m r e f r a k c i j o m. Horizontalna komponenta vizurne krive linije utiče kod mjerenja horizontalnih kuteva, te je po svojoj veličini u sravnjenju sa vertikalnom mnogo manja i nazivaju je l a t e r a l n o m i b o č n o m r e f r a k c i j o m. Svakako ako zamislimo da je zemaljska atmosfera sastavljena iz raznih slojeva zraka, koji se po gustini razređuje od dolje na gore u vidu koncentričnih kugli, dobivamo taj oblik vizurne linije. Kako su atmosferske prilike veoma različne, kako po vremenu, prostoru, a tako i uzduž same vizurne linije, to je nemoguće točno ustanoviti veličinu refrakcije. Svakako da nesigurnost u poznavanju veličine refrakcije u času mjerenja vertikalnih kuteva, veoma smanjuje točnost mjerenja odnosno određivanja visinskih razlika .

Tangente u točkama A i B (sl. 2) na vizurnu liniju, daju vizurne pravce. Kuteve što ga zaklapaju te tangente sa normalama nazivamo prividnim zenitnim udaljenostima.

U stvari to su kutevi koje dobivamo mjerenjem.

Da bi vizurnu krivu liniju nekako definirali smatraju je kao dio luka koji leži u vertikalnoj ravnini točaka A i B i da su kutevi δ_a i δ_b u istom vremenskom momentu jednaki međusobno t. j.

$$\delta = \delta_a = \delta_b \cdot$$

$$\delta = k \frac{C}{2} = k \frac{D}{2R}$$

$$\delta_a = k_a \cdot \frac{D}{2R}; \qquad \delta_b = k_b \cdot \frac{D}{2R}$$

Formula (5) će nakon zamjene kuteva A i B sa odgovarajućim

$$A = 180 - Z_a - \delta_b \text{ i } B = 180 - Z_a - \delta_b$$

i razvijanja u Tajlorov red, zanemarivši članove trećeg reda kao beskonačno male, i obilježivši visinu instrumenata sa i a visinu signala — cilja — sa l glasiti:

$$H_b - H_a = \Delta H = D\,\mathrm{tg}\frac{Z_b - Z_a}{2} + \frac{D^2}{4R}(k_b - k_a) + \frac{i_a - i_b}{2} + \frac{l_a - l_b}{2} \quad (6)$$

U slučaju istovremenih opažanja poništavati će se drugi član jer će k_a biti jednako k_b te će biti:

$$H_b - H_a = \Delta H = D\,\mathrm{tg}\frac{Z_b - Z_a}{2} + \frac{i_a - i_b}{2} + \frac{l_a - l_b}{2} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

U slučaju jednostranih opažanja kod zamjene

$$A = 180 - (Z_a + \delta_a); \quad B = Z_a + \delta_a - C \quad \text{imamo:}$$

$$F = H_b - H_a = \Delta H = D\,\mathrm{ctg}\left(Z_a - \varrho'' \frac{1 - k_a}{2R} D\right) + i_a - l_b \quad (8)$$

Kod praktičkih radova pri računanju dolazi najviše do upotrebe formule 8 i 7. Formula 6 dolazi slabo do upotrebe, jer nam kod iste redovito nije poznata razlika $(k_b - k_a)$ te smo prisiljeni staviti da je $k_b = k_a$.

To su formule koje se daju u pojedinim udžbenicima sa razlikom da se pojedini elementi u raznim udžbenicila različno obilježavaju.

Prednje formule izvedene su pod pretpostavkom da je Zemlja kugla odnosno da je nulta nivo ploda na dijelu a — b (sl. 2) kružna ploha, a za srednji polumjer uzima se:

$$R = \sqrt{MN}$$

gdje je M — polumjer zakrivljenosti po meridijanu

N — „ „ „ prvom vertikalu

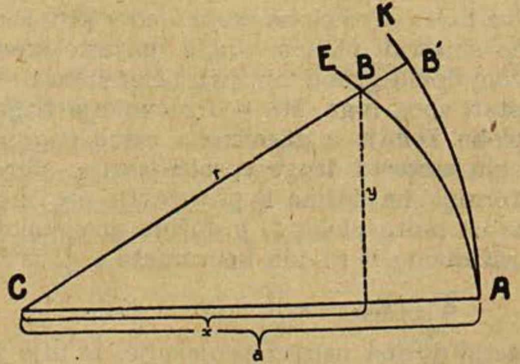
Kad već ovdje i onako promatramo pogrješke ne će biti na odmet, ako sračunamo razliku između sferoida i kugle, odnosno popravku koju bi morali davati sračunatim visinskim razlikama, da bi mogli preći sa kugle na sferiod, jer će nulta nivo ploha a—b u svom daljnjem približenju biti ne kugla negò sferoid.

Radi što prostijeg izvoda i ocjene te veličine smatrati ćemo da se točka A nalazi na ekvatoru a točka B u meridijanu točke A.

Ovo je svakako i najnepovoljniji slučaj: 1. pošto je zakrivljenost na ekvatoru najveća i 2. pravac meridijana je najnepovoljniji .

A K je luk kugle

A E je luk elipsoida



Sl. 3.

Za računanje distancije B B' odnosno na njenu veličinu ne će biti od uticaja ako smatramo,, da se normala na nivo plohu elipsoida u točki B poklapa sa normalom na nivo plohu kugle u točki B. Imamo odnose:

$$r = \overline{CB}, \qquad a = \overline{CA} = \overline{CB'}$$

$$a - r = a - \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 \quad \text{odakle slijedi:}$$

$$a - r = a - a \left(1 + \frac{b^2 y^2 - a^2 y^2}{a^2 b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Kad razvijemo u red i zadržimo samo prvi član biti će:

$$\underline{a - r \doteq + \frac{a^2 y^2 - b^2 y^2}{2 a b^2} = y^2 \frac{a^2 - b^2}{2 a b^2}} \; {}^{*)}$$

Ako uzmemo da je dužina strane $y = 10$ km veličina a — r iznositi će 5 cm.

Za dužinu strane $y = 5$ km veličina — r iznositi će svega 1 cm.

Ovdje moramo naglasiti ,da su dobivene vrijednosti za a — r maksimalne, jer je uzet u rasmatranje najnepovoljniji slučaj.

S obzirom na pogrješke u mjerenju visinskih kuteva a naročito obzirom na nesigurnost refrakcije zanemaruje se u praksi ovaj uticaj, i time se izbjegava komplikovaniji izvod formula kao i konačni obračun visinskih razlika u odnosu na plohu sferoida.

---

*) Pošto je $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2$, gde je e' tzv. „drugi ekscentricitet“, to je $a - r = \frac{e'^2}{\sqrt{2a}} \cdot y.^2$

Naprijed izvedene formule za sračunavanje visinskih razlika izvedene su u odnosu na nultu nivo plohu, koju smo u granicama dužine trigonometrijske strane smatrali plohom kugle umjesto sferoidnom plohom, a ovim smo prikazom dobili grubu, ali ipak neku sliku o veličini pogrješke koja bi mogla nastati zbog toga, što kod računanja trigonom. nivelmana uzimalo za nivo plohu Zemlje u granicama jedne trigonom. strane prvu aproksimaciju: kuglu umjesto druge aproksimacije: sferoida.

U izvedenim formulama dužina D pretstavlja projekciju dužine trigonometrijske strane na nultu plohu t. j. dužinu geodetske linije. U praksi obično tu dužinu računamo iz ravnih koordinata t. j. iz formule:

$$d^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2.$$

Zbog deformacije dužina uslijed projekcije, D nije jednako d za izvjesnu malu veličinu. Kod točnijih mjerenja treba ovu razliku u dužini uzeti u obzir. Uticaj zanemarivanja te veličine na sračunavanje visinskih razlika biti će veći na granicama projekcije i rasti će proporcionalno sa visinskom razlikom.

Kod usvojene Gaus-Krigerove projekcije može se kod redovitih mjerenja uzimati dužina po gornjoj formuli. Kod točnijih mjerenja valja uzeti dužine po slijedećoj formuli:

$$d'^2 = (\bar{y}_b - \bar{y}_a)^2 + (\bar{x}_b - \bar{x}_a)^2$$

$$D = d'\left(1 - \frac{y^2_m}{2R^2}\right)$$

Prikazom formula za računanje visinskih razlika dobiven je ujedno kratki pregled na kakvu se plohu sračunate visine odnose, što je svakako potrebno znati prije nego izvedemo daljnja zaključivanja. Ujedno je data slika o veličini pogrješaka koje mogu nastupiti, a ne ovise o mjerenju nego od upotrebe same formule u skraćenom obliku.

Korekcioni član ne smatra se pogrješkom jer se uvijek može prema prednjoj tablici njegova veličina kod sračunavanja visinskih razlika uzeti u obzir. Ovo isto vrijedi za pogrješku zbog defmoracije dužina.

POGRJEŠKE MJERENJA VISINSKIH RAZLIKA

Prije nego pređemo na rasmatranje rezultata izmjerenih visina odnosno visinskih razlika, da bi iz istih dobili potrebne zaključke, moramo biti načistu: što mjerimo, na kakvu se plohu odnose dobivene visine. Moramo rasmotriti kakve pogrješke možemo činiti pri mjerenju vertikalnih kuteva i što sve utiče na točnost mjerenja. Konkretno rasmotrit ćemo:

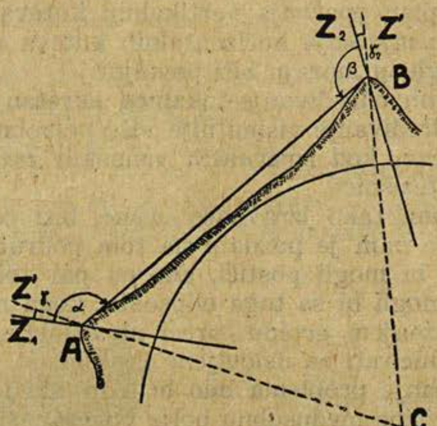
a. Uticaj skretanja težišnice
b. pogrješke mjerenja visinskih kuteva
c. pogrješke uslijed refrakcije
d. pogrješke svođenja na centar

Geometrijskim ili preciznim nivelmanom date su visine točaka s obzirom na nivo plohu geoida. Ovdje ćemo izložiti: obzirom na kakvu se plohu dobivaju visine koje dobivamo trigonometrijskim nivelmanom.

UTICAJ SKRETANJA TEŽIŠNICE

Mi ovdje ne ćemo obraditi detaljno taj uticaj, jer bi to pretstavljalo temu za sebe, a niti imamo takvih mjerenja na osnovu kojih bi mogli obraditi ozbiljnije ovu temu, nego ćemo ovdje samo principijelno izložiti uticaje i način djelovanja.

Ako imademo neku trigonometrijsku mrežu i na svim točkama osim visinskih i horizontalnih kuteva imademo određenu veličinu i pravac skretanja težišnice, možemo odrediti veličinu skretanja u pravcu mjerene strane i uvesti veličinu skretanja u račun.



Sl. 4

Z'AC i Z'BC su normale na sferoid a $Z_1 A$ i $Z_2 B$ su prave normale t. j. normale koje određuju plohu geoida (sl. 4).

Da bi dobili visinske kuteve obzirom na plohu sferoida moramo reducirati izmjerene zenitne udaljenosti t. j.

$$\alpha_{EC} = \alpha - \gamma_1 \qquad \beta_{EC} = \beta + \gamma_2$$

Uzevši u obzir na svim točkama i svim pravcima takovu redukciju dobiti ćemo zenitne udaljenosti, a prema tome i visinske razlike obzirom na plohu sferoida.

Neposredno određivanje skretanja težišnice na svakoj trigonometrijskoj točki, što se može postići astronomskim opažanjima, bilo bi svakako preskupo, da ne reknemo i neizvodljivo, čak ako imademo na umu da time vršimo ne samo trigonometrijsko niveliranje, nego i određivanje odklona geoida od uslovljenog sferoida.

Predpostavimo, da imademo neprekidnu trigonometrijsku mrežu sa izvršenim opažanjima visinskih kuteva, po planu, koji bi uglavnom odgovarao planu opažanja horizontalnih kuteva. Pretpostavimo, da se točke nalaze u priličnoj udaljenosti jedna od druge, barem 4—5 km, tako da se na svakoj točki može očitovati bar poseban uticaj lokalnog skretanja težišnice.

U našem primjeru imademo dakako veći broj izvršenih opažanja, nego što su prijeko potrebni, za računanje visinskih razlika.

Ako ovu mrežu izravnamo svu od jednom i ako su opažanja pouzdana i izvršena u gorskom kraju gdje je koeficijent refrakcije dovoljno pouzdan, možemo smatrati, da su rezultati lišeni lokalnog uticaja skretanja težišnice, odnosno uticaji lokalnog skretanja težnišnice očitovati će se kao (sistematske) pogrješke mjerenja zenitnih kuteva na svakoj pojedinoj točki. Daljnjim rasčlanjivanjem i međusobnom komparacijom tako dobivenih pogrješaka na svakoj točki i za svaku visinsku razliku mogli bi dobiti veličinu i pravac lokalnog skretanja težišnice.

Za ovu svrhu plan opažanja vertikalnih kuteva mora se u bitnosti poklapati sa planom mjerenja horizontalnih kuteva t. j. presjeci pravaca u horizontalnom pogledu moraju biti povoljni.

Svakako ,da nam određivanje lokalnog skretanja težišnice za samo trigonometrijsko određivanje visina nije više potrebno, jer je u glavnom, kako je ovdje rečeno, kod izravnatih visinskih razlika uklonjen uticaj lokalnog skretanja težišnice.

Prema izloženom, tako izravnate visine, biti će visine obzirom na plohu elipsoida. Ako nam je poznato na tom području i apsolutno skretanje težišnice, što bi mogli postići, ako na par točaka izvršimo astronomska opažanja, mogli bi sa toga elipsoida, koga možemo smatrati nekim daljnjim približenjem geoidu, preći na uslovljeni elipsoid, pa dobivene visine lako reducirati na uslovljeni elipsoid.

Ovakovo shvaćanje problema bilo bi teoretski najbolje, jer bi u prvom redu bile sve visine međusobno bolje povezane — mnogo više opažanih veličina nego što je potrebno, — a dalje omogućuje i doprinaša mnogo određivanju matematičkog oblika zemlje.

Svakako za ovu svrhu treba da budu izvršena opažanja što točnije — potrebno je uzeti osjetljivije i velike instrumente, za mjerenje visinskih kuteva. Praktički postići će se vrijedniji rezultati u planinskim krajevima, jer se mogu očekivati veće promjene u skretanju težišnice, a i bolji jer je kolebanje refrakcije u vinskim predjelima manje.

Rasmotriti ćemo sada drugi slučaj, t. j. kad je visinska mreža tako postavljena, da ne možemo ukloniti skretanja težišnice.

Prètpostavimo ,da je točka B na takvom položaju masiva M, da se normala na usvojeni sferoid poklapa sa normalom na geoid. Normala u točki A na uslovljeni sferoid trebala bi imati smjer Z' A. Uticajem masiva M normala u točki A zauzeti će položaj Z A, to jest izmjereni kut u točki A uslijed privlačenja mase M biti će veći za kut γ. Naše konačne formule za sračunavanje visinskih razlika (7) i (8) izvedene su obzirom na nultu nivo plohu (sl. 1), smatrajući da ona imade konstantnu zakrivljenost. Kada bi u točki B bila ista zakrivljenost kao i u točki A njihove normale sjekle bi se u točki C", a kad u točki A ne bi bilo djelovanja privlačenja mase M tada bi se normale sjekle u točki C'. Uslijed privlačenja mase M biti će polumjer nivo plohe u točki A jednak $R_A = \overline{AC}$, a u točki B $R_B = \overline{B'C}$.

(Nastavak slijedi).