ГЕОМЕТАРСКИ И ГЕОДЕТСКИ ГЛАСНИК
Орган Удружења Геометара и Геодета Краљевине Југославије
БЕОГРАД, Браће Југовића 16/I

Професор **Лав Сопоцко**

РЕШЕЊЕ НОРМАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА У ВИШЕ ГРУПА

(ЗАВРШЕТАК[1])

6⁰. Неодређено решење нормалних једначина у више група

I. Основи начина. Како смо видели из неодређеног решења нормалних једначина у две групе[2]), за трансформирање коеф-ата друге групе нормалних једначина потребно је наћи вредности којеф-ата неодређеног решења прве групе нормалних једначина, после чега помоћу једноставних рачунских операција увршћених у просте и хомогене формуларе долазимо до општег неодређеног решења целог почетног система нормалних једначина, који обухвата обе њихове групе.

Ако би ван система нормалних једначина за прве две групе постојале још неколико нових условних и одговарајућих нормалних једначина, које нису узимане у обзир при првом изравнавању, онда би могли груписати их у засебну групу и њу, сматрати према претходном систему, као *другу* групу. А пошто је први систем од две групе већ добио своје опште неодређено решење, то ништа не стоји на путу да помоћу којеф-ата тог неодређеног решења трансформишемо којеф-те нове групе нормалних једначина, *треће* по реду, и да нађемо неодређено решење целокупног система од *три* групе нормалних једначина.

Овај систем неодређеног решења поново можемо сматрати као решење *прве* групе и помоћу његових којеф-ата трансформирати којеф-те нове, *четврте* по реду, групе нормалних једначина.

И тако редом, докле не буду исцрпљене све нормалне једначине целокупне тријангулацијоне мреже која је узета за изравнавање.

При томе потпуно је једнако, да ли је нова група нормалних једначина хотимично изостављена из првог изравнавања, или она улази у изравнавање због нових мерења, односно проширења првобитне мреже.

Последња околност придаје нарочиту важност начину неодређеног решења нормалних једначина, јер, у вези са изравнава-

---

[1]) Види Геом. и Геод. Гласник, 1940, св. 3, стр. 177-194; св. 4, стр. 237-263. и св. 5, стр. 297—315.

[2]) Геом. и Геод. Гласник, 1940, св. 4.

њем у више група, она омогућава обраду и изравнавање мерења на тријангулационим мрежама упоредо са њиховим напредовањем, не очекујући потпун завршетак целокупне мреже. Добивени систем неодређеног решења допушта рачунање свих елемената довршеног дела тријангулационе мреже са тачношћу, која потпуно одговара свима мерењима у практичне сврхе.

Према горе наведеном неодређено решење нормалних једначина у више група састоји се у следећем:

1) ... из општег система условних, односно нормалних једначина, одваја се једна њихова група, чије се неодређено решење може наћи на најпростији начин;

2) ... остале нормалне једначине деле се према практичним околностима и разлозима на више група, које следују у одређеном и поступном реду;

3)... трансформирањем којефицијената прве одвојене групе нормалних једначина а помоћу којеф-ата неодређеног решења почетне групе нормалних једначина, и њеног неодређеног решења добива се опште неодређено решење за прве две групе;

4) ... на исти начин ово опште неодређено решење проширује се прикључком нове, друге по реду, групе из осталих система нормалних једначина и тако редом, док све нормалне једначине не уђу у изравнавање.

II... Питање везана за практичну примену начина. Начин неодређеног решења у више група, како се види из увода (1°), тек је после светскога рата почео да се примењује у пракси.

Потпуно је природно да се при првим покушајима те примене ишло оним путевима, који су били први пронађени. А да ли су они најкраћи и најпогоднији за практичну употребу, то није још дефинитивно утврђено.

Инж. Ј. Кржовак са својим сарадницима успео је да доврши решење 559 условних једначина али са 92 поступна приближавања.

Практична примена начина, коју је описао *H. Boltz* у својој расправи, наведеној у опасци бр. 6, дао је само пример на изравнавање мреже од 39 троуглова са 48 условних, односно, нормалних једначина. Нарочитих и потпуно поузданих правила за систематску примену начина за мрежу произвољну по броју троуглова није могуће поставити на основу овог примера.

Из извештаја директора Пруског Геодетског Института о његовом раду за године 1926—1937, када се изводило по начину Болца изравнавање целокупне првокласне мреже Немачке, може се наслутити да је његова примена наишла на извесне препреке и тешкоће, које су биле савладане тек онда, кад је Болц допунио начин развијања новим начином замене.

Испитивање болцеовог начина руским геодетима показало је низ практичних препрека за његову широку и поуздану примену.

Моје искуство при решавању по начину Болца 130 нормалних једначина такође је стављало многобројна питања практичне природе, која је требало решавати у току самог рачунског рада и која су, наравно, успоравала њихово напредовање.

Из анализе постојеће литературе о начину неодређеног решења у више група и према сопственом искуству његове практичне примене може се утврдити најважнија од тих питања, од чијег решења зависи у главном усвајање начина као основног за изравнавање првокласних тријангулацноних мрежа.

Ова питања су следећа:

1) ... Избор условних, односно нормалних једначина за прву, почетну групу и начин најпростијег и најбржег њеног неодређеног решења.

Ово питање може се сматрати, после објављених радова самог *Болца* (опаска бр. 6), *K. Friedrich'a* (оп. бр. 10), *W. Jenne* (оп. бр. 12) и мог досадашњег чланка, доста расветљеним и у знатној мери решеним. Јасно је да за прву групу треба изабрати оне угловне услове, којим одговарају нормалне једначине, чије неодређено решење се налази у објављеним таблицама Болца и Јенне.

Објављивање нових, већ израчунатих таблица, као што су моја и њихова допуна таблицама за компликованији систем угловних услова, увећавати ће број условних, односно, нормалних једначина, које се могу одвајати за почетну групу.

2) ... Начин поделе осталих једначина у групе, које се постепено прикључују ка почетној.

Ово питање је сложено и зависи од решења низа других, и то:

a) ... да ли је могућа подела целокупног општег система условних, односно, нормалних једначина на неколико одвојених једна од друге групе, које би се решавале у неодређеној форми потпуно независно с тиме да би се могла њихова неодређена решења спојити и трансформирати у неодређено решење целог система једначина.

Први је поставио ово питање инж. *J. Кржовак* у расправи наведеној у опасци бр. 7. Предложено решење претвара директни начин неодређеног решења у начин поступног приближавања.

Позитивно решење дао је Болц у предложеном начину замене. Али овај начин само делимично решава постављено питање, ограничавајући број независних група на три и претварајући практички, при спајању добивеиих неодређених решења трију независних група, начин неодређеног решења у начин бројни.

Од моје стране је разрађен начин поделе целокупног система условних, односно нормалних једначина, на низ релативно малих независних група и начин спајања њихових делимичних неодређењих решења у општи систем неодређеног решења.

б)... Какав је број једначина у осталим групама, осим почетне, који би био најцелисходнији за практичну примену.

Решење овог питања у првом реду зависи од начина трансформирања којефицијената сваке од следећих по реду одвојених група једначина а у вези са изумом целисходног формулара за неодређено решење општег система једначина, оног формулара, који је наведен. као пример, под бр. 4 на стр. 259 мог чланка.

Моја истраживања доводе до закључка да је најпрактичнија подела на групе она, кад свака следећа група има само једну једначину. У овом и само у овом случају могуће је задовољити једним формуларом бр. 4 при рачунању неодређеног решења целог система једначина, који се деле на више група. Уз то рачунање система помоћних корелата постаје најпростије, као и трансформирање којефицијената једначина наредне групе.

Рачунане помоћних корелата и трансформирање којефицијената нормалних једначина наредне групе остаје просто и онда, кад се број једначина наредне групе пење на две и три. Али у овом случају поделе на групе прикључење сваке групе тражи за рачунање засебан и одвојен формулар бр. 4, што знатно повећава обим рачунских операција.

Повећање броја једначина у групама више од три компликује све више како рачунање помоћних корелата, чији се број група повећава упоредо са бројем једначина у групи, тако и трансформацију којеф-ата једначина. Осим тога неодређено решење трансформираних једначина се изводи по алгоритму Гауса (форм. бр. 2 на стр. 244), док у претходним случајевима за ово решење могу се искористити много простији начини.

3)... Тачност (о броју децимала) са којом треба вршити рачунање којеф-ата неодређеног решења.

Ово питање веома је важно за практичну примену начина, јер свако повећање на једну децималу у траженим вредностима при већем броју једначина у општем систему огромно повећава рачунски посао.

У постојећој литератури није објављена ни једна рвсправа по том питању.

Према томе, што таблице за неодређено решење система угловних једначина објављених од стране Болца и Јенне ограничавају вредности којеф-ата неодређеног решења на пет децимала, може се доћи до закључка да у пракси Пруског геодетског института ова тачност одговара тачности коначних резултата.

Међутим и руски геодети у њиховим испитивањима неодређеног решења у више група као и ја констатовали смо да је рачунање са пет децимала довољно за решење са одговарајућом тачношћу не за више но за систем од тридесет нормалних једначина.

Ова околност приморала ме је да при решењу 130 нормалних једначина, прво — прерачунам таблице којеф-ата за неодређено решење угловних једначина, повећавши број децимала до седам; друго-поновим неодређено решење система од првих 30 једначина да би се добио резултат са седам децимала и треће-да тражим начин повећања тачности резултата рачунања без даљег повећања броја децимала, јер је постојала бојазан да не би за потребну тачност резултата при систему већем од 100 једначина било довољно рачунати са седам децимала.

Ово смањење тачности резултата рачунања при решавању нормалних једначнна мора се осетити и при употреби алгоритма Гауса. Али пошто се је тим начином решавао обично ограничен број једначина није постојао практични разлог за проучавање те појаве.

Моја истраживања довела су до општег решења постављеног проблема и омогућавају уз рачунање малих поправака искоришћавање таблица и вођење рачунања са мањим бројем од пет децимала у изразима вредности којеф-ата неодређеног решења почетне групе.

4)... Начин контроле рачунских операција.

Како је познато, изравнавање, односно решавање условних једначина (или једначина грешака), ма којим је начином изведено, тражи многобројне, мада и једноставне, рачунске операције, чији резултати су повезани међусобно тако, да свака грешка у једном од њих утиче на следеће резултате, чинећи их неупотребљивим, а потрошени рад — узалудним.

Зато поступна, непрекидна и свестрана контрола рачунских радњи постаје нераздвојен део сваког начина изравнавања.

Због своје новине овај начин неодређеног решења у више група нема још потпуно разрађен систем контроле, који је непосредно везан за изабрани рачунски поступак и одговарајуће му формуларе.

H. Boltz у својој расправи, која је обележена у опасци бр. 6, веома је детаљно разрадио систем контрола у свим појединим деловимама примера изабратог за изједначење.

У одељку 4^0 извео сам многе контролне формуле у две групе које важе и за изравнавање у више група.

За практичну примену потребно је, а у вези са рачунским поступком, изабрати од постојећих или извести нове такав број контролних формула и одговарајућих контролних рачунања. који би с једне сгране најкраћим и, дакле, најпростијим и најбржим путем контролисао сваки део рачунања, чији резултат утиче на правилност резултата наредних рачунских радњи, а с друге-давао потпуну сигурносг ваљаности контролних операција.

5).. о начину оцене тачности изравнатих величина и оних које су улазиле у изравнавање, као и њихових функција.

Отступања условних једначина, израчунате вредности корелата и поправака праваца, односно, углова довољна су за оцену тачности на начин уобичајен за свако изравнавање.

Али начин неодређеног решења пружа, као што смо већ нагласили у општим примедбама одељка 4^0, нове могућности за детаљно проучавање тачности свих величина, које улазе у изравнање и резултата истог, као и њихових функција тиме, што су којефицијенти неодређеног решења непосредно везани за којефицијенте тежине. При рачунању по алгоритму Гауса којеф-ти тежине рачунају се посебно и упоредо са основним рачунањем. Зато, обично, да не би компликовали и без тога сложено рачунање, испушта се одређивање вредности којеф-ата тежина, тим више што се они односе на поједине, понекад вештачки издвојене, делове тријангулационе мреже изабрате за изравнавање, који се спајају помоћу фиксних услова. Последњи мењају тачну поделу и вредности поправака и онемогућују потпуно исправну оцену тачности.

Због свих ових околности начин неодређеног решења ствара нову област за свестрано испитивање и проучавање тачности не само мерених величина него и самих начина мерења, што му даје нарочиту вредност.

III... Постигнути резултати и правац у којем се ризвија начин.

Како смо већ споменули начин неодређеног решења у више група био је примењен у пракси већ три пута: при изравнавању чешке основне катастарске тријангулационе мреже под руководством инж. *Ј. Кржовака* и по његовом начину поступног приближавања; од Пруског геодетског института за реамбулацију и изравнавање првокласне тријангулацијоне мреже Немачке под руководством и по начину професора *H. Boltz'a* и, најзад, од мене ради изравнавања релативно малог дела реамбулиране и попуњене аустро-угарске првокласне тријангулације.

Сами факат да су ови мање или више обимни и значајни радови доведени до краја, сведочи да су питања побројана у претходном одељку била решена, делимично или потпуно, а у правцу који је изабрат у почетку рада. Да ли су та решења најцелисходнија и најсређенија виде ће се тек онда, кад то буде у довољној потпуности објављено, што није још случај.

Ван сваке је сумње да ће најопсежније расправе објавити Пруски геодетски институт, једна од виђенијих геодетских научних установа, где ради релативно, многобројан персонал, са опширном и озбиљном научном спремом под руководством признатих геодетских капацитета. То се види и по већ објављеним радовима Болца и Јенне.

У садашњем свом чланку тежим да дам систематизацију постојећег и објављеног материјала и оних резултата личног истраживања, до којих сам дошао на основу теоријских расматрања и стеченог практичног искуства.

Овогодишњи свој чланак ради његовог заокружења завршавам излагањем само једног начина неодређеног решења нормалних једначина у више група, и то најпростијег: начина поступног прикључка ка почетној групи по једној новој једначини из општег система нормалних једначина.

Расправљање осталих питања, побројаних горе, која нису додирнута у садашњем чланку остављам за доцније, ако уредништво часописа не откаже своје љубазно гостопримство на његовим странама.

IV... Начин поступног прикључења по једној нормалној једначини.

Пошто при сваком прикључењу новој једначини ка претходној групи чије је неодређено решење већ нађено претставља понављање неодређеног решења у две групе, то сви обрасци изведени у делу 4⁰ чланка, имају вредност и за овај случај са том променом да се односи на нарочити случај, кад је број једначина друге групе η_2 једнак са 1. Формуле, које се односе на прву групу, и то, — (52), (53), (54), (55) остају, наравно, без промене.

Препишемо за наш нарочити случај обрасце који се односе на другу групу.

Нормална једначина за другу групу и неодређено решење за њену корелату $к_l$ биће следеће:

(85)... $\alpha_{l1}\, к_1 + \alpha_{l\cdot 2}\, к_2 + \ldots + \alpha_{ln}\, к_n + \alpha_{ll}\, к_l + w_l = 0$

(85*)... $к_l = \varphi_{l\cdot 1}\, w_1 + \varphi_{l\cdot 2}\, w_2 + \ldots + \varphi_{l\cdot n}\, w_n + \varphi_{l\cdot l}\, к_l$

Трансформирана нормална једначина (85) имаће облик, —

(86)... $A_l\, \kappa_l + W_l = 0.$

За рачунање једине групе помоћних корелата служе обрасци:

$$(87)\ldots\quad \begin{array}{l} \rho_{1\cdot1}=f_{1\cdot1}\alpha_{l\cdot1}+f_{1\cdot2}\alpha_{l\cdot2}+\cdots+f_{1\cdot n}\alpha_{l\cdot n} \\ \rho_{1\cdot2}=f_{2\cdot1}\alpha_{l\cdot1}+f_{2\cdot2}\alpha_{l\cdot2}+\cdots+f_{2\cdot n}\alpha_{l\cdot n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \rho_{1\cdot n}=f_{n\cdot1}\alpha_{l\cdot1}+f_{n\cdot}\alpha_{l\cdot22}+\cdots+f_{n\cdot n}\alpha_{l\cdot n}. \end{array}$$

Трансформирани једини којеф-т $A_{l\cdot l}$ и слободни члан W_l рачунају се из образаца:

$$(88)\ldots\quad A_{l\cdot l}=\alpha_{l\cdot l}+\alpha_{l\cdot1}\rho_{l\cdot1}+\alpha_{l\cdot2}\rho_{1\cdot2}+\cdots+\alpha_{l\cdot n}\rho_{1\cdot n}$$

$$(88^*)\ldots\quad W_l=\rho_{1\cdot1}w_1+\rho_{1\cdot2}w_2+\cdots+\rho_{1\cdot n}w_n+w_l$$

Квадратични којеф-т неодређеног решења (85*) наћи ће се из обрасца

$$(89)-\quad \varphi_{l\cdot l}=\frac{1}{A_{l\cdot l}}$$

а остали којеф-ти из образаца:

$$(89^*)\quad \begin{array}{l} \varphi_{l\cdot1}=\rho_{1\cdot1}\varphi_{l\cdot l} \\ \varphi_{l\cdot2}=\rho_{1\cdot2}\varphi_{l\cdot l} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \varphi_{l\cdot n}=\rho_{l\cdot r}\rho_{l\cdot l}, \end{array}$$

одакле следи контролна формула:

$$(89^{**})\ldots\quad \sum_{p=1}^{p=n}\varphi_{l\cdot p}=\varphi_{l\cdot l}\sum_{p=1}^{p=n}\rho_{1\cdot p}$$

Прирасти којеф-ата неодређеног решења прве групе се рачунају из образаца:

$$(90)\ldots\quad \begin{array}{l} \text{за } \kappa_1\ldots\ \Delta f_{1\cdot1}=\rho_{1\cdot1}\varphi_{l\cdot1};\ \Delta f_{1\cdot2}=\rho_{1\cdot2}\varphi_{l\cdot1};\ \cdots\ \Delta f_{1\cdot n}=\rho_{1\cdot n}\varphi_{l\cdot1}; \\ \text{за } \kappa_2\ldots\ \Delta f_{2\cdot1}=\rho_{1\cdot1}\varphi_{l\cdot2};\ \Delta f_{2\cdot2}=\rho_{1\cdot2}\varphi_{l\cdot2};\ \cdots\ \Delta f_{2\cdot n}=\rho_{n\cdot n}\varphi_{l\cdot2}; \\ \ldots\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdots\quad \cdot\quad \cdot \\ \text{за } \kappa_n\ldots\ \Delta f_{n\cdot1}=\rho_{1\cdot1}\varphi_{l\cdot n};\ \Delta f_{n\cdot2}=\rho_{1\cdot2}\varphi_{l\cdot n};\ \ldots;\ \Delta f_{n\cdot n}=\rho_{1\cdot n}\varphi_{l\cdot n}. \end{array}$$

Збирови ових једнакости по редовима и стубцима даје две групе контролних формула:

Збирови по редовима, —

$$(90^*)\ldots\quad \sum_{p=1}^{p=n}\Delta f_1.p=\varphi_{l\cdot1}\sum_{p=1}^{p=n}\rho_1.p;\ \sum_{p=1}^{p=n}\Delta f_2.p= =\varphi_{l\cdot2}\sum_{p=1}^{p=n}\rho_1.p;\cdots;\ \sum_{p=1}^{p=n}\Delta f_n.p=\varphi_{l\cdot n}\sum_{p=1}^{p=n}\rho_1.p$$

а збирови по стубцима:

$$(90^{**})\ldots\quad \sum_{q=1}^{q=n}\Delta f.q.=\rho_{1\cdot1}\sum_{q=1}^{q=n}\varphi_l.q;\ \sum_{q=1}^{q=n}\Delta fq._2= =\rho_{1\cdot2}\sum_{q=1}^{q=n}\varphi_l.q;\cdots;\ \sum_{q=1}^{q=n}\Delta fq._n=\varphi_{l\cdot n}\sum_{q=1}^{q=n}\varphi_l.q$$

Из упоређења образаца (89*) и (90) лако је уочити њихову сличност: у свима улазе као први множитељи поступне вредности помоћних корелата $\rho_{p.q}$, а као други — поступне вредности којеф-та $\varphi_{l.q}$ неодређеног решења корелата $к_l$ друге групе.

Ова слнчност даје могућност њиховог генералисања.

Ради тога уводимо помоћне корелате $\rho_{1.l}$ за другу групу, које изједначимо са јединицом:

(91) $$\rho_{1.l}=1$$

На којеф-те $\varphi_{l.q}$ ћемо гледати као на прирасте којеф-ата прве групе за корелату $к_l$. А пошто корелата $к_l$ уопште не улази у неодређено решење прве групе, то су њени којеф ти у неодређеном решењу те групе равни нули:

(91*) $$f_{l.1}=f_{l.2}= \dots =f_{l.n}=0$$

и онда је разумљиво да су прирасти тих којеф-ата при прикључку нормалне једначине друге групе (85) ка првој групи једнаки са којеф-тима неодређеног решења корелате $к_l$:

(91**) $$\Delta f_{l.1}=\varphi_{l.1};\ \Delta f_{l.2}=\varphi_{l.2};\ \Delta f_{l.n}=\varphi_{l.n};\ \Delta f_{l.l}=\varphi_{l.l}$$

Под овим условима обрасци (89*), (90) и (89**) и (90*) добијају општи облик:

(92)... $$\Delta f_{p\,q}=\rho_{1.p}\ \varphi_{l.p},$$

(92*) $$\Sigma\Delta f_{p.q}=\varphi_{l.p}\ \Sigma\rho_{1.q}$$

где p и q могу добити све вредности реда:

$$1, 2, \dots n_l$$

За рачунање по овим формулама важе формулари бр. 3 и бр. 4 који су наведени у примеру одељка VIII на стр. 255—260.

При поступном прикључењу неколико нових једначина додаје се ка првој групи у формулару бр. 4 у једначинама прве групе толико редова, колико ће се прикључити нових нормалних једначина и за сваку једначину која ће се прикључити додаје се одговарајуће место у доњем делу формулара.

Конкретно објашњење целокупног рачунског поступка се налази у наредном одељку.

V... *Пример за неодређено решење у више група.*

Ради што већег истицања карактеристичних особина начина који је у питању, узет је најпростији пример, где их не бацају у засенак сложене рачунске радње. Систем нормалних једначина који подлежи неодређеном решењу у више група прикључењем ка првој групи поступно појединачних нових једначина односи се на угловне услове делимичног звезданог система који је представљен на сл. 9а (стр. 309).

Нумерисање нормалних једначина одговара бројевима троуглова.

Прву групу сачињавају једначине бр. I—V за троуглове основног централног система; једначине бр. VI и VIII двају прикључених троуглова одређене су за поступно прикључење ка првој групи. Ове две једначине у таблици су одвојене од осталих дебелом

таблица нормалних једначина

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_8	w.
I...	−6	−2	.	.	−2	−2	.	w_1
II...	−2	+6	−2	.	.	.	.	w_2
III...	.	−2	+6	−2	.	.	−2	w_3
IV ..	.	.	−2	+6	−2	.	.	w_4
V...	−2	.	.	−2	+6	.	.	w_5
VI...	−2	.	.	.	.	+6	.	w_6
VIII...	.	.	−2	.	.	.	+6	w_8

цртом. Пошто је главни задатак примера рачунање којеф-ата неодређеног система, то у таблици нису наведене вредности отступања (слободних чланова) једначина.

Неодређено решење за прву групу од пет једначина, које су уоквирене дуплом цртом, извађено је из таблица и његови којеф-ти $f_{p.q}$ су уписати у формулар бр. 4 за неодређено решење у редовима означеним са k'_n.

Формулар бр. 4.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_8	s	p.
k'_1...	−22727	− 9091	− 4545	− 4545	− 9091	.	.	−49999	.
$\Delta\varphi_{1\,6}$—	− 4059	− 1623	− 812	− 812	− 1623	− 8929	.	−17858	−17858
$\Delta\varphi_{1\cdot 8}$	− 226	− 397	− 965	− 390	− 205	− 75	− 2107	− 4365	− 4364
k_1...	−27012	−11111	− 6322	− 5747	−10919	− 9004	− 2107	−72222	−72222
k_2'...	− 9091	−22727	− 9091	− 4545	− 4545	.	.	−49999	.
$\Delta\varphi_{2\cdot 6}$...	− 1623	− 649	− 325	− 325	− 649	− 3571	.	− 7142	− 7142
$\Delta\varphi_{2\cdot 8}$...	− 397	− 698	− 1694	− 685	− 361	− 132	− 3704	− 7671	− 7673
k_2...	−11111	−24074	−11110	− 5555	− 5555	− 3703	− 3704	−64812	−64812
k_3'...	− 4545	− 9091	−22727	− 9091	− 4545	.	.	−49999	.
$\Delta\varphi_{3\,6}$...	− 812	− 325	− 162	− 162	− 325	− 1786	.	− 3572	− 3572
$\Delta\varphi_{3\cdot 8}$...	− 965	− 1696	− 4118	− 1666	− 877	− 322	− 9004	−18648	−18651
k_3...	− 6322	−11112	−27007	−10919	− 5747	− 2108	− 9004	−72219	−72219

(види продужење форм. бр. 4 на следећој страни)

(продуж. форм. бр. 4)

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_8	S	p.
k_4'...	— 4545	— 4545	— 9091	—22727	— 9091	.	.	—49999	.
$\Delta\varphi_{4\cdot6}$..	— 812	— 325	— 162	— 162	— 325	— 1786	.	— 3572	— 3572
$\Delta\varphi_{4\,8}$...	— 390	— 685	— 1666	— 674	— 355	— 130	— 3640	— 7540	— 7540
k_4—	— 5747	— 5555	—10919	—23563	— 9771	— 1916	— 3640	—61111	—61111
k'_5...	— 9091	— 4545	— 4545	— 9091	—22727	.	.	—49999	.
$\Delta\varphi_{5\cdot6}$...	— 1623	— 649	— 325	— 325	— 649	— 3571	.	— 7142	— 7142
$\Delta\varphi_{5\cdot8}$...	— 205	— 361	— 877	— 355	— 187	— 68	— 1916	— 3969	— 3969
k_5 ..	—10919	— 5555	— 5747	— 9771	—23563	— 3639	— 1916	—61110	—61110
k'_6...	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\Delta\varphi_{6\,2}$...	— 8929	— 3571	— 1786	— 1786	— 3571	— 19643	.	—39286	—39286
$\Delta\varphi_{6\,8}$...	— 75	— 132	— 322	— 130	— 68	— 25	— 703	— 1455	— 1456
k_6 ..	— 9004	— 3703	— 2108	— 1916	— 3639	—19668	— 703	—40741	—40741
k'_8 ..	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\Delta\varphi_{8\cdot6}$...	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\Delta\varphi_{8\,8}$...	— 2107	— 3704	— 9004	— 3640	— 1916	— 703	—19668	—40742	—40741
k_8...	— 2107	— 3704	— 9004	— 3640	— 1916	— 703	—19667	—40742	—40742

Тако за корелату κ'_3 у реду са том ознаком имамо:

(а)... $\kappa_3' = -0,\ 06322w_1 - 0,\ 11112w_2 - 0,\ 27007w_3 - 0,\ 1091w_4 - 0,\ 05747w_5$

Вредности уписате у формулар изражене су у јединицама 5-ог децимала.

Пошто се прикључују само две нове једначине VI и VIII испод сваког неодређеног решења остављено је по два реда у које се унашају промене којеф-ата $\Delta\varphi_{p.6}$ и $\Delta\varphi_{p.8}$ од прикључка ка првој групи једначина VI и VIII.

Четврти ред за сваку корелату је одређен за њено опште неодређено решење; ови редови издвојени су од осталих линијама.

За корелате κ_6 и κ_8 задржано је ради хомогености формулара исти број редова. Али пошто оне не улазе у неодређено решење прве групе, то су којеф-ти овог решења равни нулама и означени у форм. тачкама.

Њихове промене којеф-та са квадратичким индексима нису ништа друго но којеф-ти $\varphi_{p.q}$ неодређеног решења друге групе.

Прикључење нове једначине изазива њихову промену која се унаша у одговарајући ред.

На којеф-те сваке следеће јадначине, која се прикључује, којеф-ти претходних једначина, пошто све ове једначине спадају у тај моменат у прву групу, не утичу и редови за одговарајуће им промене су празни и попуњени тачкама.

У делу формулара који је намењен за рачунање неодређеног решења последње корелате попуњен је само један ред.

Ступци су означени оним слободним члановима w_n чији се којеф-ти неодређеног решења у њему рачунају.

Два последња ступца означена са s и p су контролна: први за вредности збира којеф-ата одговарајућег реда и други — за вредности производа који контролишу збирове.

Рачунање се почиње са прикључењем ка почетној групи прве једначине бр. VI коју сматрамо за другу групу.

Зато треба израчунати пре свега вредност помоћних корелата по обрасцу (87). Пошто се прикључује само једна једина једначина то и група помоћних корелата, бројем 5. постоји само једна.

У нашем примеру у једначину VI улази само једна корелата, и то $к_1$, из прве групе. Зато помоћне корелате према обрасцу (87) добијају се само једним производом којеф-та (—2) при $к_1$ у једначини VI, односно, при $к_8$ у једначини I, на којеф-те неодређеног решења корелата $к_1$ у првој групи, дакле на вредности уписате у ред $к_1'$ (или у стубац w_1 — због симетрије) формулара бр. 4.

Наравно да је овакав случај доста редак и, обично, у једначину за прикључење улазе неколико корелата прве групе; онда њихови којеф-ти се множе на вредности којеф-ата неодређеног решења одговарајуће корелате прве групе и вредности помоћних корелата одређује збир чланова обрасца (87), како смо изнели у примеру из дела 4^0 на стр. 257 (форм. бр. 3).

У нашем случају форм. бр. 3 за помоћне корелате за једначину VI се своди на један стубац. У њега се унаша и вредност помоћне корелате $\rho_{6\cdot 6}$, која одговара самој једначини VI. Даби и у овом случају збир одговарао производу $\alpha_{6\cdot 1}[f_1.p]$ његовој вредности додаје се јединица.

форм. бр. 3.

$\alpha_{6\cdot 1}=-2$

$\rho_{6\cdot 1}=$	+ 45454
$\rho_{6\cdot 2}=$	+ 18182
$\rho_{6\cdot 3}=$	+ 9090
$\rho_{6\cdot 4}=$	+ 9090
$\rho_{6\cdot 5}=$	+ 18182
$\rho_{6\cdot 6}=$	+ 1.00000
Σ_6	+ 1.99998
Π_6+1	+ 1.99998

За наш случај имамо:

(б)... $\rho_{6\cdot 1}=(-2).(-0,22727)=+0,45454$
$\rho_{6\cdot 2}=(-2).(-0,09091)=+0,18182$

и т.д.

Даље:

$$\Sigma=+0,45454+0,18182+\ldots$$
$$\ldots+1,00000=+1,99998$$
$$\Pi+1=(-2)(-0,49999)+1=+1,99998.$$

За трансформирање којеф-ата једначине VI, чији се број своди на један, довољне су вредности само једне помоћне корелате, која одговара $к_1'$, и то $\rho_{6\cdot 1}$. Имамо:

(в)... $A_{6\cdot 6}=+6+(+0,45454)(-2)=$
$=6-0,90908=+5,09092$

Помоћу обрасца (89) добијамо којеф-т неодређеног решења $\varphi_{6\cdot 6}$ за корелату $к_6$:

(г)... $$A_{6\cdot 6}=-\frac{1}{+5,09092}=-0,19643.$$

Ову вредност уписујемо у форм. бр. 4 у ред $\Delta\varphi_{6\cdot 6}$ и стубац w_6.

Множењем овог којеф-та на помоћне корелате налазимо остале којеф-те реда $\Delta\varphi_{6\cdot 6}$, а за контролу рачунамо и производ $\varphi_{6\cdot 6}$ на збир $\Sigma'_{6\cdot 1}$ који се унаша у стубац p реда $\Delta\varphi_{6\cdot 6}$ (образ. (89*)).

Збир нађених вредности производа који се може разликовати од вредности производа само у границама тачности заокруживања резултата стављa се у стубац s.

За једначину VI имамо:

$$(д)\ldots \quad \begin{aligned} p_6 &= (-0,19643)(+1.99998) = -0,39286 \\ s_6 &= -0,08929-0,03571-\ldots-0,19643 = -0,39286. \end{aligned}$$

Вредности реда $\Delta\varphi_{6\cdot 6}$ служе за рачунање промена којеф-ата неодређеног решења прве групе према обрасцима (90). Резултати се унашају у одговарајуће редове форм. бр. 4.

Тако за ред $\Delta\varphi_{4\cdot 6}$ имамо:

$$\Delta f_{4\cdot 1} = (-0,01786)(+0,45454) = -0,00812$$
$$\Delta f_{4\cdot 2} = (-0,01786)(+0,18182) = -0,00315 \text{ и т.д.}$$

$$(ђ)\ldots \quad \begin{aligned} p_4 &= (-0,01786)(+1,99998) = -0,03572 \\ s_4 &= -0,00812-0,00315-\ldots-0,01786 = -0,03572. \end{aligned}$$

Да би контролни производ p_q био независан од рачунања производа $\Delta f_{p.q}$ неопходно је потребно променити на машини постављени множитељ (—0,01786) на збир помоћних корелата (+1,99998). Промена множитеља при рачунању контролних производа је један од основних услова кога се треба стриктно придржавати при неодређеном решењу.

Попунивши све редове који одговарају променама којеф-ата $\Delta\varphi_{p\cdot 6}$ од прикључка једначине VI, опште неодређено решење проширене прве групе ће се наћи сабирањем редова к'р и $\Delta\varphi_{p\cdot 6}$. Којеф-ти овог неодређеног решења потребни су за рачунање следеће групе помоћних корелата при прикључењу следеће једначине VIII. Али пошто ова потреба се ограничава на којеф-те неодређеног решења само оних корелата прве групе, које улазе у једначину за прикључење, то се рачунање ограничава само на ове којеф-те.

Рачунање се изводи ван формулара бр. 4.

У нашем случају од корелата прве групе, у коју спада сада и једначина VI, у једначину VIII улазе само корелата $к_3$. Сабирањем редова вредности $к'_3$ и $\Delta\varphi_{3\cdot 6}$ добијемо вредност њеног неодређеног решења, који уписујемо у засебан форм. бр. 5.

форм. бр. 5

(и)...

	$w_{3\cdot 6}$
$f_{1\cdot 3}\cdots$	— 5357
$f_{2\cdot 3}\cdots$	— 9416
$f_{3\cdot 3}\cdots$	— 22889
$f_{3\cdot 4}\cdots$	— 9253
$f_{3\cdot 5}\cdots$	— 4870
$f_{3\cdot 6}\cdots$	— 1786
Σ...	— 53571
S...	— 53571

Ради контроле сабирамо вредности збира и његове промене у ступцу s.

На такав начин имамо за форм. бр. 5:

$$f_{1\cdot 3} = -0.04545-0,00812 = -0,05357$$
$$f_{2\cdot 3} = -0,09091-0,00325 = -0,09416$$
и тд.

(ј)...

$$s = -0,49999-0,03572 = -0,53571$$
$$\Sigma = -0,05357-0,09416-\ldots$$
$$\ldots-0,01786 = -0,53571.$$

Вредност s и Σ морају да буду идентичне.

Прикључак једначине VIII се изводи на сличан начин.

Помоћне корелате, чији број се повећава за јединицу, рачунају се помоћу којеф-та $\alpha_{8\cdot3}=-2$ и вредности којеф-ата у форм. бр. 5 (и), у форм. бр. 3.

форм. бр. 3.

$\alpha_{8\,3}=-2.$

(ж) ..

$\rho_{8\,1}\cdots$	+ 10714
$\rho_{8\,2}\cdots$	+ 28832
$\rho_{8\,3}\cdots$	+ 45778
$\rho_{8\cdot4}\cdots$	+ 18506
$\rho_{8\,5}\cdots$	+ 9740
$\rho_{8\,6}\cdots$	+ 3572
$\rho_{8\cdot8}\cdots$	+ 1.00000
Σ...	+ 2.07142
П+1...	+ 2.07142

Трансформирање којеф-та $\alpha_{8\cdot8}$ и рачунање којеф-та $\varphi_{8\,8}$ изводи се на начин описат горе.

(з)... $A_{8\cdot8}=+6+(+0{,}45778)(-2)=+5{,}08444$

$\varphi_{8\cdot8}=-1:A_{8\,8}=-0{,}19668.$

И даље рачунање и попунавање форм. бр. 4 остаје идентично са претходним.

Кад се прикључи на горе наведен начин последња једначина из оптшег система, збирови којеф-ата неодређеног решења почетне групе и одговарајућих промена дају којеф-те општег неодређеног решења који се уписују у редове означене $к_m$ и одвојени су цртама од осталог дела формулара.

Пошто су при прикључењу само једне једначине промене симетричних којеф-ата идентичне у границама заокруживања резултата, то се ради штедње рада ограничавају рачунањем и попуњавањем само једне половине форм. бр. 4 с леве или десне стране од квадратичних којеф-ата уоквирених дебљим линијама.

Кад неодређено решење обухвата систем са бројем једначина већим од 10 рачунање у форм. бр. 4 на описани начнн се ограничава на прикључак не више од 10 једначина, после чега се добивено неодређено решење такве групе преписује у празан формулар бр. 4, где се рачунање продужује.

На овоме завршавам свој овогодишњи чланак.

RÉSUMÉ

Son étude de cette année l'auteur achève par l'eclaircissement l'idée de la résolution indéterminée en pleusieurs groupes du système des équations normales.

La résolution indéterminée en deux groupes se base sur la transformations des du deuxième groupe au système indépendant au moyen des coefficients de la résolution indéterminée du premier, qui amène à la résolution indéterminée du système commun. Cette résolution laisse transformer le nouvel groupe des éqvations normales, lequel on peut regarder comme le deuxiéme par rapport du groupe initial. Et ainsi de suite.

Cette méthode permet de partager le système commun des équations normales en pleusieurs groupes et les joindre successivement au groupe initial. On peut la nommer, d'après *J. Kržovak*, „méthode d'adjonction". *H. Boltz* emploit pour elle le nom, — „méthode de developpement" — „Entwickelungs-Verfahren."

L'autre mode de le résolution indéterminée en pleusieurs groupes consisle dans la division du système initial des équations aux groupes indépendants l'un de l'autre; dans leur résolution indéterminée isolément des autres et dans la liaison des résultats obienus au système commun au moyen des équations restées à part. L'auteur le nomme „méthode de liaison".

L'idée de cette méthode le premier fois a donné *J. Kržovak*. *H. Boltz* a compléte la méthode de développement par le procédé semblable pour la lialson des

trois groupes indépendants au système d'ensemble; il a le nommè „méthode du substitution" — „Sulbstitutions-Verfahren".

Pour que la méthode de la résoiution indéterminée en plusieurs groupes puisse entrer solidement dans la pratique il est nécessaire d'établir préalablement tous les détails de la techique du calcul et de resoudre les questions posé par eile.

Ces questios sont suivantes:

1)... quelles des équations du système commun sont les plus convenables pour la formation du premier groupe (groupe initial)?

2)... quel est le nombre des équations dans les groupes à joindre le plus piatique pour les opérations de calcul?

3)... avec laquelle précision il faut opérer dans les différants cas de l'application des méthodes mentionnée?

4)... peut-on et comment combiner tout les deux méthodes?

5)... quel est le système du contrôle continu et effectif au cours du calcul?

Sur quelques de ces quéstions on peut trouver les reponses dans les travaux de J. Kržovak et de H. Boltz. Mais il n'a pas encore élaboré et établit un procédé détaillé et bien ordonné dans tous les parties correspondant aux différents cas de l'application des méthodes,.

A la fin de son étude l'auteur expose le mode de l'adjonction consécutive, une par une, au graupe initial des équations tous les autres qui sont restées hors de cette groupe. L'auteur tient cette forme de la réaiisation de la méthode d'adjonction comme la plus pratique, car le procédé correspodant de calcul est le plus simple que possible et admit le contrôle continu et total des résultats obtenu dans chaque stade du calcul. Le tableau de calcul présente dans ce cas la même simplicité et homogénéité.

Tous ces propriétés sont eclaircies par un exemple numérique.

Василије Живковић
геометар

ДОЗВОЉЕНА ОТСТУПАЊА ПРИ РАЧУНАЊУ ПОВРШИНА

У предпрошлом броју нашег гласника изнео сам главне разлоге због којих формула $\pm\sqrt{P}$ за дозвољена отступања при рачунању површина, не одговара нашим условима; и да би боље одговарала формула $\pm\sqrt{P}\pm m\sqrt{n}$ и то за случај, ако би површине биле рачунате једанпут. Али пошто се површине рачунају два пута, то поправка услед броја парцела и податка планиметра треба да гласи: $\pm m\sqrt{\frac{n}{2}}$; где је m податак планиметра, а n разлика у броју парцела и хектара. Међутим ова формула је приближна, јер базира на претпоставци да је при истом броју парцела и хектара пређашња формула тачна. Без те претпоставке она нема свог теориског образложења. С тога ћу још једанпут изнети и образложити све утицаје који утичу на величину грешке рачунања. Прво највише утиче величина површине, јер је ту ход планиметра најдужи, а и вучење игле по линији најдуже. Ако се искористи досадашње искуство при рачунању, и из огромног броја разлика између првог и другог обилажења, срачуна средња грешка, видеће се да она приближно износи $\pm{}^{1}/_{3}\sqrt{P}$. Максимална дакле $\pm\sqrt{P}$. На први поглед изгледала би ранија формула тачна, она то и јесте, али само за случај када се рачуна једна једина парцела; и то једанпут. Ради лакшег писања узимаћемо у обзир само максималне грешке. Дакле, максимална грешка једне једанпут рачунате