trois groupes indépendants au système d'ensemble; il a le nommè „méthode du substitution" — „Sulbstitutions-Verfahren".

Pour que la méthode de la résoiution indéterminée en plusieurs groupes puisse entrer solidement dans la pratique il est nécessaire d'établir préalablement tous les détails de la techique du calcul et de resoudre les questions posé par eile.

Ces questios sont suivantes:

1)... quelles des équations du système commun sont les plus convenables pour la formation du premier groupe (groupe initial)?

2)... quel est le nombre des équations dans les groupes à joindre le plus piatique pour les opérations de calcul?

3)... avec laquelle précision il faut opérer dans les différants cas de l'application des méthodes mentionnée?

4)... peut-on et comment combiner tout les deux méthodes?

5)... quel est le système du contrôle continu et effectif au cours du calcul?

Sur quelques de ces quéstions on peut trouver les reponses dans les travaux de J. Kržovak et de H. Boltz. Mais il n'a pas encore élaboré et étabiit un procédé détaillé et bien ordonné dans tous les partics correspondant aux différents cas de l'application des méthodes,.

A la fin de son étude l'auteur expose le mode de l'adjonction consécutive, une par une, au graupe initial des équations tous les autres qui sont restées hors de cette groupe. L'auteur tient cette forme de la réaiisation de la méthode d'adjonction comme la plus pratique, car le procédé correspodant de calcul est le plus simple que possible et admit le contrôle continu et total des résultats obtenu dans chaque stade du calcul. Le tableau de calcul présente dans ce cas la même simplicité et homogénéité.

Tous ces propriétés sont eclaircies par un exemple numérique.

Василије Живковић
геометар

ДОЗВОЉЕНА ОТСТУПАЊА ПРИ РАЧУНАЊУ ПОВРШИНА

У предпрошлом броју нашег гласника изнео сам главне разлоге због којих формула $\pm\sqrt{P}$ за дозвољена отступања при рачунању површина, не одговара нашим условима; и да би боље одговарала формула $\pm\sqrt{P}\pm m\sqrt{n}$ и то за случај, ако би површине биле рачунате једанпут. Али пошто се површине рачунају два пута, то поправка услед броја парцела и податка планиметра треба да гласи: $\pm m\sqrt{\frac{n}{2}}$; где је m податак планиметра, а n разлика у броју парцела и хектара. Међутим ова формула је приближна, јер базира на претпоставци да је при истом броју парцела и хектара пређашња формула тачна. Без те претпоставке она нема свог теориског образложења. С тога ћу још једанпут изнети и образложити све утицаје који утичу на величину грешке рачунања. Прво највише утиче величина површине, јер је ту ход планиметра најдужи, а и вучење игле по линији најдуже. Ако се искористи досадашње искуство при рачунању, и из огромног броја разлика између првог и другог обилажења, срачуна средња грешка, видеће се да она приближно износи $\pm{}^1/_3\sqrt{P}$. Максимална дакле $\pm\sqrt{P}$. На први поглед изгледала би ранија формула тачна, она то и јесте, али само за случај када се рачуна једна једина парцела; и то једанпут. Ради лакшег писања узимаћемо у обзир само максималне грешке. Дакле, максимална грешка једне једанпут рачунате површине, јесте $\pm\sqrt{P}$. Друга потпуно независна грешка и то не систематска већ такође случајна, а независна од величине парцеле, јесте очитавање податка планиметра. Не мислим овде, да ћу ако се цртице буду потпуно поклапале прочитати погрешно планиметар за један податак, већ има непоклапања која се морају заокружити, и она се јављају као потпуно независна грешка. Каже се, да се то може отклонити већим бројем обилажења, и очитавања, али то није тачно. Претпоставимо да имамо угломерни инструменат са податком од једног степена, ма колико пута ми мерили и читали један угао, он никад не може бити тачан рецимо у секундима, јер је тачност визирања већа од тачности очитавања. Средња грешка овог заокруживања и читања иа планиметру и то при почетку и при завршетку заједно износи, отприлике, $^1/_3$ податка, а максимална један податак. Према томе целокупна максимална грешка једне једанпут рачунате површине јесте $\pm[\sqrt{P}\pm m]$. Но, пошто се површине рачунају два пута, то ће грешка једне парцеле бити као грешка аритметичке средине: $M=\pm\frac{\sqrt{P_1}\pm m}{\sqrt{2}}$. Грешка друге парцеле биће $\pm\frac{\sqrt{P_2}\pm m}{\sqrt{2}}$ и т. д.

Максимална грешка збира свих једнака је квадратном корену из збира квадрата максималних грешака појединих парцела.

$$\text{Дакле:}\quad M=\pm\sqrt{\left(\frac{\sqrt{P_1}\pm m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{P_2}\pm m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{Pm}\pm m}{\sqrt{2}}\right)^2}=$$

$$=\pm\sqrt{\frac{P_1\pm 2m\sqrt{P_1}+m^2+P_2\pm 2m\sqrt{P_2}+m^2+\dots Pn\pm 2m\sqrt{Pn}+m^2}{2}}=$$

$$=\pm\sqrt{\frac{[P]\pm 2m\,[\sqrt{P}]+[m^2]}{2}}\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad 1).$$

Ово би била математички тачна формула за сваки поједини случај. Међутим за практично рачунање ова је формула компликована и не дозвољава израду таблица дозвољених отступања. Треба дакле доћи до неке практичне формуле. Ако посматрамо горњу формулу, при одређеној количини n, [P] увек је иста, $[m^2]$ такође, мења се само израз $\pm(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\dots\sqrt{Pn})$. Имајући у виду да за дозвољено отступање морамо узети најнеповољнији случај, не остаје ништа друго, него диференцирањем наћи максимум ове функције, везане за услов да је збир независних променљивих константан. Из истог разлога, уместо знака $\pm$ треба узети знак $+$ у изразу пред кореном.

Дакле, постављени проблем се може формулисати овако:

Под којим условима одређена површино *к* плана, подељена n парцелама са непознатим површинама P_1, P_2, ... P_n при рачунању ових површина помоћу поларног планиметра даје максималну вредност функције:

$$(2)\ \dots\ \varphi=\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\dots+\sqrt{Pn}$$

под условом да

(3) ... $P_1 + P_2 + \dots + P_n = к.$

Релативни екстремум функције φ, сматрајући P_1, P_2, ... P_n за независне променљиве, како је познато, одговара оним вредностима променљивих (променљиве ради упрошћавања математичких трансформација, означимо са $P_1 = x_1^2$, $P_2 = x_2^2$,... $P_n = x_n^2$, које претварају вредности делимичних извода функције φ у нулу и уз то задовољавају услов (3).

Овом дуплом услову одговарају вредности непознатих, које редуцирају на нулу вредности делимичних извода сложене функције:

(4) ... $$\Phi = \varphi + \lambda\,(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - к)$$

и где према новој ознаци променљивих, —

(4*) ... $$\varphi = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

и где је λ неодређени константни којеф-т.

Диференцирањем ф-ије (4) нађемо:

$$\frac{\delta\Phi}{\delta x_1} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_1} + 2\lambda x_1 = 1 + 2\lambda x_1 = 0,$$

(5) .. $$\frac{\delta\Phi}{\delta x_2} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_2} + 2\lambda x_2 = 1 + 2\lambda x_2 = 0,$$

$$\frac{\delta\Phi}{\delta x_n} = \frac{\delta\varphi}{\sigma x_n} + 2\lambda x_n = 1 + 2\lambda x_n = 0,$$

одакле:

(5*)... $$x_1 = x_2 = \dots = x_n = -\frac{1}{2\lambda}$$

а пошто су x_1, x_2, ... x_n позитивне, онда којеф-т λ мора да буде негативан:

(6) ... $$\lambda < 0$$

и екстремна вредност φ је једнака:

(7) ... $$\varphi = -\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda} - \dots - \frac{1}{2\lambda} = -\frac{n}{2}\lambda.$$

Да би одредили праву вредност којеф-та λ заменићемо у једначини (3) непознате P_1, P_2, ... P_n њиховим изразима из (5*) и добијамо:

(8) ... $$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \dots + \frac{1}{4\lambda^2} = к,$$

или

(8*) ... $$\frac{n}{4\lambda^2} = к,$$

одакле

(9) ... $\lambda = ... \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{k}}$

Онда из (5*) и (7) налазимо:

(10) ... $\sqrt{P_1} = \sqrt{P_2} = \dots = \sqrt{P_n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ или $P_1 = P_2 = \dots = P_n \frac{k}{n}$.

(10*)... $\varphi = \frac{n}{4}\sqrt{\frac{n}{k}}$

Да би се сазнало којој од екстремних вредности одговара величина (7), односно (10*) тражимо делимичне изводе другог реда ф ије (4):

(11)... $\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x_1^2} = 2\lambda = \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x_2^2} = \dots = \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x_n^2}$,

одакле се види да су сви ови изводи негативни на основу неједнакости (6).

Из овога следи да сваки од сабирика ф-ије (2) под одговарајућим уоловима из (5) добива максималну вредност; онда и вредност φ биће максимална.

Дакле, —

(12) ... $\varphi_{max} = n \sqrt{P}$,

где

(12*)... $P = P_1 = P_2 = \dots = P_n$.

Ако би ово применили на формулу под 1, добили би

$M = \pm \sqrt{\frac{P.n + 2mn\sqrt{P} + m^2 n}{2}}$ ако $\frac{n}{2}$ извучемо ван корена

добићемо: $M = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{\sqrt{P^2} + 2m\sqrt{P} + m^2} = \sqrt{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{P} + m\right)$ ако

помножимо поново, добићемо: $\sqrt{\frac{Pn}{2}} + m\sqrt{\frac{n}{2}}$ Ако n.P. узмемо као

површину за коју тражимо дозвољено отступање, то ће дефинитивна формула гласити $\boxed{\Delta = \sqrt{\frac{P}{2}} + m\sqrt{\frac{n}{2}}}$ где је P. збир свих парцела, m додатак планиметра а n број рачунатих парцела. Ако би сада користећи ову формулу срачунали дозвољено оступање за ма који једнак број парцела и хектара видели би да се оно скоро потпуно слаже са старим дозвољеним отступањем. Например:

ha	парц.	Δ пре	Δ сада
1	1	1,00	0,99
10	10	3,16	3,14
100	100	10,00	9,90
337	337	18,40	18,20

Види се дакле да формула $\sqrt{P}$ одговара стању, када је број хектара једнак броју парцела. И то за планиметар са податком од 40 м. То истовремено доказује, да за све друге услове она не може остати. Ради предгледности изнећемо стара и нова отступања за ивични квадрат, затим отступање за пун лист са 25 група, а најзад за неке честе случајеве у пракси. При овоме треба сматрати да је податак поларног планиметра 40 м., кончаног 20 м., а грешка рачунања са размерником 0,20 пута основица што отприлике износи од 0 до 5 м. за површине од 0 до 100 мет. квадратних.

ha	ара	m²	m	n	Δ пре	Δ сада
0	00	10	1	1	3	3
0	01	00	5	1	10	10
0	10	00	20	1	32	36
1	00	00	40	1	100	99
6	25	00	40	2	250	217
337	50	00	40	25	1840	1440
32	00	00	40	1	567	428
32	00	00	40	32	567	560
2	00	00	20	100	141	241
10	00	00	40	100	316	506

Пошто смо са рачунање ових дозвољених отступања, пошли са претпоставком да је средња грешка обилажење једне парцеле једнака $\pm 1/4 \sqrt{P} \pm 1/3$ m, то треба видети колико се смеју разликовати 2 добијена податка за исту парцелу да би могли добити задовољавајуће резултате. Из рачуна изравнања знамо да је највеће дозвољено отступање при парним мерењима исте тачности, четворострука средња грешка. Према томе добро смо рачунали парцеле ако се оне слажу од 0 до 10 ари за један податак, од 0 до 80 ари за два податка, од 80 до 1ha 50 за три податка, од 1ha 50 до 2ha 20 четири податка, од 2ha 20 до 4ha за пет податка, при којој граници треба стати из разлога, што би се пажљивијим радом могли постићи много бољи резултати. Ево једног од разлога због којих се наше површине неки пут не слажу, јер ми без обзира на величину парцеле дозвољавамо три податка разлике.

Остаје још да се одреди формула за дозвољено отступање при упоређењу двеју изравнатих површина. То се код нас јавља при упоређењу ивичних квадрата јер се по последњем наређењу Одељења и један и други ивични квадрат морају изравнати. Пошто су површине делова „са“ и „без“ изравнате оне се у геодезији сматрају као тачне. Према томе отступање између тих површина требало би бити 0. Никако ми није јасно како су надлежни то изгубили из вида, када је на томе месту Правилник то тачно прописао: „Прво лице рачуна и „са“ и „без“ по два пута и изравна; а друго лице само своје „са“ два пута и ако је разлика између првога „без“ и другога „са“ у границама дозвољенога отступања, преузима прво рачунање“. Потпуно исправно јер се упоређује једна неизравната површина са изравнатом. Но како се је то због честих неслагања чинило хрђаво, Одељење је наредило да се и други ивични квадрат изравнава оставивши при томе исто дозвољено отступање. Међутим при упоређивању квадрата опет је било случајева да се не могу сложити, нарочито ако је у питању граница између два среза. Постоје дакле други узроци који се не јављају при обичном рачунању површина, а то су: 1. грешка у наношењу и екцентричном извлачењу десиметарске мреже. Нарочито извлачење линије са оловком; 2. различити услови рачунања, друго лице, планиметар, хартија ит.д. 3. грешке у наношењу полигоних тачака, као и грешке картирања које се не могу открити упоређењем границе помоћу провидне хартије. Све ове грешке су неминовне и не могу се ни у ком случају елиминисати. С тога се мора изричито наредити да се при наношењу десиметарске мреже и граничних полигоних тачака обрати трострука пажња. Ипак ће остати грешка у ректификацији поларног нланиметра која ће се кретати око $\pm$ 10 см. плус грешка великог координатографа $\pm$ 5 см., значи да свако дозвољено отступање треба проширити за 0,15 м. пута дужина граничне линије. Треба се дакле придржавати следећег: *Прво* лице рачуна два пута „са“ и два пута „без“ и изравнава. *Друго* лице два пута само своју мању површниу дописујући $\pm$ утицај стезања; $\pm$ утицај наношења и картирања, па ако се ова површина снаже у границама новог дозвољеног отступања, предузима површину првог. Овако срачуната дозвољена отступања, отприлике су иста са ранијим, само су правилније распоређена. Например: за ивични квадрат чије „са“ износи 3 12 50 дозвољено отступање по ново написатој формули је: $1{,}53 + 250 \times 0{,}15 = 1{,}83$; раније 1,77.

Но ако би се желело да се и даље у оба квадрата рачуна и „без“ и изравнава, па тако изравната површина упоређује, то треба за то израдити нарочито дозвољена отступања.

Ако претпоставимо да смо ми при рачунању првог ивичног квадрата имали отступања Δ_1 а другога Δ_2, то ће тежина раздељених поправака, бити $\frac{1}{\Delta_1^2}$ и $\frac{1}{\Delta_2^2}$. То би исто важило у односу на свако „са“ и „без“. Нису дакле са истом тачношћу додељене поправке и једној и другој површини у оба квадрата, нити пак са подједнаком тачношћу за свако „са“ и „без“, већ код веће поправке могућност грешке је већа.

Према томе тежина овако изравнате површине, могла би се узети као $\frac{1}{\Delta^2}$ где је Δ отступање које смо нмали у првом и другом квадрату. Али пошто би ово различито отступање онемогућило уопштавање, то ћемо сматрати да је тежина сваког дела „са“ и „без“ $\frac{1}{\Delta^2}$; где је Δ дозвољено отступање за ту површину. Ово нам је потребно с тога што се при упоређењу изравнатих површина, оба дела једнако разликују јер су оба изравната на 6 25 00. Често се дешава да је за један део отступање дозвољено а за други није. Јавља се питање који је део од њих добар. Не може се оспорити да је тачније срачуната мала површина, али исто тако може се рећи добра је и мања површина, чим се слаже већа. Пошто веће површине нмају мању тежину, то ће и отступања између њих бити мање тежине и обрнуто отступања између мањих површина имаће већу тежину. Узимајући у обзир тежине најпрактије је узети аритметичку средину између оба дозвољена отступања.

Тако добијамо да је: $$\Delta = \frac{\Delta_1 \frac{1}{\Delta_1^2} + \Delta_2 \frac{1}{\Delta_2^2}}{\frac{1}{\Delta_1^2} + \frac{1}{\Delta_2^2}} = \frac{\Delta_1 \cdot \Delta_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}.$$

Но пошто су површине изравнате са неком средњом грешком то ће и ова отступања бити од ње зависна. Такође ће она бити зависна и од начина којим ċе наносе тачке и картира детаљ. С тога ову добијену формулу треба множити са једном Константом, која је за различите услове друкчија. За наше услове она је отприлике 0,80.

Дефинитивна формула према томе за упоређење изравнатих ивичних квадрата треба да гласи $\Delta = \frac{\Delta_1 \cdot \Delta_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} \cdot K$.

Где су Δ и ${}_1\Delta_2$ дозвољена отступања за „са“ и „без“ по формули $\sqrt{\frac{P}{2}} + m\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Прегледности ради срачунаћемо неколико отступања по ранијој формули $\sqrt{P}$ и по садашњој $\cdot \frac{\Delta_1 \Delta_2 (\Delta_1 + \Delta_2)}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} \cdot 0{,}80$

Хектара			Δ пре	Δ сада
0	00	10	3	5
0	10	00	33	33 и 47
0	50	00	71	75
1	00	00	100	94
2	00	00	143	116
3	12	50	177	122
4	25	00	206	116
5	25	00	230	94
6	24	90	250	9

(за податак 20 и 40).

Види се да су за мале површине дозвољена отступања већа од ранијих, док су за веће много мања. Пошто и мали и велики део „са" ивичног квадрата подједнако утичу на целокупну површину листа то је сасвим разумљиво да се и већи квадрати морају исто тако добро слагати.

Радовало би ме када би колеге током ове зиме упоређивале стара и нова отступања како би се испитала тачност ових претпоставки.

18-IX-1940
Куршумлија

Инж. Драгмио М. Бошковић.
асистент универзитета

ШВАЈЦАРСКИ ПРЕМЕР И ЊЕГОВ УТИЦАЈ НА ИЗРАДУ НОВИЈИХ ТАХИМЕТАРА

У свескама 5 и 6 из 1935 године у Гласнику је објављен чланак под насловом „Новије справе за оптичко мерење дужина и њихова примена у Геодезији". Овај, као и неколико наредних чланака, биће у ствари наставци тога чланка. У овим чланцима писац има намеру да опише детаљније извесне инструменте, којих се је већ у поменутом чланку само дотакао, а у исто време да се кратко позабави и другим, који нису били тамо споменути.

Још до пре три деценије, за сва снимања у главном је употребљавана ортогонална метода. Значке, пантљике и призме били су готово искључиви геометрови пратиоци на терену. То у утолико пре што детаљни радови чине највећи првценат свих теренских радова.

Прве кораке на увођењу справа за прецизније оптичко ме-