ГЕОМЕТАРСКИ И ГЕОДЕТСКИ ГЛАСНИК
Орган Удружења Геометара и Геодета Краљевине Југославије
БЕОГРАД, Браће Југовића 16/I

Професор **Лав Сопоцко**

РЕШЕЊЕ НОРМАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА У ВИШЕ ГРУПА

(НАСТАВАК*)

5[0]... Таблице за неодређено решење услова фигура

Примедба: ... У оригиналу чланка, штампаног у прошлом броју, при његовом препису се поткрала у формулама (66) грешка, наиме: у множитељима при слободним члановима, — w_1, w_2, w_3 први сабирак једнак *1* улази само у множитељ при слободним члановима, који одговарају трансформираним слободним члановима, дакле, за W_1 само у множитељ при w_1, за W_2 — при w_2, за W_3 — при w_3; у осталим множитељима 1 треба испустити, као што и у производима $f_{1 \cdot 2}$ W_2 и $f_{1 \cdot 3}$ W_3. Без тога небисмо могли добити наредне формуле — (67), (67*), (68) и т. д.

I ... Услов за практичну примену неодређеног решења у две групе. Како се могло видети из дела 4[0] чланка, трансформација друге групе нормалних једначина захтева обичне рачунске операције, од којих је најважнија неодређено решење система (54) трансформираних нормалних једначина прве групе, односно рачунање којеф-ата неодређеног решења (55).

F. R. Helmert каже (в. опаску 4, стр. 536) о способности Krüger'вог решења нормалних једначина у две групе да „његова практична прикладност је тим већа чим простије долазе до решења прве групе нормалних једначина".

Већ је Гаус обратио пажњу на угловне услове, којим одговарају нормалне једначине простог и једноставног облика и почео је стављати једначине фигура у почетном систему угловних, односно нормалних једначина испред осталих (фиксних, азимуталних, полусних и т. д.) при решењу по свом алгоритму.

У истом циљу упрошћавања решења прве групе *Krüger* (см. опаску 1 и 5) у њу групише услове фигура, и, чак, је дао неодређено решење прве групе у општем облику за простије системе тријангулационих мрежа.

Boltz је систематизирао идеје *Krüger'a* и дао формуле за неодређено решење условних односно, нормалних једначина фигура за просте ланце са неограниченим бројем троуглова, за венац троуглова и за нарочити његов случај централни систем, као и за неке комбинације ових система. Њихово неодређено опште

*) Види Геом. и Геод. Гласник, 1940, св. 3, стр. 177-194 св. 4, стр. 237-263.

решење *Boltz* је свео у таблице, из којих се ваде непосредно, без икаквих рачунских операција, којефицијенти решења (55).[6])

Проучавање својстава условних једначина фигура напредовало је сада толико, да се може рећи да је доведено до краја.

Ту треба споменути чеха J. Krżovak'a[7]) који је проширио неодређено решење на случај фигура са дијагоналама.

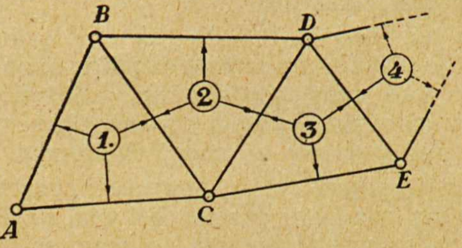
У својим чланцима у нашем часопису,[8]) писац овог чланка је узео у расматрање условне једначине свију врста угловних услова — фигура, азимута, фиксних углова и т. д. и изнео општа правила формирања њихових нормалних једначина.

II ... Својства којеф-ата нормалних једначина за угловне услове. — При изравнавању праваца, нормалне једначине за угловне услове имају којеф-те веома простог облика — они се увек изражавају целим бројевима, и то: квадратички којеф-ти су једнаки у условима фигура — дуплом броју њихових углова (за троугао увек је $+6$), у условима фиксних углова — $(+2)$; неквадратички коеф-ти могу имати само једну од ових величина (± 2) или (± 1).

Због једнаке сталне и позитивне величине квадратичких коеф-ата $(+6)$ — у случају троуглова, који увек заузимају у таблици нормалних једначина њему диагоналу, док су неквадратички коеф-ти, за услове фигура увек једнаке по величини (± 2), распоређени у таблици симетрично према квадратичким, при неодређеном решењу оваквих једначина коеф-ти у изразима корелата добијају нарочите особине, које су у многоме разјашњене проучавањима последњих година.

Ово проучавање се односи на карактеристичне типове тријангулационих мрежа, као што је прости ланац, централан систем, звездани систем и.т.д., идући све даље и даље ка сложенијим формама мреже.

За најпростији систем простог ланца (сл. 3.) при неограниченом броју троуглова имамо овакав систем корелатних једначина-



Сл. 3

[6]) ... *H. Boltz.* Entwickelungs-Verfahren zum Ausgleichung geodätischer Netze. Veröffent. des Preuss. Geodät Inst. Neue Folge, № 90, Berlin. 1923. §§ 3, 4, 5.

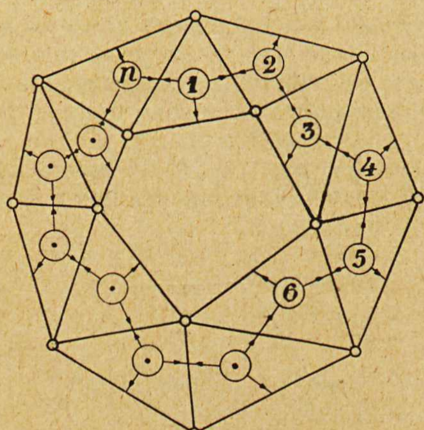
[7]) ... *Ing. J. Krżwak.* Rešeni normalnich rovnic pržipojowanim nebo spojovaném. Zpravi verženi služby technické. 1927, br. 10.

[8]) ... ***Проф. Л. Сопоцко.*** — Број независних условних једначина и њихов избор. Г. и Г. Гл., бр. 4. 1939, стр. 185-202.

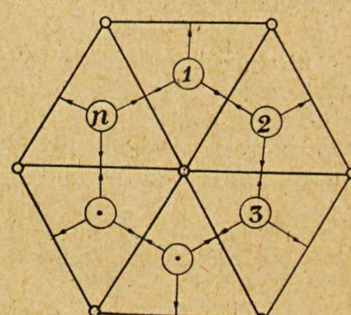
— . — . — Искоришћење шеме условних једначина при изравнавању тријангулационе мреже. Г. и Г. Гл. бр. 5-6, 1939, стр. 247-254.

$$
(74)\ \dots\quad
\begin{array}{lllll}
6k_1 - 2k_2 & . & . & . & \dots + w_1 = 0, \\
-2k_1 + 6k_2 - 2k_3 & . & . & & \dots + w_2 = 0, \\
. & -2k_2 + 6k_3 - 2k_4 & . & & \dots + w_3 = 0, \\
. & . & -2k_2 + 6k_4 - 2k_5 & & \dots + w_4 = 0, \\
. & . & . & . & \dots \quad . \quad .
\end{array}
$$

Венац (сл. 4), чији гранични случај претставља централни систем (сл. 5), није ништа друго, него затворени прости ланац. Његов систем корелатних једначина за n троуглова биће следећи:



Сл. 4



Сл. 5

$$
\begin{array}{lllllll}
 & 6k_1 - 2k_2 & . & . & . & . & - 2k_n + w_1 = 0, \\
 & -2k_1 + 6k_2 - 2k_3 & . & . & . & . & + w_2 = 0, \\
 & . \; -2k_2 + 6k_3 & . & . & . & . & + w_3 = 0, \\
(74^*)\ \dots & . \quad . \quad . & . & . & . & . & + \quad . \quad . \\
 & -2k_1 & . & . & . & . & - 2k_{n-1} + 6k_n + w_n = 0.
\end{array}
$$

Исти облик има систем једначина за централни систем. При компликованијој форми тријангулационе мреже систем корелатних једначина за услове фигура има сличан облик са том разликом да се у појединим једначинама појављују нови чланови вида ($\mp$ 2 km) симетрично расподељени према положају квадратичких чланова.

При сваком новом троуглу број једначина у системима повећава се за један.

Највећи број чланова у свакој једначини за мрежу без дијагонала не премаша четири. При мрежи са дијагоналама тај број може се повећати на дванајест.

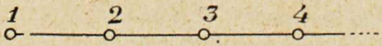
Како сам извео при употреби шеме условних једначина[9]) из ње се може директно написати систем корелатних једначина *за све врсте* угловних услова.

---

[9]) Види чланке, означене у опасци 8 а поред тога мој чланак „Искоришћавање шеме условних једначиаа при изравнавању трилангулационе мреже“ у бр. 5—6 Гласника за 1939 г., стр. 247-254.

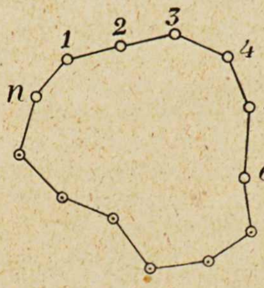
Формирање система корелатних једначина *само за услове фигура* може се извести по начину, предложеном од К. Friedrich'а[10]), графичком претставом нормалних једначина, која се састоји у следећем: квадратички којеф т сваке корелатне једначине означава се тачком у произволном координатном систему а сваки неквадратички — правом, која веже одговарајуће тачке квадратичких коеф-ата.

Тако бисмо за прост ланац (сл. 3) имали (сл. 6): за квадратички кнф-т корелатне једначине за услов првог троугла тачку (1); за услов другог троугла — тачку (2) и тако редом. Неквадратички коеф-ти због симетричности улазе увек у две једначине и спојени, такорећи, са два квадратична коеф-та. Тако једначина, за други услов фигуре има симетричне коефте у једначинама за услове први и трећи и зато тачка 2 се спаја правом са тачком 2 и 3 и т. д.

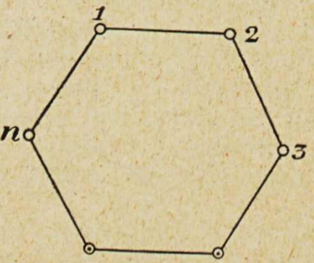


Сл. 6

За венац (сл. 4) и централни систем (сл. 5) графичка претстава система корелатних једначина за услове фигура без дијагонале претставила би се на слици 7, односно 8.



Сл. 7



Сл. 8

По графичкој слици нормалних једначина по систему Friedrich'а може се одредити и број једначина, које улазе у изравнавање и одговарају полусним условима: сваки затворени полигон одговара једном полусном услову.

Графичка претстава Friedrich'а веома је једноставна и прегледна, само не може изразити сложеније форме тријангулациове мреже и приказати унутрашњу везу елемената условних и нормалних једначина.

Предложен од мене систем шема условних једначина, који је уцртан за услове фигура на сликама 3—5, попуњава ову празнину, а ако се елиминишу стрелице и везне линије са елементима условних, односнв нормалних једначина, онда ће он бити сличан систему Friedrich'а.

III ... Својства којеф-ата неодређеног решења нормалних једначина. Ред Fibonacci (1175—1228 г. г.).

Непосредно неодређено решење система (74) и (74*) нормалних једначина, почињући од система с најмањим бројем корелата

---

[10]) *K. Freidrich* - Beitrage zur direkten und indirekten Auflösung der Normalgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der geodätischen Netzausgleichung. Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1930, Hefte 13, 15 u 19; b. стр. 525-528.

и поступно повећавајући њихов број у систему, доводи до следећих резултата (највећи број једначина у систему ограничавамо на пет и групишемо резултате по нумери корелате):

За систем (74).

За 1 троугао … $6\text{к}_1 = -1w_1$
„ 2 троугла … $16\text{к}_1 = -3w_1 - 1w_2$
(75а) … „ 3 „ … $42\text{к}_1 = -8w_1 - 3w_2 - 1w_3$
„ 4 „ … $110\text{к}_1 = -21w_1 - 8w_2 - 3w_3 - 1w_4$
„ 5 „ … $288\text{к}_1 = -55w_1 - 21w_2 - 8w_3 - 3w_4 - 1w_5$

За 2 троугла … $16\text{к}_2 = -1w_1 - 3w_2$
(75б) … „ 3 „ … $42\text{к}_2 = -3w_1 - 9w_2 - 3w_3$
„ 4 „ … $110\text{к}_2 = -8w_1 - 24w_2 - 9w_3 - 3w_4$
„ 5 „ … $288\text{к}_2 = -21w_1 - 63w_2 - 24w_3 - 9w_4 - 3w_5$

За 3 троугла … $42\text{к}_3 = -1w_1 - 3w_2 - 8w_3$
(75в) … „ 4 „ … $110\text{к}_3 = -3w_1 - 9w_2 - 24w_3 - 8w_4$
„ 5 „ … $288\text{к}_3 = -8w_1 - 24w_2 - 64w_3 - 24w_4 - 3w_5$

(75г) … За 4 троугла … $110\text{к}_4 = -1w_1 - 3w_2 - 8w_3 - 21w_4$
„ 5 „ … $288\text{к}_4 = -3w_1 - 9w_2 - 24w_3 - 64w_4 - 21w_4$
За 5 троуглова … $288\text{к}_5 = -1w_1 - 3w_2 - 8w_3 - 21w_4 - 55w_5$

За систем (74*)

За 3 троугла … $8\text{к}_1 = -2w_1 - 1w_2 - 1w_3$
(75*а) „ 5 „ … $22\text{к}_1 = -5w_1 - 2w_2 - 1w_3 - 1w_4 - 2w_5$
За 4 троугла … $30\text{к}_1 = -7w_1 - 3w_2 - 2w_3 - 3w_2$
„ 6 „ … $80\text{к}_1 = -18w_1 - 7w_2 - 3w_3 - 2w_4 - 3w_5 - 7w_6$

Пошто су троуглови у систему венца, односно, у централном систему, потпуно равноправни један према другом, према томе могло се је очекивати да ће неодређени изрази њихових корелата биће слични један другоме и да ће се разликовати само по улози, коју игра сваки од слободних чланова према одговарајућој корлати, односно, троуглу: тако за корелату k_2, односно троугао 2, слободни члан w_2 има исти значај, као што слободан члан w_1 за корелату k_1; слободан члан w_2 у корелати k_1 равноправан је са слободним чланом w_3 код корелате k_2 и т. д.

Према томе у изразима за поступне корелате сваког од система једначина којеф-ти при слободним члановима излажу се тзв. *цикличком померању*, кад померање једног којеф-ата за једно место налево или надесно вуче за собом истоветно померање осталих и у истом правцу, као да су сви којеф-ти везани непрекидним ланцем, при чему је последњи којеф-т везан за први.

Због тога можемо написати:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{За 3 троугла} \ldots & 8к_2 = -1w_1 - 2w_2 - 1w_3 \ \text{(ланац се помера надесно)}, \\
 & \text{„ 5 „} \ldots & 22к_2 = -2w_1 - 5w_2 - 2w_3 - 1w_4 - 1w_5, \\
(75^*б) \ldots & \text{„ 4 „} \ldots & 30к_2 = -3w_1 - 7w_2 - 3w_3 - 2w_4, \\
 & \text{„ 6 „} \ldots & 80к_2 = -7w_1 - 18w_2 - 7w_3 - 3w_4 - 2w_5 - 3w_6 \\
 & & \text{и т. д.}
\end{array}
$$

У написатом облику неодређеног решења непознате (коре-зате) имају, место јединице, неки бројни којеф-т. То је изведено због више околности: прво, да се неби којеф-ти при слободним члановима изражавали у обичним разломцима, који нису згодни нити за писмо, нити за штампање; друго, да неби прејудицирали тачност десетичних разломака, у којима се изражавају обично којеф-ти неодређеног решења, и, треће, да би се могле искористити веома интересантне и важне особине бројних редова, који сачињавају којеф-ти једноимених корелата и слободних чланова, и то:

У групи (75а), —

$$
\begin{array}{ll}
 & 6,\ 16,\ 42,\ 110,\ 228, \ldots \\
(76а) \ldots & 1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55, \ldots
\end{array}
$$

У групи (75б), —

$$
\begin{array}{ll}
 & 16,\ 42,\ 110,\ 288, \ldots \\
(76б) \ldots & 1,\ 3,\ 8,\ 21, \ldots
\end{array}
$$

и т. д.

У групи (75*а), —

$$
\begin{array}{ll}
 & 8,\ 22, \ \ldots;\ 30,\ 80, \ \ldots; \\
(75^*а) \ldots & 2,\ 5, \ \ldots;\ 7,\ 18, \ \ldots; \\
 & 1,\ 2,\ 5, \ldots;\ 3,\ 7,\ 18, \ldots;
\end{array}
$$

и т. д.

Ови бројени редови припадају т. зв. *редовима Fibonacci*, наменовани тако по имену чувеног италијанског математичара, који је живео између 1175—1228 г. г. , први донео у Европу са Истока арапски систем бројева и много радио у области теорије бројева.

Своје редове *Fibinacci* је добио при проучавању верижног периодичног разломка:

$$X = 6 - \cfrac{4}{6 - \cfrac{4}{6 - \ldots}}$$

Рачунајући поступним приближавањем вредности овог разломка, добију се ови разломци:

$$X_1 = \frac{6}{1};\ X_2 = \frac{16}{3};\ X_3 = \frac{42}{8};\ \ldots$$

Редови састављени од бројитеља и, засебно, од именитеља сачињавају редове Fibonacci и поседују иста својства.

Нека ред, —

$$(77) \ldots \quad a_1, a_2, a_3, \cdots a_{n-1}, a_n\ a_{n+1}, \cdots$$

претставља у општем облику ред Fibonacci.

Основно својство чланова реда, како га је пронашао Fibonacci, изражава се једначином:

$$(78) \ldots \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

У проширеном општем облику она има облик

$$(78^*) \ldots \quad a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n+1},$$

где су α и β макоји, позитивни или негативни, цели бројеви.

За редове, који имају највише примене у геодезији

$$\alpha = +3 \text{ и } \beta = -1$$

и једначина (78*) се препише тако:

$$(78^{**}) \ldots \quad a_{n+1} = 3 a_n - a_{n-1}$$

Из овог основног својства могу се пронаћи низ других карактеристичних особина редова *Fibonacci.* Многобројне формуле извео је *А. А. Изотов* у својој дисертацији[11]), које су веома важне за проучавање тачности појединих елемената тријангулације.

Проучавањем редова Fibonacci бавили су се од геодета још C. F. Gauss, L. Krüger, P. Simon, H. Boltz.

За наше сврхе извешћемо од формула (78**) неколико нових, које се не налазе у споменутим расправама.

Означимо разлику између два суседна члана реда (77) са Δ_n где индекс одговара већем по величини члану (под условом (78*) чланови реда поступно расту); онда можено написати;

$$(79) \ldots \quad \begin{aligned} \Delta_{n+1} &= a_{n+1} - a_n \\ \Delta_n &= a_n - a_{n-1}, \end{aligned}$$

Из једначине (78**) имамо:

$$a_{n+1} - a_n = a_n + (a_n - a_{n-1})$$

одакле:

$$(79^*) \ldots \quad \Delta_{n+1} = a_n + \Delta_n .$$

Прва од једнакости (79), даје:

$$a_{n+1} = a_n + \Delta_{n+1},$$

одакле, помоћу (79*), —

$$(80) \ldots \quad a_{n+1} = (a_n + \Delta_n) + a_n = 2 a_n + \Delta_n .$$

[11]) *А. А. Изотов.* Оценка тачности тријангулације. Москва, 1936. стр. 1—13

Према формули (80) можемо, кад су познати два ма којих члана реда (77), продужити ред налево, до његовог почетка и надесно, докле нам биће потребно.

За рачунање смањујућих чланова реда важе формуле:

$$(80^*) \ldots \quad \begin{aligned} a_n &= a_{n+1} - \Delta_{n+1}, \\ \Delta_n &= \Delta_{n+1} - a_n \ . \end{aligned}$$

Тако, например, ако узмемо бројеве 8 и 21 за два суседна члана реда Fibonacci под условом (78*), онда можемо претпоставити да

$$(а) \ldots \quad \begin{aligned} a_n &= 8 \\ a_{n+1} &= 21 \end{aligned}$$

одакле,

$$(б) \ldots \quad \begin{aligned} \Delta_{n+1} &= 21 - 8 = 13 \\ \Delta_n &= 13 - 8 = 5 \\ a_{n-1} &= a_n - \Delta_n = 8 - 5 = 3 \\ \Delta_{n-1} &= 5 - 3 = 2 \\ a_{n-2} &= 3 - 2 = 1 \\ \Delta_{n-2} &= 2 - 1 = 1 \\ a_{n-3} &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Пошто чланови реда морају бити увек позитивни, онда члан a_{n-3} је почетни члан реда и његов индекс мора бити 1; дакле, —

$$(в) \ldots \quad n - 3 = 1, \text{ или } n = 4, \text{ и}$$

$$(г) \ldots \quad \begin{aligned} a_n &= a_4 = 8 \\ a_{n+1} &= a_5 = 21. \end{aligned}$$

Помоћу формула (79*) и (80) се продужава ред у страну његовог пораста.

$$(д) \quad \begin{aligned} &\Delta_6 = 21 + 13 = 34, \ a_6 = a_5 + \Delta_6 = 21 + 33 = 55; \\ &\Delta_7 = 55 + 34 = 89, \ a_7 = 55 + 89 = 144; \\ &\Delta_8 = 144 + 89 = 234, \ a_8 = 244 + 233 = 377 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Према (а) — (д) тражени ред се напише:

$$(е) \ldots \quad \begin{array}{llllllllllll} \Delta' = & & 1 & 2 & 5 & 13 & 34 & 89 & 233 & 620 & 1597 & 4181 \\ a' = & 0 & 1 & 3 & 8 & 21 & 55 & 144 & 377 & 987 & 2584 & 6765 \end{array}$$

Како се види из редова (е), поступни њихови чланови се добивају, према формули (80) једноставним сабирањем два претходна члана обојих редова Δ и а.

Ово својство којеф-ата неодређеног решења, који се односе на исте непознате w у изразима (75 — а, б, в, г и у (75*), омогућује да једноставним сабирањем последњих коеф-ата у ступцима горе наведених израза продужимо ове изразе према нашем захтеву дотле, док не дођемо до корелата за мрежу са потребним бројем троуглова.

Тако, например, ако желимо да добијемо неодређени израз корелате $к_2$ за мрежу са 10 троуглова, онда претходно израчунамо ред Fibonacci за коеф-те при $к_2$ и w_2 у формулама (75б).

Искоришћујући горе наведени начин, добијамо:

$$
(e^*) \dots
\begin{array}{lllllllllll}
\Delta'' = & 2 & 4 & 10 & 26 & 68 & 178 & 466 & 1220 & 3194 & \\
a'' = & 0 & 2 & 6 & 16 & 42 & 110 & 288 & 752 & 1974 & 5168 \\
\Delta''' = & 3 & 6 & 15 & 39 & 102 & 267 & 699 & 1830 & 4791 & \\
a''' = & 0 & 3 & 9 & 24 & 63 & 165 & 432 & 1131 & 2961 & 7762
\end{array}
$$

Из упоређења образаца (75) а-г се види да су коеф-ти свију корелата, које се односе на мрежу са истим бројем троуглова, једнаки. Тако коеф-ти корелата за мрежу од 5 троуглова једнаки су са 288.

При продужењу неодређених израза (75б) до за мрежу са 10 троуглова за коеф-те при корелатима $к_2$ искоришћујемо ред a'' (e^*), при w_1 — ред a' (е), при w_2, w_3 w_4 w_5 — реда a''' (e^*) и добијамо:

$$
(75^{**}б)\quad
\begin{array}{lll}
\text{за 6 троугла} & 752к_2 = & -85w_1 - 165w_2 - 63w_3 - 24w_4 - \\
 & & -9w_5 - 3w_6 \\
\text{„ 7 „} & 1972к_2 = & -144w_1 - 432w_2 - 165w_3 - 63w_4 - \\
 & & -24w_5 - 9w_6 - 3w_7 \\
\text{„ 8 „} & 5168к_2 = & -377w_1 - 1131w_2 - 432w_3 - 165w_4 - \\
 & & -64w_5 - 24w_6 - 9w_7 - 3w_8 \\
\text{„ 9 „} & 13530к_2 = & -987w_1 - 2961w_2 - 1131w_3 - 432w_4 - \\
 & & -165w_5 - 64w_6 - 24w_7 - 9w_3 - 3w_9 \\
\text{„ 10 „} & 35422к_2 = & -2584w_2 - 7762w_2 - 2961w_3 - 1131w_4 - \\
 & & -432w_5 - 165w_6 - 65w_7 - 24w_8 - 9w_9 - 3w_{10}
\end{array}
$$

На исти начин бисмо могли проширити скупове формула (75) и (75*), израчунавши претходно потребне редове Fibonacci.

Да су коеф-ти неодређеног решења корелата у случај у простог ланца троуглова, централних система и неколико комбинација од ових везаних система задовољавају услов (78**) пронашао је H. Boltz (в. његову расправу означену у опасци 6).

Али ово се може извести у општем облику помоћу детерминаната.

Како је познато, решење линарних једначина веома једноставно се изражава помоћу детерминаната.

Ако имамо систем од три линеарне једначине:

$$
(ж)\dots\quad
\begin{aligned}
a_{1\cdot1}\,x_1 + a_{1\cdot2}\,x_2 + a_{1\cdot3}\,x_3 + w_1 &= 0,\\
a_{2\cdot1}\,x_1 + a_{2\cdot2}\,x_2 + a_{2\cdot3}\,x_3 + w_2 &= 0,\\
a_{3\cdot1}\,x_1 + a_{3\cdot2}\,x_2 + a_{3\cdot3}\,x_3 + w_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

и означимо детерминант систем са D_3, а његове миноре са $A_{m.k}$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{1\cdot1} & a_{1\cdot2} & a_{1\cdot3} \\ a_{2\cdot1} & a_{2\cdot2} & a_{2\cdot3} \\ a_{3\cdot1} & a_{3\cdot2} & a_{3\cdot3} \end{vmatrix}$$

$$A_{1\cdot1} = \begin{vmatrix} a_{2\cdot2} & a_{2\cdot3} \\ a_{3\cdot2} & a_{3\cdot3} \end{vmatrix}, \quad A_{1\cdot2} = \begin{vmatrix} a_{2\cdot1} & a_{2\cdot3} \\ a_{3\cdot2} & a_{3\cdot3} \end{vmatrix}, \quad A_{1\cdot3} = \begin{vmatrix} a_{2\cdot1} & a_{2\cdot2} \\ a_{3\cdot1} & a_{3\cdot2} \end{vmatrix};$$

$$(з) \quad A_{2\cdot1} = \begin{vmatrix} a_{1\cdot2} & a_{1\cdot3} \\ a_{3\cdot2} & a_{3\cdot3} \end{vmatrix}, \quad A_{2\cdot2} = \begin{vmatrix} a_{1\cdot1} & a_{1\cdot3} \\ a_{3\cdot1} & a_{3\cdot3} \end{vmatrix}, \quad A_{2\cdot3} = \begin{vmatrix} a_{1\cdot1} & a_{1\cdot2} \\ a_{3\cdot1} & a_{3\cdot2} \end{vmatrix};$$

$$A_{3\cdot1} = \begin{vmatrix} a_{1\cdot2} & a_{1\cdot3} \\ a_{2\cdot2} & a_{2\cdot3} \end{vmatrix}, \quad A_{3\cdot2} = \begin{vmatrix} a_{1\cdot1} & a_{1\cdot3} \\ a_{2\cdot1} & a_{2\cdot3} \end{vmatrix}, \quad A_{3\cdot3} = \begin{vmatrix} a_{1\cdot1} & a_{1\cdot2} \\ a_{2\cdot1} & a_{2\cdot2} \end{vmatrix};$$

онда изразе неодређеног решења непознатих X биће:

$$\begin{aligned} D_3 \cdot x_1 &= -A_{1\cdot1} w_1 - A_{1\cdot2} w_2 - A_{1\cdot3} w_3, \\ (и) \ldots \quad D_3 \cdot x_2 &= -A_{2\cdot1} w_1 - A_{2\cdot2} w_2 - A_{2\cdot3} w_3, \\ D_3 \cdot x_3 &= -A_{3\cdot1} w_1 - A_{3\cdot2} w_2 - A_{3\cdot3} w_3, \end{aligned}$$

Поделимо једначине система (74) и (74*) са два и сведемо њихове квадратичке којефте на (+3), неквадратичке на (—1), а слободне чланове на $\frac{1}{2}$ w_k које ћемо означити w'_k

Онда општи детерминант система (74) са n једначина се напише:

$$(81) \ldots \quad D'_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & . & . & . & . & . \\ -1 & 3 & -1 & . & . & . & . \\ & -1 & 3 & -1 & . & . & . \\ . & . & -1 & 3 & -1 & . & . \\ . & & . & . & . & . & . \end{vmatrix}}_{\text{n стубаца}} = 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & . & . & . \\ -1 & 3 & -1 & . & . \\ . & -1 & 3 & -1 & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}}_{\text{(n—1) стубаца}} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & . & . & . \\ 3 & -1 & . & . \\ -1 & 3 & -1 & . \\ . & -1 & 30 & -1 \\ . & . & . & . \end{vmatrix}}_{\text{(n—1) стубаца}} = 3\, D'_{n-1} - \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & . & . \\ -1 & 3 & -1 & . \\ . & -1 & 3 & -1 \\ . & . & . & . \end{vmatrix}}_{\text{(n—2) стубаца}} = 3\, D'_{n-1} - D'_{n-2}$$

Како се види веза између D'_n, D'_{n-1}, D'_{n-2}, дакле између општих детерминаната за 3 система корелатних једначина, који одговарају простим ланцима са n, $(n-1)$ и $(n-2)$ троуглова, одговарају услову (78**), дакле припадају реду Fibonacci. Али ови детерминанти, према изразима (и), су којефицијент непознатих, у нашем случају, корелата за иста три поступна система.

Непосредним рачунањем нађемо:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8; D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & . \\ -1 & 3 & -1 \\ . & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} +$$

(81*)

$$\begin{vmatrix} -1 & . \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3.8 - 3 = 21 \quad D_4 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & . & . \\ -1 & 3 & -1 & . \\ & -1 & 3 & -1 \\ & . & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\,D_3 - D_2 = 63 - 8 = 55.$$

Ако бисмо уврстили у изразе (и) место w_k његову половину $\frac{1}{2} w_k$, онда би се множењем једначина (и) са 2 удвостручили коефт-и при непознатим, док би коефт-и при w_k остали без промене.

Дакле општи детерминанти система (74) без промењених n_k биће дупли према величинама (81*):

(к) ... $D'_2 = 16;\ D'_3 = 42;\ D'_4 = 110, ..$

Ове величине одговарају реду Fibonacci a″ (е*).

За ознаку почетних чланова — 1 и 3 ових редова узмемо:

(к*) ... $D_0' = 2;\ D'_1 = 6.$

Што се тиче минора, то за корелату κ_2 и, дакле, за системе троуглова од 2 па на више, они се могу претставити двема општим формулама, које одговарају двама случајевима, и то, кад је број троуглова у ланцу паран и кад није.

За *n* троуглова кад *n* је паран.

(82) ... $D'_{ki} = 2\,D_n\,\kappa_i = D_0\,D_{n-i}\,w_1 + D_1\,D_{n-i}\,w_2 + D_2\,D_{n-i}\,w_3 + \ldots$
$\ldots + D_{n-i}D_{n-i}w_{n-i+1} + D_{n-i}D_{n-i-1}w_{n-i+2} + D_{n-i}D_{n-i-2}w_{n-i+3} + \ldots$
$\ldots + D_{n-i}D_2w_{n-i} + D_{n-i}D_1w_n + D_{n-i}D_1w_{n+1}$

За *n* троуглова, кад је *n* непаран:

(82*) ... $D'_n\,\kappa_i = 2\,D_n\,\kappa_i = D_0\,D_{n-i}w_1 + D_1\,D_{n-i}w_2 + D_2D_{n-i}w_3 + \ldots$
$\ldots + D_{i-1}\,D_{n-i}\,w_2 + D_i\,D_{n-i-1}w_i + D_i\,D_{n-i-2}\,w_{i+2} + \ldots$
$\ldots + D_i\,D_2\,w_{n-i} + D_i\,D_1\,w_n + D_i\,D_0\,w_{n+1}.$

Обадве формуле састављене су по једном, те истом, закону и то: *којеф-ти при слободним члановима су производ од два детерминанта из реда (81*); први детерминант има у првом члану један индекс о, а други (n-i), где број i одговара нумери корелате*; *за остале чланe индекс другог множитеља остаје непромењена индекс првог детерминанта постуџно расте, сваки пут за јединицу, док не стигне у случају парног n величине* (*n-i*), *а у случају непарног n величине* (*i-1*); *од овог члана индекс првог детерминанта остаје стабилан, а индекс другог почиње да опада, док не дође до нуле у последњем члану.*

По формулама (82) и (82*), или по формулисаном закону може се написати систем неодређеног решења за прости ланац при сваком броју троуглова.

Може се то учинити у два облика: 1) или се саставља систем неодређеног решења за једну исту корелату κ_m у ланцима са различитим бројем троуглова; онда у формулама *n* се мења од i, (i+1) па навише, а *m*, као и индекс *к*, остаје стабилан и једнак *i*. Тако су састављени системи (74).

2) или састављају систем неодређеног решења за све корелате, које одговарају ланцу са одређеним бројем троуглова, онда *n* које је равно броју троуглова, остаје непромењено, а индекс *i* се мења од 1 до *n*.

Тако за ланац од 4 троугла имаћемо:

$$n = 4,\quad i = 1, 2, 3, 4.$$

и из формуле (82*) напишемо:

$$(\text{л}) \ldots \quad \begin{aligned} 2\,D_4\,\text{к}_1 &= -\,D_0\,D_3\,w_1 - D_0\,D_2\,w_2 - D_0\,D_1\,w_3 - D_0\,D_0\,w_4 \\ 2\,D_4\,\text{к}_2 &= -\,D_0\,D_2\,w_1 - D_1\,D_2\,w_2 - D_1\,D_1\,w_3 - D_1\,D_0\,w_4 \\ 2\,D_4\,\text{к}_3 &= -\,D_0\,D_1\,w_1 - D_1\,D_1\,w_2 - D_2\,D_1\,w_3 - D_2\,D_0\,w_4 \\ 2\,D_4\,\text{к}_4 &= -\,D_0\,D_0\,w_1 - D_1\,D_0\,w_2 - D_2\,D_0\,w_3 - D_3\,D_0\,w_4 \end{aligned}$$

Величине D_m припадају реду а′ (е), одакле имамо:

$$(\text{м}) \qquad D_0 = 1;\; D_1 = 3;\; D_2 = 8;\; D_3 = 21;\; D_4 = 55.$$

Помоћу њих систем (л) ће имати следећи бројни облик:

$$(\text{л}^*) \qquad \begin{aligned} 110\ \text{к}_1 &= -\,21\,w_1 - 8\,w_2 - 3\,w_3 - w_4 \\ 110\ \text{к}_2 &= -\,8\,w_1 - 24\,w_2 - 9\,w_3 - 3\,w_4 \\ 110\ \text{к}_3 &= -\,3\,w_1 - 9\,w_2 - 24\,w_3 - 8\,w_4 \\ 110\ \text{к}_4 &= -\,w_1 - 3\,w_2 - 8\,w_3 - 21\,w_4 \end{aligned}$$

Претпостављајући да за рачунање детерминанвта система венца, којему одговарају једначине (74*), подељене са 2, општи детерлинант система (74*) D'_n за *n* троуглова ће се изразити:

$$(83) \quad D'_n \quad 2\,\Delta_n = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & . & . & . & . & . \\ - & 3 & -1 & . & . & . & . \\ . & -1 & 3 & -1 & . & . & . \\ . & . & -1 & 3 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & . & . & . & . & -1 & 3 \end{vmatrix}}_{}^{n \text{ стубаца и редова}} = 2\,[3\,D_n - 2\,(D_{n-1} + D_0)],$$

где D_n припада реду а′(е).

Општи израз за корелату к_1 у систему венца са *n* троугловима, онда ће бити:

$$(84) \ldots \quad D'_n\,\text{к}_1 = D_{n-1}\,w_1 + (D_{n-2} + D_0)\,w_2 + (D_{n-3} + D_1)\,w_3 + \cdots \ldots + (D_1 + D_{n-3})\,w_{n-1} + (D_0 + D_{n-2})\,w_n$$

Искоришћујући ред (м) добијимо следеће вредности за D'_n:

$$(84^*) \ldots \quad \begin{aligned} D'_3 &= 2\,[3\,D_2 - (D_1 + D_0)] = 2\,[3.8 - 2\,(3+1)] = 32 \\ D'_4 &= 2\,[3.21 - 2\,(8+1)] = 90 \\ D'_5 &= 2\,[3.55 - 2\,(21+1)] = 132 \\ D'_6 &= 2\,[3.144 - 2\,(55+1)] = 320 \\ D'_7 &= 2\,[3.337 - 2\,(144+1)] = 841 \quad \text{ит.} \end{aligned}$$

Изрази за остале корелате — k_2, k_3, ... k_n добивају се из (84) путем цикличког померања коеф-ата у поступном реду, према поступном повећању индекса при k_m.

Тако за k_2 имаћемо:

$$(84^{**})\quad D'_n\, к_2=(D_0+D_{n-2})w_1+D_{n-1}w_2+(D_{n-2}+D_0)w_3+(D_{n-3}+D_1)w_4+$$
$$+\ \dots\ +(D_2+D_{n-4})w_{n-1}+(D_0+D_{n-3})w_n\,.$$

Према томе за сваки систем венца, односно, централни систем, довољно је да се израчунају којеф-ти неодређеног израза (84) само за прву корелату.

Тако, например, за централни систем од пет троуглова имаћемо из (84):

$$(н)\ \dots\ D'_5к_1=D_4w_1+(D_3+D_0)w_2+(D_2+D_1)w_3+(D_1+D_2)w_4+(D_0+D_3)w_5$$

Помоћу вредности (84*) и реда (м) овај израз се препише у облику:

$$(н^*)\qquad 132к_1 = 55w_1 + 22w_2 + 11w_3 + 11w_4 + 22w_5,$$

а после делења са 11:

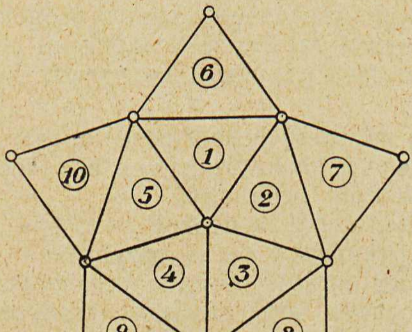
$$(н^{**})\qquad 22к_1 = 5w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4 + 2w_5,$$

одакле можемо писати даље:

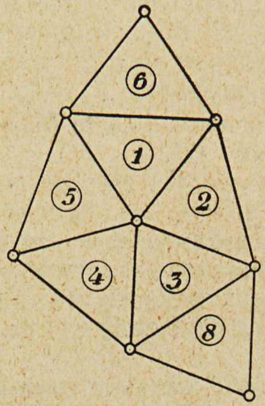
$$22к_2 = 2w_1 + 5w_2 + 2w_3 + w_4 + w_5$$
$$22к_3 = w_1 + 2w_2 + 5w_3 + 2w_4 + w_5 \text{ итд.}$$

На исти начин добивају се помоћу детерминаната општи изрази неодређеног решења за друге све више и више сложеније системе троуглова.

Тако сам добио изразе за т. зв. *звездани систем* (делимични и пуни — Сл. 9а-б),*) за редове састављене од централних система, за различите системе са дијагоналама итд.



Сл. 9б



Сл. 9а

*) Под звезданим системом се разуме централни систем, на чије спољашње стране се наслањају нови троуглови; кад су на свима странама прикључени спољашњи троуглови, онда имамо пун звездани систем; (сл. 9б) кад спољашњи троуглови имају само неколико страна централног система, онда имамо *делимичан* звездани систем (Сл. 9а).

IV Неодређени изрази корелата по начину Friedrich'а

Како смо видели у прошлом параграфу (III) редови Fibonacci имају непосредну везу са неодређеним решењем корелатних једначина за услове фигура.

Изрази општих детерминаната за систем оваких једначина чије су главне дијагонале састављене од бројева 3, а остали чланови симетрично су расположени према главној дијагонали од бројева (—1), наслућују да се њихове вредности могу изразити помоћу т. зв. *непрекидних или верижних разломака*, од којих потичу и редови Fibonacci.

K. Friedrich у својој расправи, означене у опасци 10, извео је изразе за којеф-те неодређеног решења у облику верижних разломака.

Детаљније је разјаснио и даље израдио Friedrich'ов начин *W. Jenne*[12]) и на његовој основи израчунао је табеле за неодређено решење услова фигура. Пошто рачунање са верижним разломцима, нарочито кад се они искоришћавају у потпуно општем облику, и кад су њихови множитељи могу се разликовати од јединице, мало је познато чак и ужем кругу специалиста, ја се не усуђујем да се упустим на излагање теорије Friedrich'а и Jenne'а и упућујем интересенте ка расправама ових писаца, које су наведене у опасцима 11 и 12.

Овде се ограничавам на примедбу да се рачунање помоћу верижних разломака показало у овом случају веома целисходним нарочито у вези са графичком претставом корелатних једначина.

V ... Табеле за неодређено решење корелатних једначина за услове фигура.

Ослањајући се на непосредно неодређено решење корелатних једначина, из којега је био утврђен низ њихових општих особина, *H. Boltz* је први израчунао табеле за неодређено решење за случајеве простог ланца, венца, односно, централних система, без дијагонала.

Рачунање се је базирало на неодређене изразе корелате, дате у облику (75) и (75*) и изведено са заокруживањем вредности коеф-ата неодређеног решења на пету децималу.

Таблице за прости ланац вреде за неограничен број троуглова; таблице за венац се ограничавају са 29 троуглова.

За везани систем простих ланаца наведени су изрази неодређеног решења, на чијој основи могу да буду израчунате табеле са произвољном тачношћу за сваки посебни облик везане мреже.

Таблице су штампане у расправи H. Boltz'а, поменуте у опасци под 6, стр. 12-16 и 28-29.

Искоришћавање начина неодређеног решења при искоришћавању тријангулационе мреже показало ми је да при већем броју

---

[12]) *W. Jenne* Kettenbruchformeln und Korrelatentabellen für trigonometrische Netze etc.— Veröffent des Preuss. Geodat. Inst Neue Folge № 107, Potsdam 1937.

условних, односно, корелатних једначина, тачност од пет децимала није довољна за добијање исправних вредности коеф-ата неодређеног решења у његовим дефинитивним изразима.

То ме је нагнало да поново израчунам (1934 г.), Болцове таблице са већом тачношћу до седмог децимала и да израдим таблице за друге облике тријангулационе мреже.

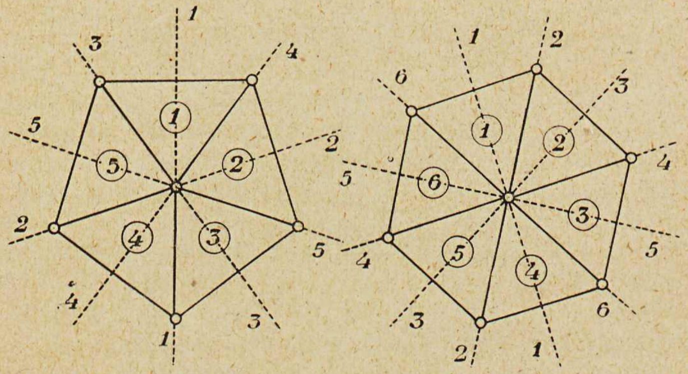
При рачунању били су искоришћени детерминанти и својство симетрије између којеф-ата корелата у системима, који имају на својој графичкој претстави осу симетрије.

Да би се могло лакше уочити оса симетрије тријангулациона шема се израђује под претпоставком да су сви троуглови равнокраки.

Тако например сваки централни систем (сл. 10, а и б) са унутрашњим центром има неколико осе симетрије, и то њихов број m једнак броју троуглова n

$$(o) \dots \qquad m = n$$

Геометричка веза троуглова, симетрички распоређених према оси симетрије, са осталим троугловима мреже, који имају идентичан положај према одговарајућем троуглу и оси симетрије, биће, очигледно, идентична према сваком од два симетричка троугла.



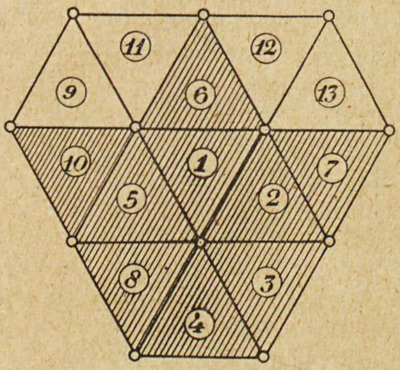
Сл. 10а Сл. 10б

Тако, например, троуглови (2) и (5) на сл. 10 а и (2) и (6) на сл. 10 б. симетрички су распоређени према оси симетрије (1—1), и геометричка веза троугла (2) са троугловима (1), (5), (4), (3), односно, са (1), (6), (5), (4), (3) биће истоветна, као што је веза троугла (5) са троугловима (1), (2), (3), (4), односно троугла (6) са троугловима (1). (2), (3), (4), (5). Ова истоветност условљава у систему сл. 10а идентичност коеф-ета неодређеног решења корелате $к_2$ при корелатама $к_1$, $к_5$, $к_4$, $к_3$ са одговарајућим којеф-има неодређеног решења корелате $к_5$ при корелатама $к_1$, $к_2$, $к_3$, $к_4$; исти је закључак за којеф-те корелата (2) и (6) у систему сл. 10 б.

Осим тога у сваком централном систему са унутрашњим центром сваки троугао истоветно је распоређен према осталим троугловима система, што условљава идентичност којеф-ата при одговарајућим корелатама и њихово цикличко померање у изразима неодређеног решења.

Ова особина оса симетрије тријангулационе мреже у многоме олакшава посао око рачунања вредности којеф-ата неодређеног решења и ствара сигурну контролу добивених резултата.

Искоришћујући све наведене околности састављене су таблице са седам децимала за следеће системе: прости ланац; ланац од геодетских четвороуглова; ланац од централних система од пето-шесто и седмоугаоника; прост централни систем; венац; сложен централни систем са једном, двема дијагоналама итд. до пуног броја дијагонала за пето,-шесто,-седмо и осмоугаоник; делимичан звездани систем са основицом од пето,-шесто,-седмо и осмоугаоника у свима могућим комбинацијама; пун звездани систем са истом основицом и најзад, неколико већих система, један од којих је приказан на слици 11. Свега је састављено 182 табеле.



Сл. 11

W. Jenne (в. опаску 12) по начину Friedrich'а, помоћу верижних разломака, израчунао је којеф-те неодређеног решења за услове фигуре за системе корелатних једначина са 4, 5, 6, 7, 8 и 9 једначина у свим могућим комбинацијама: прости ланац; везани прости ланци; прости ланац везан за централни систем; два везана централна система са или без накнадних простих ланаца. Највећи број троуглова код везаног централног система износи 8. Највећи број троуглова у два везана централна система је 5 и 6.

На крају је дат систем ланаца састављеног од централних система са 6 углова.

Којеф-ти су израчунати са 5 децимала. Свега је састављено 152 табеле за различите комбинације услова фигура од 4, 5, — 9 услова и 16 табела за ланац од централних система са 6 углова.

VI ... Практични значај табела неодређеног решења.

Из наведеног у два последња параграфа се види да је знатан број комбинација услова фигура, које се могу појавити при изравнавању тријангулационих мрежа чак и компликованијих облика, обухваћен израчунатим и делимично објављеним табелама њиховог неодређеног решења.

Према томе при двогрупном изравнавању могућно је у прву групу одвајати оне услове фигура, чије се неодређено решење налази у табелама а у другу групу све остале услове.

Онда неодређено решење система (54) за прву групу (52) корелатних једначина, које претставља најкомпликованији део рачунских операција при двогрупном решењу, отпада и изравнавање се почне са рачунањем помоћних корелата по формулама (58*) и продужава се са трансформацијом једначина друге групе итд.

Са временом потпуно је могуће очекивати да ће се табеле неодређеног решења саставити за све могуће комбинације свију угловних услова (фигура, фиксног угла, азимута) и онда ће у другој групи корелатних једначина остати само оне које се односе на услове страна — полусне, базисне итд.

У слободној мрежи — без базисних, фиксних, азимуталних услова од угловних услова постоје само услови фигура а од услова страна — само услови полусни, не рачунајући полигонални услов, који се појављује код слободних мрежа, кад ове имају облик венца.

Дакле, код слободних мрежа број услова фигура је несразмерно већи од услова страна. Тако у простом ланцу не постоји, уопште, ни један услов стране и изравнате вредности корелата рачунају се директно из неодређеног решења. У централном систему постоји само један полусни услов, док је број услова фигура једнак са бројем страна основице полусног система; у веома ретким случајевима централни систем има за основицу троугао и нешто чешће — четвороугао; И у овим случајевима однос између броја полусних и услова фигура сачињава $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. У сложенијим системима мрежа овај однос је много повољнији према условима фигуре.

Тако мрежа, коју, као пример изравнава H. Boltz у својој књизи (в. опаску 6, стр. 35), везана је са 39 услова фигура и 8 полусних; дакле број услова фигура готово је пет пута већи него број полусних.

Израдом таблица за неодређено решење условних једначина фигура двогрупни и неодређени начин уведен је у ред практички корисних начина решења нормалних једначина.

Његова вредност се испољила нарочито у многогрупном неодређеном решењу нормалних једначина тиме, што дозвољава готово неограничено повећање броја условних, односно нормалних једначина у почетном систему.

Ако још овоме додамо да којеф-ти неодређеног решења претстављају којеф-те тежине одговарајућег отступања и према томе дозвољавају исцрпну анализу тачности добивених резултата то се значај неодређеног решења за прворазредне тријангулационе мреже још веома повећава. Алгоритм Гауса при неодређеном решењу игра улогу само помоћног сретства за трансформацију нормалних једначина подељених у групе.

Октобар, 1940
Београд.

RÉSUMÉ

Dans le présent numéro l'auteur se retint aux tables de coefficients de la résolution indéterminée des équations normales, qui correspondent aux conditions de figures.

En soulignant que l'application pratique de la résolution indéterminée dépend, avant tous, de la simplicité de la résolution du premier groupe des équations normales en forme indéterminée, l'auteur passe à l'analyse des propriétés des équations normales correspondant aux conditions angulaires et, surtout, aux conditions de figures.

Comme suite des investigations de M. M. L. Krüger, H. Boltz et K. Friedrich, il établit, au cas susdit, la liaison intime entre la loi de la formation des coefficients de la résolution indéterminée et celle de la formation des membres de la série de Fibonacci dont la propriété générale exprime la relation;

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}.$$

Au moyen des déterminants il démontre en forme générale cette propriété pour les cas de la chaine de triangules et de la couronne et établit la formule:

$$D_{n+1} = 3 D_n - D_{n-1},$$

où D_{n-1}, D_n, D_{n+1} sont les déterminants succesifs des systèmes des équations normales des conditions de figure contenant $(n-1)$, n et $(n+1)$ équations. Les valeurs initiales de ces déterminants sont, — $D_o = 1$; $D_1 = 3$.

Ensuite il déduit les formules générales de la résolution indéterminée pour les cas des chaines de triangles qui sont suivantes:

guand n est pair:

$$2 D_n k_i = D_o D_{n-i} W_1 + D_1 D_{n-i} W_2 + D_2 D_{n-i} W_3 + \dots$$
$$\dots + D_{n-i} D_{n-i} W_{n-i+1} + D_{n-i} D_{n-i+1} W_{n-i+2} + D_{n-i} D_{n-i+3} W_{n-1+3} + \dots$$
$$\dots + D_{n-i} D_2 W_{n-2} + D_{n-i} D_1 W_{n-1} + D_{n-i} D_o W_n .$$

et quant n est impair:

$$2 D_n k_i = D_o D_{n-i} W_1 + D_1 D_{n-i} W_2 + D_2 D_{n-i} W_3 + \dots +$$
$$+ D_{i-1} D_{n-i} W_i + D_{i-1} D_{n-i-1} W_{i+1} + D_{i-1} D_{n-i-2} W_{i+2} + \dots +$$
$$+ D_{i-1} D_2 W_{n-2} + D_{i-1} D_1 W_{n-i} + D_{i-1} D_o W_n$$

et les formules analogues pour la couronne:

$$2 D_n k_i = (D_{n-i} + D_{i-2}) W_1 + (D_{n-i+1} + D_{i-3}) W_2 + (D_{n-i+2} + D_{i-4}) W_3 + \dots$$
$$\dots + (D_{n-2} + D_o) W_{i-1} + D_{n-1} W_i + (D_{n-2} + D_o) W_{i+1} + (D_{n-3} + D_1) w_{i+2} + \dots$$
$$\dots + (D_{n-i+2} + D_{i-4}) w_{n-1} + (D_{n-i+1} + D_{i-3}) w_n ,$$

ou $i = 1, 2, 3, \dots n.$

La suite des valeurs de D_n, —

$$D_o = 1;\ D_1 = 3;\ D_2 = 8;\ D_3 = 21;\ D_4 = 55;\ \dots$$

représente une des séries de Fibonacci.

Ayant expliqué la représentation graphique de la liaison entre les équations normales, introduite par M. Friedrich et utiliseé par M. Jenne dans les tables des coefficients de la résolution indéterminée, l'auteur développe la méthode similaire moyennant le schéma des équations de condition qu'il a inventé et publié aux pages de notre Journal (№№ 4 et 5—6 de 1939). Cette méthode diffère de celle de M. Friedrich par l'embrassemant au moyen des signes géomètriques tous les liaisons

entre ies élements de tous les genres des équations de condition comme des équations normales, tendis que la graphique de M. Friedrich se restreigne aux équations normales de figure.

Les détails de l'établissement des tables des coefficients de la résolutton indéterminée ferme cette partie de l'article: les tables à cing décimales calculé par M. Boltz se basent sur la résolution directe des équations normales et se réfèrent aux cas de la chaîne simple et de la couronne; M Jenne à établit les tables à cing décimales par la méthode de M. Friedrich (au moyen des fractions continues) pour tous les combinaisons possibles des triangles, dans les réseaux formé par 3, 4 etc. jusqu'aux 9 triangles, comme pour les chaînes des systèmes centraux aux 6 triangles; enfin, les tables à sept décimales sont établits par l'auteur au moyen des déterminants pour les systèmes des réseaux suivans; les systèmes simples, — la chaîne de triangles; et ceux composés, — quadrilatère géodèsique; hexagone formé de trois triangles avec les diagonales en tous combinaisons; les chaînes des quadrilatère géodésiques; les systèmes centraux avec les bases — triangulaires, quadrilatèrales, pentagonales, hexagonales, heptagonale, octogonales sans ou avec les diagonales en tous combinaisons et aussi pour les chaînes des systèmes centraux pratiquement admissibles; enfin, les systèmes centraux avec tous les combinaisons du nombre et des places des triangles ampliatifs.

Важније штапарске грешке примећене у делу чланка, штампаном у прошлом броју часописа:

Страна:	Ред:	Штампано:	Треба да буде:
249	6 одозго	образаца (ж*)	образаца (ж) и (ж*)
252	13 одоздо	W_1 на $f_{1\cdot1}$ W_2 на $f_{1\cdot2}$ W_3 на $f_{1\cdot3}$	W_1- на $f_{1\cdot1}$, W_2- на $f_{1\cdot1}$, -W_3 на $f_{1\cdot3}$
253	5 одозго	" " " "	" " " w_3
"	6 " "	" " " "	" " " w_I
"	7 " "	" " " "	" " " w_{II}
"	16 " "	$+ \rho_{1\cdot1}\ \varphi_{II.II}$	$+ \rho_{1\cdot1}\ \varphi_{I.II}$
259	24 одоздо	(2)	(е)
"	22 " "	(2)	(в)
"	20 " "	мулару	мулама
263	27 одозго	l'algorithne	l'algorithme

На страни 306 у формули (з) изостављене су вертикалне линије.

В.

ТЕОРИЈА ПОЛАРНОГ ПЛАНИМЕТРА

Да би неки освежили, а неки употпунили своје стручно образовање износимо ову опште познату теорију поларног планиметра. Читав приказ је узет из Долежалове (ниже) геодезије од стране 962 до 966 издања 1904 године. (Hand-und Lehrbuch der Niederen Geodäsie von Eduard Doležal, Wien 1904). Измењено је само оно, што је писац испустио, да не би читаву књигу оптеретио и на пар мјеста понешто је попраћена с коментаром, да би свако без имало муке могао читаву ствар пратити. Слика 1 претставља костур добро нам познатог поларног планиметра, гдје је PA поларни крак, AS крак за обилажење обода лика и AB крак на коме је смештен точкић за очитавање. Код тачке A налази се зглоб, којим су спојени споменути кракови међу собом.