entre ies élements de tous les genres des équations de condition comme des équations normales, tendis que la graphique de M. Friedrich se restreigne aux équations normales de figure.

Les détails de l'établissement des tables des coefficients de la résolutton indéterminée ferme cette partie de l'article: les tables à cing décimales calculé par M. Boltz se basent sur la résolution directe des équations normales et se réfèrent aux cas de la chaîne simple et de la couronne; M Jenne à établit les tables à cing décimales par la méthode de M. Friedrich (au moyen des fractions continues) pour tous les combinaisons possibles des triangles, dans les réseaux formé par 3, 4 etc. jusqu'aux 9 triangles, comme pour les chaînes des systèmes centraux aux 6 triangles; enfin, les tables à sept décimales sont établits par l'auteur au moyen des déterminants pour les systèmes des réseaux suivans; les systèmes simples, — la chaîne de triangles; et ceux composés, — quadrilatère géodèsique; hexagone formé de trois triangles avec les diagonales en tous combinaisons; les chaînes des quadrilatère géodésiques; les systèmes centraux avec les bases — triangulaires, quadrilatèrales, pentagonales, hexagonales, heptagonale, octogonales sans ou avec les diagonales en tous combinaisons et aussi pour les chaînes des systèmes centraux pratiquement admissibles; enfin, les systèmes centraux avec tous les combinaisons du nombre et des places des triangles ampliatifs.

Важније штапарске грешке примећене у делу чланка, штампаном у прошлом броју часописа:

Страна:	Ред:	Штампано:	Треба да буде:
249	6 одозго	образаца (ж*)	образаца (ж) и (ж*)
252	13 одоздо	W_1 на $f_{1\cdot1}$ W_2 на $f_{1\cdot2}$ W_3 на $f_{1\cdot3}$	W_1- на $f_{1\cdot1}$, W_2- на $f_{1\cdot1}$, -W_3 на $f_{1\cdot3}$
253	5 одозго	" " " "	" " " w_3
"	6 " "	" " " "	" " " w_I
"	7 " "	" " " "	" " " w_{II}
"	16 " "	$+ \rho_{1\cdot1}\ \varphi_{II.II}$	$+ \rho_{1\cdot1}\ \varphi_{I.II}$
259	24 одоздо	(2)	(е)
"	22 " "	(2)	(в)
"	20 " "	мулару	мулама
263	27 одозго	l'algorithne	l'algorithme

На страни 306 у формули (з) изостављене су вертикалне линије.

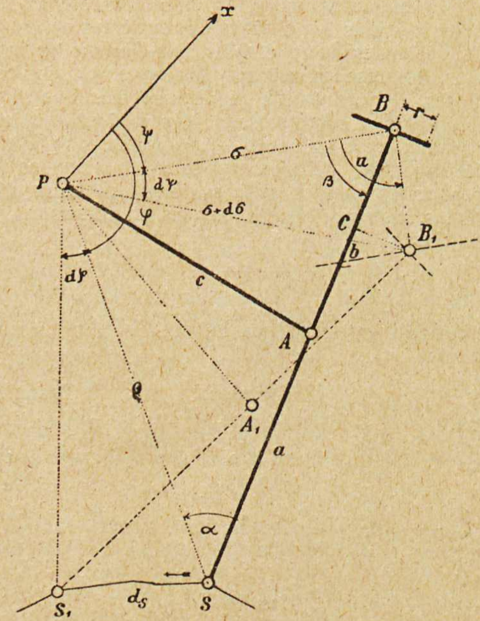
B.

ТЕОРИЈА ПОЛАРНОГ ПЛАНИМЕТРА

Да би неки освежили, а неки употпунили своје стручно образовање износимо ову опште познату теорију поларног планиметра. Читав приказ је узет из Долежалове (ниже) геодезије од стране 962 до 966 издања 1904 године. (Hand-und Lehrbuch der Niederen Geodäsie von Eduard Doležal, Wien 1904). Измењено је само оно, што је писац испустио, да не би читаву књигу оптеретио и на пар мјеста понешто је попраћена с коментаром, да би свако без имало муке могао читаву ствар пратити. Слика 1 претставља костур добро нам познатог поларног планиметра, гдје је PA поларни крак, AS крак за обилажење обода лика и AB крак на коме је смештен точкић за очитавање. Код тачке A налази се зглоб, којим су спојени споменути кракови међу собом.

Дакле величине, које видимо на слици један јесу:

PA = c је дужина поларног крака
AS = a „ „ обилазног „
AB = b „ „ точкићевог а „r“
је полумјер точкића.



Сл. 1

Узмимо за одређивање међусобних односа наведених величина поларни координатни систем са полом у тачци P и по вољи изабраној оси x. Избором таквог координатног система уједно ће се лакше и доказати, да разлика — очитања на почетку и очитања на крају — на точкићу при обилажењу неке површине, помножена са константом планиметра, претставља заиста површину обиђеног лика. Да би то извели претпоставимо да игла плаиметра према сл. 1 пређе пут од S до S_1 за диференцијалну величину ds то тада и цијели инструмент изведе диференцијално кретање и то, тачка A опише кружни лук и долази у A_1 а додирна тачка точкића B дође у B_1

Пут BB_1 можемо раставити у двије компоменте, које стоје управно једна на другој; те су компоненте BC и CB_1. При кретању од B према C не врши се никакво померање точкића, јер се исти креће у правцу своје окретне осе, док се од C до B_1 врши потпуно окретање точкића, које је једнако дужини лука точкића, а може сд изразити помоћу радиуса „r“ точкића и окретног угла до односно:

$$CB_1 = rd\gamma \;\ldots\; 1$$

Величину пак CB_1 можемо на овај начин изразити:
Из правокутног трокута CBB_1 имамо да је:

$$\overline{CB_1} = \overline{BB_1} \sin(\mu\text{-}\beta) = \overline{BB_1} \sin\mu \cos\beta - \overline{BB_1} \cos\mu \sin\beta \ldots \text{I}$$

а из $\Delta\ PBB_1$ имамо:

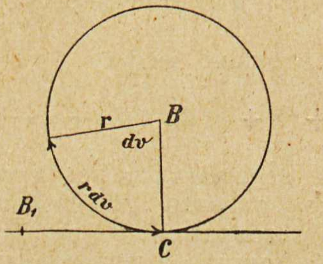
$$\overline{BB_1} : \sigma = \sin d\psi : \sin(\mu + d\psi)$$

или $\overline{BB_1} \sin(\mu + d\psi) = \sigma \sin d\psi = \sigma d\psi$

или $\overline{BB_1} \sin\mu \cos d\psi) + \overline{BB_1} \cos\mu \sin d\psi = \sigma d\psi$

или ако узмемо да је $d\psi$ близу нула а према томе $\cos d\psi = 1$, а $\sin d\psi = 0$ добијемо:

$$\overline{BB_1} \sin\mu = \sigma d\psi \ldots 2$$



Сл. 2

Из истога трокута добијамо ако на PB_1 пројицирамо PB и $\overline{BB_1}$ да је:

$$\sigma + d\sigma = \sigma \cos d\psi + \overline{BB_1} \cos[180-(\mu + d\psi)] = \sigma \cos d\psi + \overline{BB_1} \cos(\mu + d\psi)$$

или сматрајући опет да је $d\psi$ близу нули а $\sin d\psi = 0$ $\cos d\psi = 1$

имамо да је: $\sigma + d\sigma = \sigma - \overline{BB_1} \cos\mu$

или $-\overline{BB_1} \cos\mu = d\sigma \ldots 3$

Сад ако вредност из једначина 1, 2 i 3 уврстимо у једначину I добијемо:

$$r dv = \sigma\, d\psi \cos\beta + d\,\sigma \sin\beta \ldots \text{II.}$$

Овај нам израз претставља диференцијалну једначину преваљеног лука. Само у горњој једначини видимо величине σ и β, које се не могу измерити па ћемо на место њих увести димензије, које се могу мјерити т. ј. димензије инструмента. Тако из трокута PSB имамо:

$$\alpha + \beta + \varphi - \psi = 180 \ldots a$$
$$\sigma \sin\beta = \rho \sin\alpha \ldots b$$

и пројицирајући у истом трокуту PS и PB на BS имамо:

$$a + b = \rho \cos\alpha + \sigma \cos\beta \ldots c$$

Ако диференцирамо једначине „a“ и „b“ добијемо

$$d\alpha + d\beta + d\varphi - d\psi = 0 \ldots a'$$
$$\sin\beta\, d\,\sigma + \sigma \cos\beta d\beta = \sin\alpha\, d\rho + \rho \cos\alpha\, d\alpha \ldots b'$$

из једначине a′ имамо: $d\beta = d\psi - (d\alpha + d\varphi)$ па ако ту вредност уврстимо у једначину b′ имамо:

$$\sin\beta\, d\sigma + \sigma\cos\beta\, d\psi = \sigma\cos\beta\,(d\alpha + d\varphi) + \sin\alpha\, d\rho + \rho\cos\alpha\, d\alpha,$$ а

из једначине „c" имамо: $\sigma\cos\beta = a + b - \rho\cos\alpha \;\ldots\; c'$.

Ако сад вредности из једначина a′ b′ и c′ уврстимо у једначину II имамо:

$$rdv = \sigma\cos\beta\,(d\alpha + d\varphi) + \sin\alpha\, d\rho + \rho\cos\alpha\, d\alpha$$

или $rdv = (a + b - \rho\cos\alpha)\,(d\alpha + d\varphi) + \sin\alpha\, d\rho + \rho\cos\alpha\, d\alpha$

или $rdv = (a+b)\, d\alpha - \rho\cos\alpha\, d\alpha + (a+b-\rho\cos\alpha)\, d\varphi + \sin\alpha\, d\rho + \rho\cos\alpha\, d\alpha$

те даље редукцијом добијамо да је:

$$rdv = \sin\alpha\, d\rho + (a + b)\, d\alpha + (a + b - \rho\cos\alpha)\, d\varphi \;\ldots\; \text{III}.$$

Диференцијална величина rdv рекли смо да претставља дужину лука точкића, који одговара диференцијалном помаку шиљка планиметровог ds. Интегриран израз за rdv унутар неких одређених граница дао би читаву развијену дужину лука точкића, односно путању коју би прешли са шиљком планиметровим регистровану и изражену у јединицама и мјерилу нанешеном на точкићу. Та дужина лука измножена с константом планиметра треба да је тражена површина лика.

Да би једначину III могли интегрирати треба да извршимо још неке замене у њој.

Из трокута PAS имамо да је:

$$c^2 = a^2 + \rho^2 - 2\, a\rho\cos\alpha \quad \text{одакле}$$

$$\rho\cos\alpha = \frac{a^2+\rho^2-c^2}{2\,a} \qquad \text{или} \quad \cos\alpha = \frac{a^2+\rho^2-c^2}{2\,a\,\rho}$$

$$\text{или} \qquad \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2+\rho^2-c^2}{2\,a\,\rho}\right)^2} = F(\rho)$$

ако те вредности уврстимо у једначину III добијемо:

$$rdv = F(\rho)d\rho + (a + b)\, d\alpha + \left(a + b - \frac{a^2+\rho^2-c^2}{2a}\right) d\varphi$$

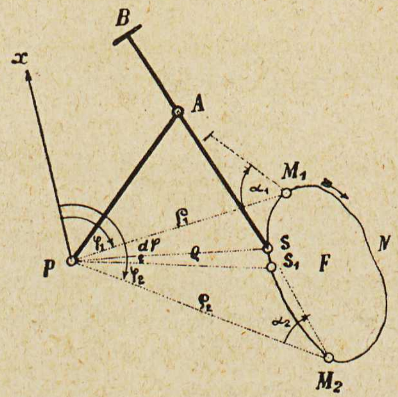
$$\text{или} \quad rdv = F(\rho)d\rho + (a + b)\, d\alpha + \left(\frac{2a^2+2ab-a^2-\rho^2+c^2}{2a}\right) d\varphi$$

$$\text{или} \quad ardv = -\frac{\rho^2}{2}\, d\varphi + \frac{a^2+2ab+c^2}{2}\, d\varphi + a\,(a + b)\, d\alpha + aF(\rho)\, d\rho \;\ldots\; \text{IV}.$$

Одавле интеграцијом добивамо величину окретаја точкића за становита покретања шиљка „s", а једнвчина IV. назива се диференцијална једначина поларног планиметра.

Као што је познато ми разликујемо два случаја код одређивања површина с поларним планиметром и то:

1.) Кад пол планиметра лежи изван лика чију површину одређујемо.
2.) Кад пол планиметра лежи у самом лику чију површину тражимо.

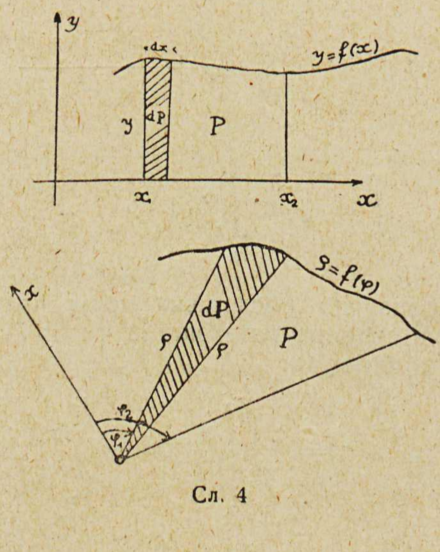


Сл. 3

Ad. 1.

Ако је лик чију површину тражимо мален, то ће поступак при одређивању површине бити следећи:

Поставимо ли планиметар како то слика 3 показује, те ако са шиљком планиметра S дођемо из M_1 преко N у M_2, то нам онда члан $-\frac{\rho_I^2}{2}d\varphi$ из једначине IV; интегриран унутар граница φ_1 и φ_2 ако је $\rho_I = f_I\cdot(\varphi)$ што је заправо једначина кривуље M_1NM_2, преставља површину сектора $M_1PM_2NM_1 = P_1$ јер знамо да одређени интеграл неке функције унутар неких пораметара претставља површину, коју чине графикон те функције координантне осовине или радиуси вектори унутар одређених пораметара, што је шематички приказано у ове двије скице слике 4.



Сл. 4

Из слике 4 се види да је: $dP = ydx$

$$P = \int_{x_1}^{x_2} ydx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

$$\text{ili } dP = \frac{\rho.\rho}{2} \sin d\varphi = \frac{\rho^2}{2} d\varphi$$

$$P = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\rho^2}{2} d\varphi$$

Ако уз то узмемо у обзир и друге чланове једначине IV. унутар граница φ_1 и φ_2, α_1 и α_2 и ρ_1 и ρ_2, а за окретај точкића узмемо границе v_1 и v_2 то добијемо:

$$ar \int_{v_1}^{v_2} dv = ar(v_2 - v_1) = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\rho_I^2}{2} d\varphi + \frac{a^2+2ab+c^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + a\,(a+b)$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha + a \int_{\rho_1}^{\rho_2} F(\rho)\,d\rho \ \dots \ A$$

Покреће ли се шиљак S од M_2 преко SS_1 према M_1 натраг то опет добивамо ако је, $\rho_{II} = f_{II}(\varphi)$ а то је заправо једначина кривуље $M_2SS_1M_1$, да је члан $-\frac{\rho_{II}^2}{2} d\varphi$ интегриран унутар граница φ_2 и φ_1, површина сектора $M_2PM_1SS_1M_2 = P_2$, те и за кривуљу $M_2SS_1M_1$ можемо писати

$$ar \int_{v_2}^{v_1^1} dv = ar(v^1 - v_2) = -\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\rho_{II}^2}{2} d\varphi + \frac{a^2+2ab+c^2}{2} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi + a\,(a+b)$$

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} d\alpha + a \int_{\rho_2}^{\rho_1} F(\rho)\,d\rho \ \dots \ B$$

Пошто су предзнаци последњих трију чланова једначина A и B услед промена граница интеграције различити то сабирајући једначине A и B добијемо:

$$ar\ (v_1^1 - v_1) = -\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\rho_I^2}{2} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\rho_{II}^2}{2} d\varphi\right]$$

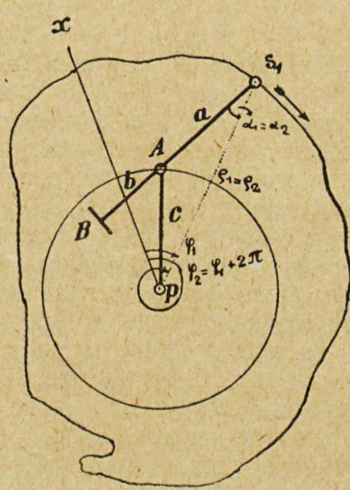
$$\text{где је} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\rho_I^2}{2} d\varphi = P_1 \text{ а } \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\rho_{II}^2}{2} d\varphi = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\rho_{II}^2}{2} d\varphi = - P_{II}$$

$$\text{а } P = P_1 - P_2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\rho_I^2}{2} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\rho_{II}^2}{2} d\varphi = - ar\,(v_1^1 - v_1$$

$$\text{или} \quad P = - ar\,(v_1^1 - v_1) = ar\,(v_1 - v_1^1) = arv$$

где „v“ значи развијен лук точкића, тако да можемо писати $v = 2\pi . n^r$ где n^r значи очитање на почетку мање очитање на завршетку обиласка лика чију површину одређујемо.

Или даље $P = 2\pi ar . n^r$ ili $P = K.\ n^r$ где је $K = 2\pi ar$ и називамо је редукционом константом планиметра.



Сл. 5

Ad. 2. Ако се пол планиметра налази унутар лика чију површину одређујемо, то при обиласку са шиљком планиметра S од полазне тачке S_1 до поновног доласка шиљка у S_1, поједини чланови интеграла „А“ налазе се између следећих граница

$$\varphi_1 \text{ до } \varphi_2 = 2\pi + \varphi_1 \quad \alpha_2 = \alpha_1 \text{ и } \rho_2 = \rho_1$$

па према томе можемо писати:

$$- arv = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi} \frac{\rho^2}{2} d\varphi + \frac{a^2 + 2ab + c^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + 2\pi} d\varphi + (a+a) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2 = \alpha_1} d\alpha + a \int_{\rho_1}^{\rho_2 = \rho_1} F(\rho)\, d\rho \ldots C$$

$$\text{или} \quad - arv = - P + \frac{a^2 + 2ab + c^2}{2} . 2\pi \qquad \text{одакле је}$$

$$P = arv + (a^2 + 2ab + c^2)\pi$$ прије смо имали да је $v = 2\pi n^r$

$$P = 2\pi ar \,.\, n^r + (a^2 + 2ab + c^2)\pi$$

ако сад ставимо $2\pi ar = k$

$(a^2 + 2ab + c^2)\pi$ тада ће гласити једначина за површину код пола унутар лика,

$$P = K + kn^r$$

При томе значи n_r увек разлику између очитања на почетку и очитања на крају обилажења, па та разлика може да буде и негативна.

Ing. Бранко Борчић

ДОЗВОЉЕНО ОТСТУПАЊЕ ПРИ РАЧУНАЊУ ПОВРШИНА

У последњем броју Гласника под овим насловом изнио је г. Василије Живковић неколико интересантних мисли о досадашњим границама дозвољених отступања и уједно предложио нову формулу за величине дозвољених отступања при рачунању површина. Имајући у виду, да је „Гласник" гласило удружења свакако је на месту да се и млађи чланови јављају па макар и с новим и по мало револуционарним предлозима.

Ако се при томе кадкада мало и пренаглимо, зато су ту старији и искуснији да нас поправе и посаветују и на згодан начин на прави пут изведу. Битно је то, да што више људи сарађује и прати настојање Удружења преко Гласника. Најгоре је пак ако се читав интерес читаоца сведе на читање личних вести. У нади, да то није тако написаћемо пар речи и примедаба на чланак г. Василија Живковића са жељом да то не буде последње, што би се могло рећи о томе након искуства што га је готово сваки службеник стекао рачунајући површине. Многима је од нас пало на ум доста од тога, што је г. Василије Живковић изнео у своме чланку, али нико се не усуди, да та своја запажања изнесе, а поготово да их у математској форми изради. Госп. Живковић то учини и свима другима олакша да преко њега изнесу и своја мишљења.

Основна замисао која је и покренула г. Живковића, да се јави без сумње је здрава. Не може се човек помирити са чињеницом, да је дозвољено отступање за једну површину исто без обзира из колико се делова она рачуна и без обзира на облик и величину појединих делова те површине (парцела) с тим више што је и прибор (поларни планиметар) доста груба справа за мјерење — или како ми то обичније кажемо — рачунање површина. Дакле дозвољено отступање код рачунања површина не може бити исто за једну скупину од више парцела, кад се