ГЕОМЕТАРСКИ И ГЕОДЕТСКИ ГЛАСНИК
Орган Удружења Геометара и Геодета Краљевине Југославије
БЕОГРАД, Браће Југовића 16/I

Професор **Лав Сопоцко.**

РЕШЕЊЕ НОРМАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА У ВИШЕ ГРУПА

(наставак)*

4° ... Неодређено решење у две групе.

I. ... *Опште примедбе.* Израз непознатих нормалних једначина при изравнавању посредних или условних мерења у облику линеарних функција од мерених величина, односно од слободних чланова нормалних једначина, искоришћен је први пут у теорији изравнавања ради решења питања о квадратичким грешкама и тежинама непознатих и њихових функција, другим речима, ради потпунијег испитивања тачности мерених величина, њихових функција и резултата изравнавања[4]). У истом циљу искоришћавали су се изрази корелата помоћу слободних чланова условних једначина (код Helmert'а види стр. 236 и даље). Због тога је се гледала општа теорија неодређеног решења нормалних једначина, као помоћно сретство испитивања тачности мерења, а као основни начин решења био је и остаје још досада, у већини случајева изравнавања, начин бројног решења по алгоритму Гауса.

У вези са алгоритмом Гауса, а за случајеве, кад се тражи нарочито детаљно испитивање тачности изравнатих резултата и ради тога се рачунају, упоредо са решењем нормалних једначина, још т. зв. *којефицијенти тежине*, F. R. Helmert је израдио оригиналан начин решења, чији формулар за практичну примену претставља прво стварно решење нормалних једначина у неодређеном облику (у поменутој књизи Helmert'а види стр. 149-158).

Ипак, нарочити значај неодређеног решења за изравнавање тријангулације почео је да добива израза тек после објављивања радова *L. Krüger'а*[5]). Али је први *Болц*, као што смо споменули у уводу, дао разрађену теорију неодређеног решења и практички њу применио ка решењу у једној целини више од 600 условних једначина.

Поред непосредне важности за изравнавање резултата мерења начин неодређеног решења има да одигра пресудну улогу

*) Види Геом. и Геод. Гласник, 1940, св. 3, стр. 177-194.

[4]) Види, например, *F. R. Helmert*. Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinesten Quadrate. Zweite Auflage. Leipzig und Berlin, 1907. стр. 103 и даље; стр. 125 и даље.

[5]) *L. Krüger* Zur Ausgleichung der Wiedersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrische Netze. Veröf. des K. Preuss. Institutes. Neue Folge N 25 Postdam 1906.

при теоријским истраживањима у области процене тачности мерених величина и њеног довођења у сагласност са практичким могућностима и задацима, о чему казаћемо деталније нешто касније на погодном месту нашег излагања.

II. ... *О неким својствима линеарних функција и једначина.* Пошто нормалне једначине претстављају нарочиту врсту линеарних једначина, споменућемо овде, а ради лакшег схватања изведених математичких трансформација, неке од својстава линеарних функција и једначина, која се искоришћавају у тим трансформацијама.

Пре свега додирнућемо питање ознака (симболизације), којима ћемо служити у математичким изразима.

Којефицијенти непознатих функција или једначине имаће два доња индекса, слична индексима помоћних корелата; први индекс одговара редном броју функције, односно, једначине, у њиховим системима, док други одговара редном броју непознате, другим речима, њеном месту у финкцији или једначини. Тако из индекса којеф-та a_{23} се види да он припада систему другој по реду ф-ији, односно, једначини и у њој се односи на трећу по реду непознату.

Непознате, слободни чланови и ф-ије имају само по један доњи индекс који означава: за непознате — њено место (редни број) код ф-ије, односно, код једначине и према томе подудара се са другим индексом свог коејф-та; за слободне чланове и ф-ије — место ф-ије, односно, једначине у њеном систему и зато индекси слободног члана, ф-ије (једначине) и први индекс којеф-та код непознатих исте ф-ије (једначине) су идентични.

Систем доњих дуплих индекса омогућава употребу само једног слова за све којеф-те, или непознате, или ф-ије итд.

Тамо, где то дозвољава ток разлагања, ћемо цео систем ф-ија, односно, једначина изражавати само једном ф-ијом или једначином општег облика.

Систем линеарних ф-ија f са n непознатих x са којеф-има а и слободним члановима w можемо написати, онда, у облику:

$$(36) \ldots \qquad f_m = a_{m.1}\,x_1 + a_{m.2}\,x_2 + \cdots + a_{m.n}\,x_n + w_m.$$

Број ν ф-ија (једначина) у једном те истом систему може да буде мањи, једнак или већи од броја непознатих.

Случај, кад је $\nu < n$, одговара у примењеној Геодезији случају условних мерења.

Случај, кад је $\nu = n$ одговара случају посредних мерења, кад се задовољавају одређивањем непознатих x_1, x_2 ... x_n без оцене тачности њихових вредности.

Најзад, случај, кад $\nu > n$, односи се на посредна мерења, чији резултати подлежу изравнавању и оцени тачности.

Кад је у (36) функционална вредност позната (добита, например, мерењем), а траже се вредности непознатих x_1, x_2 ... x_n, онда се ф-ија претвара у једначину, где вредност ф-ије f_m игра улогу саставног дела слободног члана једначине. Означимо $f_m + w_m = W_m$, онда се израз (36) препише у облику једначине:

$$(36^*) \ldots \quad a_{m.1}\, x_1 + a_{m.2}\, x_2 + \cdots + a_{m.n}\, x_n + W_m = 0.$$

Ф-ије у систему (36) имају облик *редуцираних* ф-ија. Кад у изразе, који представљају ф-ије у једном истом систему, улазе више но једна од ф-ија система, они ће претстављати систем *нередуцираних* ф-ија.

Општи облик система нередуцираних ф-ија је следећи:

$$(37) \ldots \quad b_{m.1}\, f_1 + b_{m.2}\, f_2 + \ldots + b_{m.r}\, f_r = a_{m.1}\, x_1 + a_{m.2}\, x_2 + \ldots + a_{m.n}\, x_n + w_m.$$

Пошто у систему редуцираних ф-ија свака од њих има свој израз (36), из тога следи да у сваком систему број ф-ија одговара броју израза (36), који сачињавају систем.

Редукција нередуцираног система линеарних једначина може се извести путем комбинираног множења (делења) појединих израза (37) система на константне множитеље и сабирања (одузимања) неколико или свију помножених израза.

Као пример за редукцију узмемо систем од две ф-ије y_1 и y_2 са три непознате x_1, x_2, x_3:

$$(а) \ldots \quad \begin{aligned} 3y_1 + 5y_2 - 1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4, \\ 9y_1 + y_2 + 6 &= 3x_1 + x_2 + x_3 - 2. \end{aligned}$$

Преносимо слободне чланове са леве на десну страну и после множења друге од ф-ија са 5 елиминишемо y_2 одузимањем од помножене ф-ије прве ф-ије; онда добијамо, —

$$(б) \ldots \quad 42y_1 = 14x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 45$$

а после поделе на 42, —

$$(в) \ldots \quad y_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{14}x_2 + \frac{1}{21}x_3 - \frac{15}{14}.$$

После елиминисања из система (*а*) ф-ије y_1 добићемо на сличан начин:

$$(г) \ldots \quad y_2 = 0.\, x_1 + \frac{5}{14}x_2 + \frac{4}{7}x_3 + \frac{23}{14}$$

Ако би се мерењем добиле вредности ф-ија y_1 и y_2, например, — $y_1 = 1$; $y_2 = 2$, онда или директно из система (*а*), или из редуцираних ф-ија (*в*) и (*г*) изишао би се систем једначина: из система (а), —

$$(д) \ldots \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 8 &= 0; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 19 &= 0; \end{aligned}$$

или из (в) и (г), —

$$(д^*) \ldots \quad \begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{14}x_2 + \frac{1}{12}x_3 - 2\frac{1}{14} &= 0, \\ 0.\, x_1 + \frac{5}{14}x_2 + \frac{4}{7}x_3 - \frac{5}{14} &= 0. \end{aligned}$$

Нарочите врсте линеарних једначина претстављају системе једначина грешака, односно условних једначина и системе нормалних једначина.

За једначине грешака и условне једначине сачувамо ознаке, усвојене у теорији изравнавања, дакле, којеф-ти се означују словима латинског алфавита истим за сваку поједину непознату, односно поједину једначину са једним доњим индексом, који одговара редном броју једначине грешака, односно непознате; слободни чланови имају индекс који одговара редном броју једначине.

Општи облик једначина грешака је следећи, —

$$(38) \ldots \quad a_m(1) + b_m(2) + \ldots + n_m(n) + l_m = \lambda_m$$

а за условне једначине — следећи:

$$(38^*) \ldots \quad m_1(1) + m_2(2) + \ldots + m_n(n) + w_m = 0.$$

Број непознатих у системима једначина грешака, односно условних једначина, у случају изравнавања: у једначинама грешака увек је мањи од броја једначина, а за условне једначине увек је већи од броја једначина.

За нормалне једначине задржавамо ознаку којеф-ата са дуплим доњим индексом.

Тако систем од три нормалне једначине ће се написати:

$$(39) \ldots \quad \begin{aligned} a_{1\cdot1}x_1 + a_{1\cdot2}x_2 + a_{1\cdot3}x_3 + w_1 &= 0, \\ a_{2\cdot1}x_1 + a_{2\cdot2}x_2 + a_{2\cdot3}x_3 + w_2 &= 0, \\ a_{3\cdot1}x_1 + a_{3\cdot2}x_2 + a_{3\cdot3}x_3 + w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Дупли индекси којеф-ата нормалних једначина поред горе поменутог имају још свој специалан значај, и то: први означује редни број условне једначине, чији којеф-ти улазе као први множитељи у дупле производе од којих се формирају којеф-ти нормалне једначине, а други одговара редном броју друге условне једначине, одакле се узимају други множитељи у дуплим производима. За једначине грешака први индекс којефата одговара индексу непознате, чији којеф-ти улазе у производ, као први множитељи, а други — индекс друге непознате, чији се којеф-ти узимају као други множитељи. Тако за систем (39) имамо:

$$(39^*) \ldots \quad \begin{aligned} a_{1\cdot1} &= a_1a_1 + a_2a_2 + \ldots + a_m a_m = (aa), \\ a_{1\cdot2} &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_m b_m = (ab), \\ a_{2\cdot2} &= b_1b_1 + b_2b_2 + \ldots + b_m b_m = (bb), \\ a_{3\cdot2} &= c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_m b_m = (cb), \end{aligned}$$

и т. д.

Како је познато, којеф-ти нормалних једначина имају следеће особине, —

1... Т. зв. *квадратички* којеф-ти, тј. они који стоје код непознатих односно корелата, чији је индекс идентичан са редним бројем нормалне једначине, увек су позитивни;

II . Остали којеф-ти који се зову *неквадратички*, могу да буду и позитивни и негативни, при томе коеф-ти који су у систему нормалних једначина постављени симетрично према положају квадратичких, једнаки су; тако за систем (39) имамо:

$$(39^{**}) \ldots \qquad a_{1\cdot 2} = a_{2\cdot 1}\,;\; a_{1\cdot 3} = a_{3\cdot 1}\,;\; a_{2\cdot 3} = a_{3\cdot 2}$$

За општи случај ово својство неквадратичких којеф-ата изражава једнакост, —

$$(40) \ldots \qquad a_{p.q} = a_{q.p}\,, \text{ где } p \neq q.$$

III... *Изрази за неодређено решење линеарних једначина.* У систему линеарних ф-ија, —

$$(41) \ldots \qquad \begin{aligned} f_1 &= a_{1\cdot 1}\, x_1 + a_{1\cdot 2}\, x_2 + \ldots + a_{1\cdot m}\, x_m, \\ f_2 &= a_{2\cdot 1}\, x_1 + a_{2\cdot 2}\, x_2 + \ldots + a_{2\cdot m}\, x_m, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ f_m &= a_{m.1}\, x_1 + a_{m.2}\, x_2 + \ldots + a_{m.m}\, x_m \end{aligned}$$

кад је број непознатих једнак са бројем ф-ија, непознате могу се сматрати као ф-ије (обрнуте) од променљивих *fp* дате у нередуцираном облику. После редукције добијамо систем обрнутих линеарних ф-ија, —

$$(41^{*}) \ldots \qquad \begin{aligned} x_1 &= b_{1\cdot 1}\, f_1 + b_{1\cdot 2}\, f_2 + \ldots\, b_{1\cdot m}\, f_m\,, \\ x_2 &= b_{2\cdot 1}\, f_1 + b_{2\cdot 2}\, f_2 + \ldots\, b_{2\cdot m}\, f_m\,, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ x_m &= b_{m.1}\, f_1 + b_{m.2}\, f_2 + \ldots\, b_{m.m}\, f_m\,. \end{aligned}$$

који претставља према почетном систему *неодређено решење* за непознате x_1, $x_2 \ldots x_m$ у односу на променљиве f_1, $f_2 \cdots f_m$.

За систем нормалних једначина (39) неодређено решење се напише у облику:

$$(42) \ldots \qquad \begin{aligned} x_1 &= f_{1\cdot 1}\, w_1 + f_{1\cdot 2}\, w_2 + f_{1\cdot 3}\, w_3, \\ x_2 &= f_{2\cdot 1}\, w_1 + f_{2\cdot 2}\, w_2 + f_{2\cdot 3}\, w_3, \\ x_3 &= f_{3\cdot 1}\, w_1 + f_{3\cdot 2}\, w_2 + f_{3\cdot 3}\, w_3. \end{aligned}$$

Којеф-ти овог решења имају својства слична горе наведеним својствима којеф-ата нормалних једначина:

I. ... Квадратички којефицијенти $f_{1\cdot 1}$, $f_{2\cdot 2}$, $f_{3\cdot 3}$, увек имају негитивни предзнак, пошто су ф-ије x_1, x_2, x_3 обрнуте према почетним f_1, f_2, f_3.

II. ... Предзнак неквадратичких којеф-ата је произвољан; они су симетрични према квадратичким и за њих важи једнакост (40); дакле, —

$$(42^{*}) \ldots \qquad f_{1\cdot 2} = f_{2\cdot 1};\; f_{1\cdot 3} = f_{3\cdot 1};\; f_{2\cdot 3} = f_{3\cdot 2}$$

Ова ће се својства потврдити по следећим расматрањима.

Прелаз од система (39) ка систему неодређеног решења (42) може се извести, између других, и на следећи начин:

Изразимо слободне чланове, као ф-ије од непознатих нормалних једначина, —

$$(43) \ldots \quad \begin{aligned} w_1 &= -a_{1\cdot1}x_1 - a_{1\cdot2}x_2 - a_{1\cdot3}x_3, \\ w_2 &= -a_{2\cdot1}x_1 - a_{2\cdot2}x_2 - a_{2\cdot3}x_3, \\ w_3 &= -a_{3\cdot1}x_1 - a_{3\cdot2}x_2 - a_{3\cdot3}x_3. \end{aligned}$$

Помножимо ф-ије овог система на неодређене множитеље — $L_{1\cdot1}$, $L_{1\cdot2}$, $L_{1\cdot3}$ и производе саберемо:

$$(44) \ldots \quad \begin{aligned} L_{1\cdot1}w_1 + L_{1\cdot2}w_2 + L_{1\cdot3}w_3 = &-(a_{1\cdot1}L_{1\cdot1} + a_{1\cdot2}L_{1\cdot2} + a_{1\cdot3}L_{1\cdot3})x_1, \\ &-(a_{2\cdot1}L_{1\cdot1} + a_{2\cdot2}L_{1\cdot2} + a_{2\cdot3}L_{1\cdot3})x_2, \\ &-(a_{3\cdot1}L_{1\cdot1} + a_{3\cdot2}L_{1\cdot2} + a_{3\cdot3}L_{1\cdot3})x_3. \end{aligned}$$

Сада изаберемо вредности $L_{1\cdot1}$. $L_{1\cdot2}$, $L_{1\cdot3}$ тако, да би оне задовољавале систем једначина, —

$$(44^*) \ldots \quad \begin{aligned} a_{1\cdot1}L_{1\cdot1} + a_{1\cdot2}L_{1\cdot2} + a_{1\cdot3}L_{1\cdot3} &= -1, \\ a_{2\cdot1}L_{1\cdot1} + a_{2\cdot2}L_{1\cdot2} + a_{2\cdot3}L_{1\cdot3} &= 0, \\ a_{3\cdot1}L_{1\cdot1} + a_{3\cdot2}L_{1\cdot2} + a_{3\cdot3}L_{1\cdot3} &= 0. \end{aligned}$$

Ове вредности неодређених множитеља трансформираће једначину (44**) на следећу:

$$(44^{**}) \ldots \quad L_{1\cdot1}w_1 + L_{1\cdot2}w_2 + L_{1\cdot3}w_3 = x_1$$

Упоређујући последњу једначину са првом у систему (42), видимо да су обадве идентичне и да, —

$$(45) \ldots \quad f_{1\cdot1} = L_{1\cdot1};\ f_{1\cdot2} = L_{1\cdot2};\ f_{1\cdot3} = L_{1\cdot3}$$

С друге, пак, стране вредности т. зв. *којеф-ата тежине* при одређивању тежина оних величина, које се рачунају из нормалних једначина, добијају се из система једначина идентичног систему (44*), из чега следи да *су неодређени множитељи ништа друго но прва група којеф-ата тежине* за систем (39), нормалних једначина (в. код F. R. Helmert'a, опаска 4, стр. 125 и сл.)

За трансформирање друге од ф ија (43) искоришћујемо на сличан начин другу групу неодређених множитеља — $L_{2\cdot1}$, $L_{2\cdot2}$, $L_{2\cdot3}$, за трансформирање треће ф-ије трећу групу — $L_{3\cdot1}$, $L_{3\cdot2}$, $L_{3\cdot3}$, и за сваку од њих долазимо до закључка да су оне идентичне са одговарајућим групама којеф-ата тежине, на основу чега можемо да напишемо, —

$$(45^*) \ldots \quad \begin{aligned} f_{1\cdot1} = L_{1\cdot1} = Q_{1\cdot1};\ f_{1\cdot2} = L_{1\cdot2} = Q_{1\cdot2};\ f_{1\cdot3} = L_{1\cdot3} = Q_{1\cdot3}, \\ f_{2\cdot1} = L_{2\cdot1} = Q_{2\cdot1};\ f_{2\cdot2} = L_{2\cdot2} = Q_{2\cdot2};\ f_{2\cdot3} = L_{2\cdot3} = Q_{2\cdot3}, \\ f_{3\cdot1} = L_{3\cdot1} = Q_{3\cdot1};\ f_{3\cdot2} = L_{3\cdot2} = Q_{3\cdot2};\ f_{3\cdot3} = L_{3\cdot3} = Q_{3\cdot3}. \end{aligned}$$

Q је уобичајена ознака за којеф-те тежине. Пошто они имају својство симетрије, онда ово својство имају и којф-ти обрнутих ф-ија (42), односно којф-ти неодређеног решења.

Дакле и за них важи једнакост (40):

$$(46) \ldots \quad f_{p\cdot q} = f_{q\cdot p},\ \text{где}\ p \neq q.$$

IV .. *Неодређено решење нормалних једначина по алгоритму Гауса.* Ради што веће прегледности и јасноће општег формулара бр. 2 за рачунање по алгоритму Гауса заменимо ознаку, уведену од Гауса, за којеф-те трансформираних и редукованих нормалних једначина, новом чију је идеју дао Helmert (в. опаску 4, стр. 120-127)

Треба напоменути да трансформиране једначине у Гаусовом алгоритму су оне, код којих су елиминисане једна или више непознатих, док су редуциране оне, код којих је којеф-т прве по реду непознате редуциран на јединицу.

За трансформиране којеф-те сачуваћемо ознаку почетног система једначина са додатком горњег индекса који обележава редни број (степен) трансформације; за индекс узећемо, — за мали степен трансформације — једну, две, три итд. цртице, а за веће — римске цифре.

За којеф-те слободних чланова, кад су нормалне једначине изражене у општој форми, што је случај код неодређеног решења, узмемо слово *b*.

Редуцирани којеф-ти непознатих означавају се са грчким словом τ, док редуцирани којеф-ти слободних чланова — са χ; степен редукције обележава се на исти начин, као и код случаја трансформирања. За редуциране збирове којеф-ата важи ознака σ, означујући при томе горњим индексом степен трансформације, односно редукције.

Збирове чланова за трансформацију означићимо стављањем испред збира одговарајуће једначине грчког слова Δ, а фактичке збирове којеф-ата редуцираних једначина са Σ.

Напишемо систем нормалних једначина са три непознате у општем облику:

$$
(47) \ldots \begin{aligned}
a_{1\cdot1}x_1 + a_{1\cdot2}x_2 + a_{1\cdot3}x_3 + b_{1\cdot1}w_1 + b_{1\cdot2}w_2 + b_{1\cdot3}w_3 &= 0,\\
a_{2\cdot1}x_1 + a_{2\cdot2}x_2 + a_{2\cdot3}x_3 + b_{2\cdot1}w_1 + b_{2\cdot2}w_2 + b_{2\cdot3}w_3 &= 0,\\
a_{3\cdot1}x_1 + a_{3\cdot2}x_2 + a_{3\cdot3}x_3 + b_{3\cdot1}w_1 + b_{3\cdot2}w_2 + b_{3\cdot3}w_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Пошто у састав сваке нормалне једначине почетног система улази само по један слободан члан, који непосредно одговара једначини, док су слободни чланови осталих отсутни, то:

$$
(48) \ldots \begin{aligned}
b_{1\cdot1} = b_{2\cdot2} = b_{3\cdot3} = 1;\\
b_{1\cdot2} = b_{2\cdot1} = b_{1\cdot3} = b_{3\cdot1} = b_{2\cdot3} = b_{3\cdot2} = 0.
\end{aligned}
$$

Из последњих једнакости се види да којеф-ти слободних чланова имају исто својство симетрије, као што и којеф-ти непознатих нормалних једначина.

Збирови којеф-ата у систему (47) а на основу (48) једнаки су

$$
(49) \ldots \begin{aligned}
s_1 &= a_{1\cdot1} + a_{1\cdot2} + a_{1\cdot3} + b_{1\cdot1} + b_{1\cdot2} + b_{1\cdot3} = a_{1\cdot1} + a_{1\cdot2} + a_{1\cdot3} + 1;\\
s_2 &= a_{2\cdot1} + a_{2\cdot2} + a_{2\cdot3} + b_{2\cdot1} + b_{2\cdot2} + b_{2\cdot3} = a_{2\cdot1} + a_{2\cdot2} + a_{2\cdot3} + 1;\\
s_3 &= a_{3\cdot1} + a_{3\cdot2} + a_{3\cdot3} + b_{3\cdot1} + b_{3\cdot2} + b_{3\cdot3} = a_{3\cdot1} + a_{3\cdot2} + a_{3\cdot3} + 1.
\end{aligned}
$$

Формулар бр. 2 за рачунање алгоритма Гауса је следећи:

Формулар бр. 2

I	$a_{1\cdot1}$	$a_{1\cdot2}$	$a_{1\cdot3}$	$b_{1\cdot1}$	$b_{1\cdot2}$	$b_{1\cdot3}$	s_1	
I′	$+1$	$\tau'_{1\cdot2}$	$\tau'_{1\cdot3}$	$\chi'_{1\cdot1}$	$\chi'_{1\cdot2}$	$\chi'_{1\cdot3}$	Δs_1	σ'_1
II		$a_{2\cdot2}$	$a_{2\cdot3}$	$b_{2\cdot1}$	$b_{2\cdot2}$	$b_{2\cdot3}$	s_2	
Δ II		$-\tau'_{1\cdot2}\,a_{1\cdot2}$	$-\tau'_{1\cdot2}\,a_{1\cdot3}$	$-\tau'_{1\cdot2}\,b_{1\cdot1}$	$-\tau'_{1\cdot2}\,b_{1\cdot2}$	$-\tau'_{1\cdot2}\,b_{1\cdot3}$	Δs_2	$-\tau'_{1\cdot2}\,s_1$
III			$a_{3\cdot3}$	$b_{3\cdot1}$	$b_{3\cdot2}$	$b_{3\cdot3}$	s_3	
Δ III			$-\tau'_{1\cdot3}\,a_{1\cdot3}$	$-\tau'_{1\cdot3}\,b_{1\cdot1}$	$-\tau'_{1\cdot3}\,b_{1\cdot2}$	$-\tau_{1\cdot3}\,b_{1\cdot3}$	Δs_3	$-\tau'_{1\cdot3}\cdot s_1$
II_1		$a'_{2\cdot2}$	$a'_{2\cdot3}$	$b'_{2\cdot1}$	$b'_{2\cdot2}$	$b'_{2\cdot3}$	Σ'_2	s'_2
II'_1		$+1$	$\tau''_{2\cdot3}$	$\chi''_{2\cdot1}$	$\chi''_{2\cdot2}$	$\chi''_{2\cdot3}$	$\Delta\Sigma'_2$	σ''_2
III_1			$a'_{3\cdot3}$	$b'_{3\cdot1}$	$b'_{3\cdot2}$	$b'_{3\cdot3}$	Σ'_3	s'_3
Δ III_1			$-\tau''_{2\cdot3}\,a'_{2\cdot3}$	$-\tau_{2\cdot3}\,b'_{2\cdot1}$	$-\tau''_{2\cdot3}\,b'_{2\cdot2}$	$-\tau''_{2\cdot3}\,b'_{2\cdot3}$	$\Delta\Sigma_3$	$-\tau''_{2\cdot3}\,\Sigma_2$
III_2			$a''_{3\cdot3}$	$b''_{3\cdot1}$	$b''_{3\cdot2}$	$b''_{3\cdot3}$	Σ''_3	s''_3
III'_2			$+1$	$\chi'''_{3\cdot1}$	$\chi'''_{3\cdot2}$	$\chi'''_{3\cdot3}$	$\Delta\Sigma''_3$	σ'''_3
$x_3=$				$f_{3\cdot1}$	$f_{3\cdot2}$	$f_{3\cdot3}$	$[f_3]$	$-\Delta\Sigma''_3+1$
$-\chi''_{2\cdot m}=$				$-\chi''_{2\cdot1}$	$-\chi''_{2\cdot2}$	$-\chi''_{2\cdot3}$	$[-\chi_2]$	$-\Delta\Sigma'_2+\delta s''_2$
$-\tau''_{2\cdot3}\,x_3=$				$-\tau''_{2\cdot3}\,f_{3\cdot1}$	$-\tau''_{2\cdot3}\,f_{3\cdot2}$	$-\tau''_{2\cdot3}\,f_{3\cdot3}$	$\Delta_{2\cdot3}$	$-\tau''_{2\cdot3}[f_3]$
$x_2=$				$f_{2\cdot1}$	$f_{2\cdot2}$	$f_{2\cdot3}$	$[f_2]$	$[\chi_2]+\Delta_{2\cdot3}$
$\chi'_{1\cdot m}=$				$-\chi'_{1\cdot1}$	$-\chi'_{1\cdot2}$	$-\chi'_{1\cdot3}$	$[-\chi'_1]$	$[-\chi_1]+\Delta s_1$
$-\tau'_{1\cdot3}\,x_3=$				$-\tau'_{1\cdot3}\,f_{3\cdot1}$	$-\tau'_{1\cdot3}\,f_{3\cdot2}$	$-\tau'_{1\cdot3}\,f_{3\cdot3}$	$\Delta_{1\cdot3}$	$-\tau'_{1\cdot3}[f_3]$
$-\tau'_{1\cdot2}\,x_2=$				$-\tau'_{1\cdot2}\,f_{2\cdot1}$	$-\tau'_{1\cdot2}\,f_{2\cdot2}$	$-\tau'_{1\cdot2}\,f_{2\cdot3}$	$\Delta_{1\cdot2}$	$-\tau'_{1\cdot2}[f_2]$
$x_1=$				$f_{1\cdot1}$	$f_{1\cdot2}$	$f_{1\cdot3}$	$[f_1]$	$[-\chi'_1]+\Delta_{1\cdot3}+\Delta_{1\cdot2}$

У редовима I, II, III се уписују којеф-ти почетног система (39) нормалних једначина, а у контролни стубац s — њихови збирови.

Пре свега се редуцира прва од почетних нормалних једначина чији редуковани чланови, —

(а) ... $\tau'_{1\cdot1} = a_{1\cdot1} : a_{1\cdot1} = 1;\ \tau'_{1\cdot2} = a_{1\cdot2};\ a_{1\cdot1};\ \tau'_{1\cdot3} = a_{1\cdot3} : a_{1\cdot1}$ ...

$\chi'_{1\cdot1} = b_{1\cdot1} : a_{1\cdot1} : \chi'_{1\cdot2} = b_{1\cdot2} : a_{1\cdot1};\ \chi'_{1\cdot3} = b_{1\cdot3} : a_{1\cdot1}$ ...

који се уписују у ред I′.

Ради контроле се рачуна редуцирани збир, —

(а) ... $\sigma'_1 = s_1 : a_{1\cdot1}$

који треба да се подудара, у границама тачности заокруживања, са збиром Δs_1 редуцираних којеф-ата, —

(б) ... $\Delta s_1 = 1 + \tau'_{1\cdot2} + \tau'_{1\cdot3} + \chi'_{1\cdot1} + \chi'_{1\cdot2} + \chi'_{1\cdot3} = \sigma'_1$

Редуцирани збир σ′ се уписује у други контролни стубац *p*.

Чланови за трансформацију II, III, ... једначине се налазе испод којеф-ата за трансформацију у редовима Δ II, Δ III, ...

(в) ... $-\tau'_{1\cdot2}\cdot a_{1\cdot2}$, ... $-\tau'_{1\cdot2}\cdot a_{1\cdot1}$; ... $-\tau'_{1\cdot3}\,a_{1\cdot3}$; ... —

— $\tau'_{1\cdot3}\,b_{1\cdot1}$; — $\tau'_{1\cdot3}\,b_{1\cdot2}$; ...

За контролу се рачунају чланови за трансформацију одговарајућих сбирова s_2, s_3, ... и уписују се у стубац *p:*

$$(\text{в}^*) \ldots \qquad -\tau'_{1\cdot2}\cdot s_1;\; -\tau'_{1\cdot3}\cdot s_1;\ldots$$

Први којеф ти једначина за трансформацију, који улазе, као први сабирци, у збир ве (49), при трансформацији се елиминишу, пошто су им одговарајући чланови за трансформацију увек једнаки по вредности и супротни по знаку; тако, —

$$(\text{г}) \ldots \begin{array}{l} \text{за } a_{1\cdot2} \text{ члан за трансформацију је } (-a_{1\cdot2}), \\ \;\text{„}\; a_{1\cdot3} \;\text{„}\;\;\text{„}\;\;\text{„}\;\;\text{„}\; (-a_{1\cdot3}), \\ \qquad\text{итд.} \end{array}$$

Збирови чланова за трансформацију сваке једначине се рачунају по образцима, —

$$(50) \ldots \begin{array}{l} \Delta s_1 = -a_{1\cdot2} - \tau'_{1\cdot2}a_{2\cdot2} - \tau'_{1\cdot2}a_{1\cdot3} - \tau'_{1\cdot2}b_{1\cdot1} - \tau'_{1\cdot2}\cdot b_{1\cdot2} - \tau'_{1\cdot2}b_{1\cdot3}, \\ \Delta s_2 = -a_{1\cdot3} - \tau'_{1\cdot2}a_{1\cdot3} - \tau'_{1\cdot3}a_{1\cdot3} - \tau'_{1\cdot3}b_{1\cdot1} - \tau'_{1\cdot3}b_{1\cdot2} - \tau'_{1\cdot3}\cdot b_{1\cdot3}; \end{array}$$

они се уписују у контролни стубац *s* и морају се подударати, у границама тачности рачунања, са члановима за редукцију одговарајућих збирова уписатих у стубац *p*.

Прелаз од редова II. Δ II; III, Δ III; ... ка II′, III′, ... се изводи сабирањем којеф ата нормалних једначина са одговарајућим члановима за трансформацију:

$$(\text{д}) \ldots \begin{array}{l} a'_{2\cdot2} = a_{2\cdot2} - \tau'_{1\cdot2}a_{1\cdot2};\; a'_{2\cdot3} = a_{2\cdot3} - \tau'_{1\cdot2}a_{1\cdot3};\; a'_{3\cdot3} = a_{3\cdot3} - \tau'_{1\cdot3}a_{1\cdot3};\ldots \\ b'_{2\cdot1} = b_{2\cdot1} - \tau'_{1\cdot2}b_{1\cdot1};\; b'_{2\cdot2} = b_{2\cdot2} - \tau'_{1\cdot2}b_{1\cdot2};\; b'_{2\cdot3} = b_{1\cdot3} - \tau'_{1\cdot2}b_{1\cdot3};\ldots \\ b'_{3\cdot1} = b_{3\cdot1} - \tau'_{1\cdot3}b_{1\cdot1};\; b'_{3\cdot2} = b_{2\cdot2} - \tau'_{1\cdot3}b_{1\cdot2};\; b'_{3\cdot3} = b_{2\cdot3} - \tau'_{1\cdot3}b_{1\cdot};\ldots \\ s'_2 = s_2 + \Delta s_2;\; s'_3 = s_3 + \Delta s_3;\ldots \end{array}$$

Исправност рачунања којеф-ата трансформираних једначина контролише се њиховим збировима за сваку једначину:

$$(\text{е}) \ldots \begin{array}{l} \Sigma_1 = a'_{2\cdot2} + a'_{2\cdot3} + b'_{2\cdot1} + b'_{2\cdot2} + b'_{2\cdot3}; \\ \Sigma_2 = a'_{2\cdot3} + a'_{3\cdot3} + b_{3\cdot1} + b'_{3\cdot2} + b'_{3\cdot3}. \end{array}$$

који треба да буду идентични са величинама, —

$$(\text{е}^*) \ldots \qquad s'_2 = s_2 + \Delta s_2;\; s'_3 = s_3 + \Delta s_3;\ldots$$

У систему трансформираних једначина II′, III′, ... се изводи друга редукција прве једначине система и рачунају се чланови за другу трансформацију по истом плану, као што и при првој трансформацији.

Затим следи рачунање којеф-ата трансформираних једначина; трећа редукција; рачунање чланова за трећу трансформацију и тако редом, док не дођемо до трансформираног система од једне једначине, чија редукција доноси неодређено решење последње непознате.

У нашем случају то се збива после већ друге трансформације. Систем редуцираних једначина који служи за рачунање непознатих биће, онда, следећи:

$$(51) \ldots \quad \begin{aligned} x_1 + \tau'_{1\cdot2} x_2 + \tau'_{1\cdot3} x_3 + \chi'_{1\cdot1} w_1 + \chi'_{1\cdot2} w_2 + \chi'_{1\cdot3} w_3 &= 0, \\ x_2 + \tau''_{2\cdot3} x_3 + \chi''_{2\cdot1} w_1 + \chi''_{2\cdot2} w_2 + \chi''_{2\cdot3} w_3 &= 0, \\ x_3 + \chi'''_{3\cdot1} w_1 + \chi'''_{3\cdot2} w_2 + \chi'''_{3\cdot3} w_3 &= 0. \end{aligned}$$

одакле, —

$$(51^*) \ldots \quad \begin{aligned} x_3 &= -\chi'''_{3\cdot1} w_1 - \chi'''_{3\cdot2} w_2 - \chi'''_{3\cdot3} w_3 = f_{3\cdot1} w_1 + f_{3\cdot2} w_2 + f_{3\cdot2} w_3; \\ x_2 &= -\tau''_{2\cdot3} x_3 - \chi''_{2\cdot1} w_1 - \chi''_{2\cdot2} w_2 - \chi''_{2\cdot3} w_3 = f_{2\cdot1} w_1 + f_{2\cdot2} w_2 + f_{2\cdot3} w_3; \\ x_1 &= -\tau'_{1\cdot2} x_2 - \tau'_{1\cdot3} x_3 - \chi'_{1\cdot1} w_1 - \chi'_{1\cdot2} w_2 - \chi'_{1\cdot3} w_3 = f_{1\cdot1} w_1 + f_{1\cdot2} w_2 + \\ &\quad + f_{1\cdot3} w_3. \end{aligned}$$

Рачунање које се односи на (51*) уведено је у доњи део формулара бр. 2.

За x_3 само се преписују редуцирани којеф-ти $\chi'''_{3\cdot m}$ са супротним предзнаком. За контролу рачунамо збир преписаних којеф-ата непосредно:

$$(ж) \ldots \qquad [f_3] = f_{3\cdot1} + f_{3\cdot2} + f_{3\cdot3}$$

а други пут из збира $\Delta\Sigma''_3$ једначине III'_2:

$$(ж^*) \ldots \qquad [-\chi'''_3] = -\Delta\Sigma''_3 + 1.$$

За рачунање x_2 преписујемо из једначине II_1' којеф-те $\chi''_{2\cdot m}$ са супротним предзнацима. Контрола преписивања се врши дуплим рачунањем збира преписаних величина: први пут — непосредним рачунањем, —

$$(з) \ldots \qquad [-\chi''_2] = -\chi''_{2\cdot1} - \chi''_{2\cdot2} - \chi''_{2\cdot3}$$

а други пут из збира $\Delta\Sigma'_2$:

$$(з^*) \ldots \quad [-\chi''_2] = -\Delta\Sigma'_2 + (1 + \tau''_{2\cdot3}) = -\Delta\Sigma'_2 + \delta s''_2$$

Испод величина $(-\chi''_{2\cdot m})$ уписују се којеф-ти производа, —

$$(и) \ldots \quad -\tau''_{2\cdot3} x_3 = -\tau''_{2\cdot3} f_{3\cdot1} w_1 - \tau''_{2\cdot3} f_{3\cdot2} w_2 - \tau''_{2\cdot3} f_{3\cdot3} w_3.$$

Контрола извршеног множења $(-\tau''_{2\cdot3})$ на којеф-те x_3 остварa се упоређењем производа $(-\tau''_{2\cdot3}\,[f_3])$, а који се уписује у стубац *p* са непосредним збиром $\Delta_{2\cdot3}$ производа, —

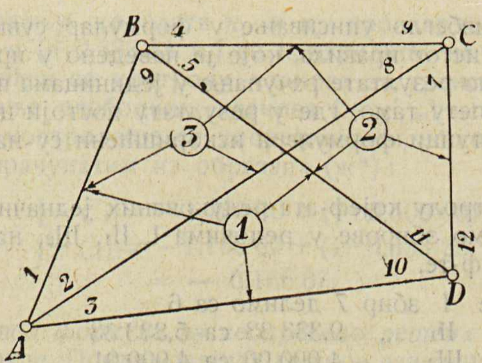
$$(к) \ldots \qquad \Delta_{2\cdot3} = -\tau''_{2\cdot3} f_{3\cdot1} - \tau''_{2\cdot3} f_{3\cdot2} - \tau''_{2\cdot3} f_{3\cdot3}$$

Збирови величина $(-\chi''_{2\cdot m})$ са одговарајућим производима дају којеф-те неодређеног решења за x_2.

За одређивање x_1 искоришћујемо последњи израз у систему (51*) и поступамо по истом плану, као што и при рачунању x_2: препишемо и проконтролишемо којеф-те $(-\chi'_{1\cdot m})$ из једначине I', израчунамо производе, — $(-\tau'_{1\cdot3} x_3)$ и $(-\tau'_{1\cdot2} x_2)$, и проконтролишемо их помоћу производа $(-\tau'_{1\cdot3}\,[f_3])$ и $(-\tau'_{1\cdot2}\,[f_2])$ и, најзад, израчунамо збирове по ступцима и дођемо до величина $f_{1\cdot1}$, $f_{1\cdot2}$, $f_{1\cdot3}$.

У . . . *Пример на неодређено решење нормалних једначина корелата* за угловне услове геодезичког четвороугла. Из шеме условних једначина (сл. 2) пишемо нормале једначине корелата за угловне услове:

$$(а) \ldots \quad \begin{aligned} 6k_1 - 2k_2 + 2k_3 + w_1 &= 0, \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 + w_2 &= 0, \\ +2k_1 + 2k_2 + 6k_3 + w_3 &= 0. \end{aligned}$$



Сл. 2

Уносимо које-ти система (а) у формулар бр. 2.

Пошто у сваку нормалну једначину (а) улази само по један од слободних чланова (упор. са (48)), то коједф-ти при отсутних **w** треба сматрати да су једнаки нули.

Формулар бр. 2

	k_1	k_2	k_3	w_1	w_2	w_3	s	p
I ...	+ 6,0	− 2,0	+ 2,0	+ 1,0	.	.	+7,0	.
I' ...	+ 1,0	− 333 33	+ 333 33	+ 166 67	.	.	+1,166 67	+1,166 67
II ...		+ 6,0	+ 2,0	.	+ 1,0	.	+7,0	.
ΔII ...		− 666 66	+ 666 66	+ 333 33	.	.	+2,333 33	−2,333 31
III ...			+ 6,0	.	.	+ 1,0	+11,0	.
ΔIII ...			− 666 66	− 333 33	.	.	−2,333 33	−2,333 31
II_1 ...		+5,333 34	+2,666 66	+ 333 33	+ 1,0	.	+9,333 33	+9,333 33
II_1' ...		+ 1,0	+ 500 00	+ 62 50	+ 187 50	.	+1,750 00	+1,750 00
III_1 ...			+5,333 34	− 333 33	.	+ 1,0	+8,666 67	+8.666 67
ΔIII_1 ...			−1,333 33	− 166 66	− 500 00	.	+4,666 65	−4,666 65
III_2 ...			+4,000 00	− 499 99	− 500 00	+ 1,0	+4.000 02	+4,000 02
III_2' ...			+ 1,0	− 125 00	− 125 00	+ 250 00	+1,000 00	+1,000 00
k_3 =				− 125 00	+ 125 00	− 250 00	.	.
− II_1' ...				− 62 50	− 187 50	.	− 250 00	− 250 00
− 0,500 00 k_3 ...				− 62 50	− 62 50	+ 125 00	.	.
k_2 =				− 125 00	− 250 00	+ 125 00	− 250 00	− 250 00
− I' ...				− 166 67	.	.	− 166 67	− 166 67
− 0,333 33 k_3 ...				− 41 67	− 41 67	+ 83 33	.	.
+ 0,333 33 k_2 ...				− 41 67	− 83 33	+ 41 67	− 83 33	− 83 33
k_1 =				− 250 01	125 00	− 125 00	− 250 01	− 250 01

Да би се избегло уписивање у формулар сувишних цифара придржавамо се истог правила, које је наведено у примеру 3⁰ (стр. 191) и изражавамо резултате рачунања у јединицама петог децимала и задржавамо запету тамо, где у резултату постоји цео део.

Контролни ступци формулара искоришћени су на описани горе начин:

I . . . за контролу којеф-ата редукованих једначина у редовима I', II'_1, III'_2, делимо збирове у редовима I, II_1, III_2, на одговарајуће квадратичке којеф-те,

у једначине I збир 7 делимо са 6
„ „ II_1 „ 9,333 33 са 5,333 33
„ „ III_2 „ 4,000 00 са 4,000 01

и резултати делења,

$$+ 1{,}166\,67; \quad + 1{,}750\,00; \quad + 1{,}000\,00,$$

унесени су у стубац p, а збирови редуцираних којеф-ата,

$$+ 1 - 0{,}333\,33 + 0{,}333\,33 - 0{,}166\,67 = + 1{,}166\,67 \text{ за ред } I,$$
$$+ 1 + 0{,}500\,00 + 0{,}062\,50 + 0{,}187\,50 = 1{,}750\,00 \text{ „ „ } II_1,$$
$$+ 1 - 0{,}125\,00 - 0{,}125\,00 + 0{,}250\,00 = + 1{,}000\,00 \text{ „ „ } III_2,$$

који треба да буду њима једнаки — у стубац s;

II. . . . . за контролу чланова за трансформацију множимо збирове којф-ата једначине, почетне у сваком систему трансформираних једначина, на одговарајући редуквани члан; резултати множења,

за Δ II производ $(+ 7)\ (- 0{,}333\,33) = - 2{,}333\,31$,
„ Δ III „ $(+ 7)\ (+ 0{,}333\,33) = + 2{,}333\,31$,
„ Δ III_1 „ $(+ 9{,}333\,33)\ (+ 0{,}500\,00) = + 4{,}666\,65$

уписани су са супротним предзнацима у стубац p, а у стубац s — збирови за трансформацију,

за Δ II $+ 2 - 0{,}666\,66 + 0{,}666\,66 + 0{,}333\,33 = + 2{,}333\,33$
„ Δ III $- 2 + 0{,}666\,66 - 0{,}666\,66 - 0{,}333\,33 = - 2{,}333\,33$
„ Δ III_1 $- 2{,}666\,66 - 1{,}333\,33 - 0{,}166\,66 - 0{,}500\,00 = - 4{,}666\,65$.

Разлике у вредностима, које су уписате у ступцу s и p за Δ II и Δ III од 2 јединице пете децимале изазване су заокруживањем при рачунању;

III . . . за контролу којеф-ата трансформираних једначина II_1, III_1, III_2, који претстављају збирове по ступцима два сабирака, изводи се трансформација збира којеф-ата одговарајуће једначине

за II_1 $+ 7 + 2{,}333\,33 = + 9{,}333\,33$
„ III_1 $+ 11 - 2{,}333\,33 = + 8{,}666\,67$
„ III_2 $+ 8{,}666\,67 - 4{,}666\,65 = + 4{,}000\,02$

и резултати се уписују у стубац p, а директни збирови трансформираних којеф-ата,

за II_1 $+ 5{,}333\,33 + 2{,}666\,66 + 0{,}333\,33 + 1 = + 9{,}333\,33$,
„ III_1 $+ 2{,}666\,66 + 5{,}333\,34 - 0{,}333\,33 + 1 = + 8{,}666\,67$,
„ III_2 $+ 4{,}000\,01 - 0{,}499\,99 - 0{,}500\,00 + 1 = + 4{,}000\,02$,

у стубац s. Обе вредности треба да буду потпуно идентичне.

При рачунању корелата κ_1 и κ_2 производи $(-0{,}500\,00\ \kappa_3)$ $(-0{,}333\,33\ \kappa_3)$ и $(+0{,}333\,33\ \kappa_2)$ се контролишу на исти начин, који је био искоришћен за контролу чланова за трансформацију.

Преписивање слободних чланова $(-\chi'_{1\cdot m})$ и $(-\chi''_{2\cdot m})$ из једначина I' и II', контролише се упоређивањем њихових збирова са вредностима израчунатим из образаца (ж*):

за корелату $\kappa_2 \ldots [-\chi''_2] = -1{,}750\,00 + (1+0{,}500\,00) = -0{,}250\,00$
за корелату $\kappa_1 \ldots [-\chi'_1] = -1{,}166\,67 + (1-0{,}333\,33 + 0{,}333{,}33) =$
$= -0{,}166\,67.$

VI ... *Извод формула за неодређено решење нормалних једначина у две групе.* Придржавајући се горе наведеног система ознака, препишемо систем нормалних једначина (8) и (8*), на стр. 181, а који одговара условним једначинама (7) и (7*):

$$(52)\ \ldots\ \begin{aligned} a_{1\cdot1}\,\kappa_1 + a_{1\cdot2}\,\kappa_2 + a_{1\cdot3}\,\kappa_3 + \alpha_{1\cdot\mathrm{I}}\,\kappa_{\mathrm{I}} + \alpha_{1\cdot\mathrm{II}}\,\kappa_{\mathrm{II}} + w_1 &= 0,\\ a_{2\cdot1}\,\kappa_1 + a_{2\cdot2}\,\kappa_2 + a_{2\cdot3}\,\kappa_3 + \alpha_{2\cdot\mathrm{I}}\,\kappa_{\mathrm{I}} + \alpha_{2\cdot\mathrm{II}}\,\kappa_{\mathrm{II}} + w_2 &= 0,\\ a_{3\cdot1}\,\kappa_1 + a_{3\cdot2}\,\kappa_2 + a_{3\cdot3}\,\kappa_3 + \alpha_{3\cdot\mathrm{I}}\,\kappa_{\mathrm{I}} + \alpha_{3\cdot\mathrm{I}}\,\kappa^{\mathrm{II}} + w_3 &= 0; \end{aligned}$$

$$(52^*)\ \ldots\ \begin{aligned} \alpha_{\mathrm{I}\cdot1}\,\kappa_1 + \alpha_{\mathrm{I}\cdot2}\,\kappa_2 + \alpha_{\mathrm{I}\cdot3}\,\kappa_3 + \alpha_{\mathrm{I.I}}\,\kappa_{\mathrm{I}} + \alpha_{\mathrm{I.II}}\,\kappa_{\mathrm{II}} + w_{\mathrm{I}} &= 0,\\ \alpha_{\mathrm{II}\cdot1}\,\kappa_1 + \alpha_{\mathrm{I}\cdot2}\,\kappa_2 + \alpha_{\mathrm{I}\cdot3}\,\kappa_3 + \alpha_{\mathrm{II.I}}\,\kappa_{\mathrm{I}} + \alpha_{\mathrm{II.I}}\,\kappa_{\mathrm{II}} + w_{\mathrm{II}} &= 0. \end{aligned}$$

Неодређено решење овог система једначина, према (42), може се написати у овом облику:

$$(53)\ \ldots\ \begin{aligned} \kappa_1 &= \varphi_{1\cdot1}\,w_1 + \varphi_{1\cdot2}\,w_2 + \varphi_{1\cdot3}\,w_3 + \varphi_{1\cdot\mathrm{I}}\,w_{\mathrm{I}} + \varphi_{1\cdot\mathrm{II}}\,w_{\mathrm{II}};\\ \kappa_2 &= \varphi_{2\cdot1}\,w_1 + \varphi_{2\cdot2}\,w_2 + \varphi_{2\cdot3}\,w_3 + \varphi_{2\cdot\mathrm{I}}\,w_{\mathrm{I}} + \varphi_{2\cdot\mathrm{II}}\,w_{\mathrm{II}},\\ \kappa_3 &= \varphi_{3\cdot1}\,w_1 + \varphi_{3\cdot2}\,w_2 + \varphi_{3\cdot2}\,w_3 + \varphi_{3\cdot\mathrm{I}}\,w_{\mathrm{I}} + \varphi_{3\cdot\mathrm{II}}\,w_{\mathrm{II}}; \end{aligned}$$

$$(53^*)\ \ldots\ \begin{aligned} \kappa_{\mathrm{I}} &= \varphi_{\mathrm{I}\cdot1}\,w_1 + \varphi_{\mathrm{I}\cdot2}\,w_2 + \varphi_{\mathrm{I}\cdot3}\,w_3 + \varphi_{\mathrm{I.I}}\,w_{\mathrm{I}} + \varphi_{\mathrm{I.II}}\,w_{\mathrm{II}},\\ \kappa_{\mathrm{II}} &= \varphi_{\mathrm{II}\cdot1}\,w_1 + \varphi_{\mathrm{II}\cdot2}\,w_2 + \varphi_{\mathrm{II}\cdot3}\,w_3 + \varphi_{\mathrm{II.I}}\,w_{\mathrm{I}} + \varphi_{\mathrm{II.II}}\,w_{\mathrm{II}}. \end{aligned}$$

За рачунање којеф-ата неодређеног решења искористимо трансформиране једначине (14) и (14*), који се у примљеном систему ознака препишу у следећем облику,

$$(54)\ \ldots\ \begin{aligned} a_{1\cdot1}\,\kappa_1 + a_{1\cdot2}\,\kappa_2 + a_{1\cdot3}\,\kappa_3 + W_1 &= 0,\\ a_{2\cdot1}\,\kappa_1 + a_{2\cdot2}\,\kappa_2 + a_{3\cdot3}\,\kappa_3 + W_2 &= 0,\\ a_{3\cdot1}\,\kappa_1 + a_{3\cdot2}\,\kappa_2 + a_{3\cdot2}\,\kappa_3 + W_3 &= 0; \end{aligned}$$

$$(54^*)\ \ldots\ \begin{aligned} A_{\mathrm{I.I}}\,\kappa_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{I.II}}\,\kappa_{\mathrm{II}} + W_{\mathrm{I}} &= 0,\\ A_{\mathrm{II.I}}\,\kappa_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II.II}}\,\kappa_{\mathrm{II}} + W_{\mathrm{II}} &= 0. \end{aligned}$$

Независно једно од другог решење система (54) и (54*) даје, како смо показали, праве вредности непознатих. Ова решења могу у неодређеном облику се написати овако:

$$(55)\ \begin{aligned} \kappa_1 &= f_{1\cdot1}\,W_1 + f_{1\cdot2}\,W_2 + f_{1\cdot3}\,W_3,\\ \kappa_2 &= f_{2\cdot1}\,W_1 + f_{2\cdot2}\,W_2 + f_{2\cdot3}\,W_3,\\ \kappa_3 &= f_{3\cdot1}\,W_1 + f_{3\cdot2}\,W_2 + f_{3\cdot3}\,W_3; \end{aligned}$$

$$(56) \ldots \quad \begin{aligned} \kappa_{I} &= \Phi_{I.I}\, W_{I} + \Phi_{I.II}\, W_{II}, \\ \kappa_{II} &= \Phi_{II.I}\, W_{I} + A_{II.II}\, W_{II}. \end{aligned}$$

Неодређено решење система (55) за I групу (7) условних једначина можемо извести или по алгоритму Гауса, како је приказано у претходним одељцима, или макојим другим путем, пошто којеф-ти система (54) према општем — (52) остају непромењени, без икакве трансформације, и јесу, дакле, познати.

За рачунање трансформираних којеф-ата система (54*) друге групе служе помоћне корелате (24) које се рачунају из истог система нормалних једначина (54) на стр. 158 прве групе само са променом слободних чланова из система (52) групом којеф-ата при корелати κ_{I}, односно — κ_{II}, итд., у зависности од тога, која ће се група помоћних корелата рачунати (в. систем једначина (26) на стр 185). Онда неодређено решење (55*) важи и за системе нормалних једначина помоћних корелата.

Тако, за прву групу помоћних корелата (17) — $\rho_{1\cdot1}$, $\rho_{1\cdot2}$, $\rho_{1\cdot3}$, којој у систему (52) одговарају којеф-ти при првој корелати κ_{I} друге групе, имамо:

$$(57) \ldots \quad \begin{aligned} \rho_{1\cdot1} &= f_{1\cdot1}\, \alpha_{1\cdot I} + f_{1\cdot2}\, \alpha_{2\cdot I} + f_{1\cdot3}\, \alpha_{3\cdot I}, \\ \rho_{1\cdot2} &= f_{2\cdot1}\, \alpha_{1\cdot I} + f_{2\cdot2}\, \alpha_{2\cdot I} + f_{2\cdot3}\, \alpha_{3\cdot I}, \\ \rho_{1\cdot3} &= f_{3\cdot1}\, \alpha_{1\cdot I} + f_{3\cdot2}\, \alpha_{2\cdot I} + f_{3\cdot3}\, \alpha_{3\cdot I}; \end{aligned}$$

а за другу групу помоћних корелата, — $\rho_{2\cdot1}$, $\rho_{2\cdot2}$, $\rho_{2\cdot3}$:

$$(58) \ldots \quad \begin{aligned} \rho_{2\cdot1} &= f_{1\cdot1}\, \alpha_{1.II} + f_{1\cdot2}\, \alpha_{2.II} + f_{1\cdot3}\, \alpha_{3.II}, \\ \rho_{2\cdot2} &= f_{2\cdot1}\, \alpha_{1.II} + f_{2\cdot2}\, \alpha_{2.II} + f_{2\cdot3}\, \alpha_{3.II}, \\ \rho_{2\cdot3} &= f_{3\cdot1}\, \alpha_{1.II} + f_{3\cdot2}\, \alpha_{2.II} + f_{3\cdot3}\, \alpha_{3.II}. \end{aligned}$$

Пошто су све величине, које улазе у неодређено решење помоћних корелата (57) и (58), нама познате, то обрасци (57) и (58) директно служе за рачунање вредности помоћних корелата.

За општи случај, кад се рачуна група (24) помоћних корелата, обрасци за рачунање биће следећи:

$$(58^*) \quad \begin{aligned} \rho_{\mu\cdot1} &= f_{1\cdot1}\, \alpha_{2\cdot\mu} + f_{1\cdot2}\, \alpha_{2\cdot\mu} + \cdots + f_{1.n}\, \alpha_{n.\mu}, \\ \rho_{\mu\cdot2} &= f_{2\cdot1}\, \alpha_{1\cdot\mu} + f_{2\cdot2}\, \alpha_{2\cdot\mu} + \cdots + f_{2.n}\, \alpha_{n.\mu}, \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \\ \rho_{\mu.n} &= f_{n.1}\, \alpha_{1\cdot\mu} + f_{n.2}\, \alpha_{2\cdot\mu} + \cdots + f_{n.n}\, \alpha_{n.\mu}. \end{aligned}$$

Обрасци (58*) могу се искористити и при бројном решењу нормалних једначина у две групе, место решења система (26) по алгоритму Гауса.

Са израчунатим вредностима помоћних корелата се рачунају из образаца (30)—(34) трансформиране којеф-ти система (54*):

$$(59) \ldots \quad \begin{aligned} A_{I.I} &= \alpha_{I.I} + \alpha_{1.I}\, \rho_{1\cdot1} + \alpha_{2.I}\, \rho_{1\cdot2} + \alpha_{3.I}\, \rho_{1\cdot3}; \\ A_{I.II} &= \alpha_{I.II} + \alpha_{1.II}\, \rho_{1\cdot1} + \alpha_{2.II}\, \rho_{1\cdot2} + \alpha_{3.II}\, \rho_{1\cdot3} = \\ &= \alpha_{II.I} + \alpha_{1.I}\, \rho_{2\cdot1} + \alpha_{2.I}\, \rho_{2\cdot2} + \alpha_{3.I}\, \rho_{2\cdot3} = A_{II.I}; \\ A_{II.II} &= \alpha_{II.II} + \alpha_{1.II}\, \rho_{2\cdot1} + \alpha_{2.II}\, \rho_{2\cdot2} + \alpha_{3.II}\, \rho_{2\cdot3}. \end{aligned}$$

За трансформацију слободних чланова система (54*) се користе последњи обрасци у системима (19), (22) и (27), одакле имамо:

$$(59^*) \ldots \quad \begin{aligned} W_I &= \rho_{1\cdot1}\, w_2 + \rho_{1\cdot2}\, w_2 + \rho_{1\cdot3}\, w_3 + w_I\,, \\ W_{II} &= \rho_{2\cdot1}\, w_1 + \rho_{2\cdot2}\, w_2 + \rho_{2\cdot3}\, w_3 + w_{II}\,, \end{aligned}$$

или за општи случај, —

$$(59^{**}) \ldots \quad W_\mu = \rho_{\mu\cdot1}\, w_1 + \rho_{\mu\cdot2}\, w_2 + \ldots + \rho_{\mu\cdot n}\, w_n + w_\mu\,.$$

Уврстимо изразе (59*) у једначине (54*), добићемо:

$$(60) \ldots \quad \begin{aligned} A_{I.I}\,\kappa_I + A_{I.II}\,\kappa_{II} + \rho_{1\cdot1}\, w_1 + \rho_{1\cdot2}\, w_2 + \rho_{1\cdot3}\, w_3 + w_I + \;. &= 0, \\ A_{II.I}\kappa_I + A_{II.II}\kappa_{II} + \rho_{2\cdot1}\, w_1 + \rho_{2\cdot2}\, w_2 + \rho_{2\cdot3}\, w_3 + \;.\; + w_{II} &= 0. \end{aligned}$$

У овом систему сви су којеф-ти — при корелатима и при слободним члановима, познати и њега можемо решити у неодређеном облику помоћу алгоритма Гауса (в. IV и V). Онда се добију изразе (53*) за корелате друге групе и наћи ће се сви њихови којеф-ти. Ипак, постоји и други пут за рачунање истих.

Кад су се одредили из образаца (59) вредности трансформираних којеф-ата система (54*), овај се решава у неодређеном облику помоћу алгоритма Гауса или ма којим другим начином без предходног трансформирања слободних чланова. Онда се добијају којеф-ти $\Phi_{I.I}$, $\Phi_{II.II}$, $\Phi_{II.II}$ неодређеног решења (56).

Заменимо у том систему са познатим већ вредностима његових којеф-ата слободне чланове W_I и W_{II} њиховим изразима из (59*). Имаћемо после груписања чланова према w_1, w_2, w_3, w_I, w_{II}:

$$(61) \ldots \quad \begin{aligned} \kappa_I = {} & (\Phi_{I.I}\,\rho_{1\cdot1} + \Phi_{I.II}\,\rho_{2\cdot1})\, w_1 + (\Phi_{I.I}\,\rho_{1\cdot2} + \Phi_{I.II}\,\rho_{2\cdot2})\, w_2 + \\ & + (\Phi_{I.I}\,\rho_{1\cdot3} + \Phi_{I.II}\,\rho_{2\cdot3})\, w_3 + \Phi_{I.I}\, w_I + \Phi_{I.II}\, w_{II}\,; \\ \kappa_{II} = {} & (\Phi_{II.I}\,\rho_{1\cdot1} + \Phi_{II.II}\,\rho_{2\cdot1})\, w_1 + (\Phi_{II.I}\,\rho_{1\cdot2} + \Phi_{II.II}\,\rho_{2\cdot2})\, w_2 + \\ & + (\Phi_{II.I}\,\rho_{1\cdot3} + \Phi_{II.II}\,\rho_{2\cdot3})\, w_3 + \Phi_{II.I}\, w_I + \Phi_{II.II}\, w_{II} \end{aligned}$$

Ако упоредимо неодређено решење (61) друге групе са (53*), онда видимо да,

$$(62) \ldots \quad \Phi_{I.I} = \varphi_{I.I};\; \Phi_{I.II} = \varphi_{I.II} = \varphi_{II.I} = \Phi_{II.I};\; \Phi_{II.II} = \varphi_{II.II}$$

одакле за остале којеф-те:

$$(62^*) \ldots \quad \begin{aligned} \varphi_{I.1} &= \varphi_{I.I}\,\rho_{1\cdot1} + \varphi_{I.II}\,\rho_{2\cdot1}\,; \; \varphi_{II.1} = \varphi_{II.I}\,\rho_{1\cdot1} + \varphi_{II.II}\,\rho_{2\cdot1}\,, \\ \varphi_{I.2} &= \varphi_{I.I}\,\rho_{1\cdot2} + \varphi_{I.II}\,\rho_{2\cdot2}\,; \; \varphi_{II.2} = \varphi_{II.I}\,\rho_{1\cdot2} + \varphi_{II.II}\,\rho_{2\cdot2}\,, \\ \varphi_{I.3} &= \varphi_{I.I}\,\rho_{1\cdot3} + \varphi_{I.II}\,\rho_{2\cdot3}\,; \; \varphi_{II.3} = \varphi_{II.I}\,\rho_{1\cdot3} + \varphi_{II.II}\,\rho_{2\cdot3}\,. \end{aligned}$$

На основу (62) систем (56) можемо преписати у следећем облику:

$$(63) \ldots \quad \begin{aligned} \kappa_I &= \varphi_{I.I}\, W_I + \varphi_{I.II}\, W_{II}\,; \\ \kappa_{II} &= \varphi_{II.I}\, W_I + \varphi_{II.II}\, W_{II}\,. \end{aligned}$$

Заменимо ли у (63) W_I и W_{II} са изразима из (59*), после груписања чланова добићемо:

$$
(64)\ \ldots\quad
\begin{aligned}
\kappa_{I} &= (\varphi_{I.I}\,\rho_{1\cdot 1} + \varphi_{II.I}\,\rho_{2\cdot 1})\,w_1 + (\varphi_{I.I}\,\rho_{1\cdot 2} + \varphi_{I.II}\,\rho_{2\cdot 2})\,w_2 + \\
&\quad + (\varphi_{I.I}\,\rho_{1\cdot 3} + \varphi_{I.II}\,\rho_{2\cdot 3})\,w_3 + \varphi_{I.I}\,w_{I} + \varphi_{I.II}\,w_{II}\,; \\
\kappa_{II} &= (\varphi_{II.I}\,\rho_{1\cdot 1} + \varphi_{II.II}\,\rho_{2\cdot 1})\,w_1 + (\varphi_{II.I}\,\rho_{1\cdot 2} + \varphi_{II.II}\,\rho_{2\cdot 2})\,w_2 + \\
&\quad + (\varphi_{II.I}\,\rho_{1\cdot 3} + \varphi_{II.II}\,\rho_{2\cdot 3})\,w_3 + \varphi_{II.I}\,w_{I} + \varphi_{II.II}\,w_{II}\,.
\end{aligned}
$$

Из упоређења (64) са (53*) и (61) долазимо поново до израза (62) и (62*).

За трансформацију слободних чланова прве групе (54) важе обрасци (13), који се у новом систему ознака препишу тако:

$$
(65)\ \ldots\quad
\begin{aligned}
W_1 &= w_1 + \alpha_{I\cdot 1}\,\kappa_{I} + \alpha_{II\cdot 1}\,\kappa_{II}\,, \\
W_2 &= w_2 + \alpha_{I\cdot 2}\,\kappa_{I} + \alpha_{II\cdot 2}\,\kappa_{II}\,, \\
W_3 &= w_3 + \alpha_{I\cdot 3}\,\kappa_{I} + \alpha_{II\cdot 3}\,\kappa_{II}\,.
\end{aligned}
$$

Ако заменимо у (65) κ_{I} и κ_{II} изразима (64), односно (53*) то, после груписања чланова, добићемо:

$$
(66)\ \ldots\quad
\begin{aligned}
W_1 &= (1+\alpha_{I\cdot 1}\,\varphi_{I\,1}+\alpha_{II\cdot 1}\,\varphi_{II\cdot 1})\,w_1+(1+\alpha_{I\cdot 1}\,\varphi_{I\,2}+\alpha_{II\cdot 1}\,\varphi_{II\cdot 2})\,w_2+(1+\alpha_{I\cdot 1}\,\varphi_{I\cdot 3}+ \\
&\quad +\alpha_{II\,1}\,\varphi_{II\cdot 3})\,w_3+(.\,+\alpha_{I\cdot 1}\,\varphi_{I\cdot I}+\alpha_{II\cdot 1}\,\varphi_{II\cdot I})\,w_{I}+(.\,+\alpha_{I\,1}\varphi_{I\cdot II}+ \\
&\quad +\alpha_{II\cdot 1}\varphi_{II\cdot II})\,w_{II}; \\
W_2 &= (1+\alpha_{I\cdot 2}\,\varphi_{I\cdot 1}+\alpha_{II\cdot 2}\,\varphi_{II\cdot 1})\,w_1+(1+\alpha_{I\cdot 2}\,\varphi_{I\cdot 2}+\alpha_{II\cdot 1}\,\varphi_{II\cdot 2})\,w_2+(1+\alpha_{I\cdot 2}\,\varphi_{I\cdot 3}+ \\
&\quad +\alpha_{II\cdot 2}\,\varphi_{II\cdot 3})\,w_3+(.\,+\alpha_{I\,2}\,\varphi_{I\cdot I}+\alpha_{II\,2}\,\varphi_{II\cdot I})\,w_{I}+(.\,+\alpha_{I\,2}\,\varphi_{I\cdot I}+ \\
&\quad +\alpha_{II\,2}\varphi_{II\cdot II})\,w_{II}; \\
W_3 &= (1+\alpha_{I\cdot 3}\,\varphi_{I\cdot 1}+\alpha_{II\cdot 3}\,\varphi_{II\cdot 1})\,w_1+(1+\alpha_{I\cdot 3}\,\varphi_{I\,2}+\alpha_{II\cdot 3}\,\varphi_{II\cdot 2})\,w_2+(1+\alpha_{I\cdot 3}\,\varphi_{I\cdot 3}+ \\
&\quad +\alpha_{II\,3}\,\varphi_{II\cdot 3})\,w_3+(.\,+\alpha_{I\cdot 3}\,\varphi_{I\cdot I}+\alpha_{II\cdot 3}\,\varphi_{II\cdot I})\,w_{I}+(.\,+\alpha_{I\cdot 3}\varphi_{II\cdot I}+ \\
&\quad +\alpha_{II\cdot 3}\varphi_{II\cdot II})\,w_{II}.
\end{aligned}
$$

Помножимо ли једнакости (66), по реду, на $f_{1\cdot 1}$, $f_{1\cdot 2}$, $f_{1\cdot 3}$ и саберемо производе, добићемо, према првој једначине (55), неодређено решење за корелату κ_1 прве групе; понављајући на исти начин множење (66) на групе величина $f_{2\cdot 1}$, $f_{2\cdot 2}$, $f_{2\cdot 3}$ односно на $f_{3\cdot 1}$, $f_{3\cdot 2}$, $f_{3\cdot 3}$, после сабирања добивених производа наћићемо изразе неодређеног решења за остале корелате прве групе — κ_2 и κ_3.

При сабирању производа груписаћемо чланове према слободним члановима, — w_1, w_2, … Тако, при множењу у систему (66) W_1 на $f_{1\cdot 1}$ W_2 на $f_{1\cdot 2}$ W_3 на $f_{1\cdot 3}$ чланови производа са множитељем w_1 биће следећи:

$$
\begin{array}{lll}
\text{у производу } f_{1\cdot 1}\,W_1 & \cdots & f_{1\cdot 1}\,(1+\alpha_{I.1}\,\varphi_{I.1}+\alpha_{II.1}\,\varphi_{II.1})\,w_1\,; \\
\text{„ \quad „ } f_{1\cdot 2}\,W_2 & \cdots & f_{1\cdot 2}\,(1+\alpha_{I.2}\,\varphi_{I.1}+\alpha_{II.2}\,\varphi_{II.1})\,w_1\,; \\
\text{„ \quad „ } f_{1\cdot 3}\,W_3 & \cdots & f_{1\cdot 3}\,(1+\alpha_{I.3}\,\varphi_{I.1}+\alpha_{II.3}\,\varphi_{II.1})\,w_1\,;
\end{array}
$$

уведемо множитеље f унутра заграда, саберемо сва три производа и у загради групишемо чланове према заједничким множитељима $\varphi_{I.1}$ и $\varphi_{II.1}$:

$$
[f_{1\cdot 1} + (f_{1\cdot 1}\,\alpha_{I.1}+f_{1\cdot 2}\,\alpha_{I.2}+f_{1\cdot 3}\,\alpha_{I.3})\,\varphi_{I.1}+(f_{1\cdot 1}\,\alpha_{II.1}+f_{1\cdot 2}\,\alpha_{II.2}+f_{1\cdot 3}\,\alpha_{II.3})\,\varphi_{II\,1}]\;w_1.
$$

Ако упоредимо изразе при $\varphi_{I.1}$ и $\varphi_{II.1}$ са $\rho_{1\cdot 1}$ и $\rho_{2\cdot 1}$ у (57) и (58) онда видимо, обзиром на симетрију којеф-ата α ($\alpha_{I.1}=\alpha_{1.I}$; …), да су они идентични и да се претходни израз може преписати у облику:

$$(67) \ldots \quad (f_{1\cdot 1} + \rho_{1\cdot 1}\,\varphi I_{1} + \rho_{2\cdot 1}\,\varphi II_{\cdot 1})\,w_1.$$

На исти начин трансформишемо остале производе у изразу за κ_1 и добићемо:

$$(67^*) \ldots \begin{array}{l} \text{за израз при } w_2 \ldots f_{1\cdot 2} + \rho_{1\cdot 1}\,\varphi I_{\cdot 2} + \rho_{2\cdot 1}\,\varphi II_{\cdot 2}, \\ \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \ldots f_{1\cdot 3} + \rho_{1\cdot 1}\,\varphi I_{\cdot 3} + \rho_{2\cdot 1}\,\varphi II_{\cdot 3}, \\ \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \ldots \;.\; + \rho_{1\cdot 1}\,\varphi I.I + \rho_{2\cdot 1}\,\varphi II.I, \\ \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \ldots \;.\; + \rho_{1\cdot 1}\,\varphi II.I + \rho_{2\cdot 1}\,\varphi II.II. \end{array}$$

Слично трансформишемо остале изразе у систему (55).

Упоређењем једначина, добивених после такве трансформације, са одговарајућим једначинама система (53) можемо утврдити следећи низ једнакости:

$$(68) \ldots \begin{array}{l} \varphi_{1\cdot 1} = f_{1\cdot 1} + \rho_{1\,1}\,\varphi I_{\cdot 1} + \rho_{1\cdot 2}\,\varphi II_{\cdot 1} = f_{1\cdot 1} + \Delta\, f_{1\cdot 1}; \\ \varphi_{1\cdot 2} = f_{1\cdot 2} + \rho_{1\cdot 1}\,\varphi I_{\cdot 2} + \rho_{1\cdot 2}\,\varphi II_{\cdot 2} = f_{1\cdot 2} + \Delta\, f_{1\,2}; \\ \varphi_{1\cdot 3} = f_{1\cdot 3} + \rho_{1\cdot 1}\,\varphi I_{\cdot 3} + \rho_{1\cdot 2}\,\varphi II_{\cdot 3} = f_{1\cdot 3} + \Delta\, f_{1\cdot 3}; \\ \varphi I.I = \;.\; + \rho_{1\cdot 1}\,\varphi I.I + \rho_{1\cdot 2}\,\varphi II.I = f_1.I + \Delta\, f_1.I, \text{ где } f_1.I=0. \\ \underline{\varphi I.II = \;.\; + \rho_{1\cdot 1}\,\varphi II.II + \rho_{1\cdot 2}\,\varphi II.II = f_1.II + \Delta\, f_1.II, \;\; ,, \;\; f_1.II=0.} \end{array}$$

$$(68a) \ldots [\varphi_1.n]=[f_1.n]+\rho_{1\cdot 1}[\varphi I.n]+\rho_{1\cdot 2}[\varphi II.n]=[f_1.n]+[\Delta f_1.n].$$

$$(68^*) \ldots \begin{array}{l} \varphi_{2\cdot 1} = f_{2\,1} + \rho_{2\cdot 1}\,\varphi I_{\cdot 1} + \rho_{2\cdot 2}\,\varphi II_{\cdot 1} = f_{2\cdot 1} + \Delta\, f_{2\cdot 1}; \\ \varphi_{2\cdot 2} = f_{2\,2} + \rho_{2\cdot 1}\,\varphi I_{\cdot 2} + \rho_{2\cdot 2}\,\varphi II_{\cdot 2} = f_{2\cdot 2} + \Delta\, f_{2\cdot 2}; \\ \varphi_{2\,3} = f_{2\,3} + \rho_{2\cdot 1}\,\varphi I_{\cdot 3} + \rho_{2\,2}\,\varphi II_{\cdot 3} = f_{2\cdot 3} + \Delta\, f_{2\cdot 3}; \\ \varphi_{2\cdot 1} = \;.\; + \rho_{2\cdot 1}\,\varphi I.I + \rho_{2\cdot 2}\,\varphi II.I = f_2.I + \Delta\, f_2.I, \text{ где } f_2.I=0; \\ \underline{\varphi_2.II = \;.\; + \rho_{2\cdot 1}\,\varphi I.II + \rho_{2\cdot 2}\,\varphi II.II = f_2.II + \Delta\, f_2.II, \;\; ,, \;\; f_2.II=0.} \end{array}$$

$$(68^*a) \ldots [\varphi_2.n]=[f_2.n]+\rho_{2\cdot 1}[\varphi I.n]+\rho_{2\cdot 2}[\varphi II.n]=[f_2.n]+[\Delta\, f_2.n].$$

$$(68^{**}) \ldots \begin{array}{l} \varphi_{3\cdot 1} = f_{3\cdot 1} + \rho_{3\cdot 1}\,\varphi I_{\cdot 1} + \rho_{3\cdot 2}\,\varphi II.I = f_{3\cdot 1} + \Delta f_{3\cdot 1}; \\ \varphi_{3\cdot 2} = f_{3\cdot 2} + \rho_{3\cdot 1}\,\varphi I_{\cdot 2} + \rho_{3\cdot 2}\,\varphi II_{\cdot 2} = f_{3\,2} + \Delta\, f_{3\,2}; \\ \varphi_{3\cdot 3} = f_{3\,3} + \rho_{3\cdot 1}\,\varphi I_{\cdot 3} + \rho_{3\cdot 2}\,\varphi II_{\cdot 3} = f_{3\cdot 3} + \Delta f_{3\,3}; \\ \varphi_3.I = \;.\; + \rho_{3\cdot 1}\,\varphi I.I + \rho_{3\cdot 2}\,\varphi II.I = f_3.I + \Delta\, f_3.I, \text{ где } f_3.I=0; \\ \underline{\varphi_3.II = \;.\; + \rho_{3\cdot 1}\,\varphi I.II + \rho_{3\cdot 2}\,\varphi II.II = f_3.II + \Delta\, f_3.II \;\; ,, \;\; f_3.II=0.} \end{array}$$

$$(68a^{**}) \ldots [\varphi_3.n]=[f_3.n]+\rho_{3\cdot 1}[\varphi I.n]+\rho_{3\,2}[\varphi II.n]=[f_3.n]+[\Delta f_3.n]$$

За општи случај, кад је број нормалних једначина неограничен, за неку корелату k_m прве групе у систему (53), а према горњим деловима једнакости (68), (68*), (68**), којеф-ти при слободним члановима прве групе, — w_1, w_2, ... w_{n_1}, имаће следеће опште изразе:

$$(69) \ldots \quad \varphi m.p = f m.p + \rho m_{1}\,\varphi I.p + \rho m_{\cdot 2}\,\varphi II.p + \ldots + \rho_{m.\eta}\,\varphi_{\eta}.p = \\ = f m.p + \Delta\, f m.p$$

а којеф-ти при слободним члановима друге групе, — wI, wII, ... w_η — следеће опште изразе:

$$(69^*) \ldots \quad \varphi_{m.\mu} = \cdot + \rho_{m.1} \varphi_{I.\mu} + \rho_{m.2} \varphi_{II.\mu} + \ldots \rho_{m.\eta} \varphi_{\eta.\mu} = f_{m.\mu} + \Delta f_{m.\mu}$$

где, —

$$(70) \ldots \quad f_{m.\mu} = 0.$$

Збир свих којеф-ата у неодређеном решењу корелате k_m према једнакостима (68a), 68a*), (68a**), имаће следећи општи израз:

$$(69a) \ldots \quad [\varphi_{m.n}] = [f_{m.n}] + \rho_{m.1} [\varphi_{I.n}] + \rho_{m.2} [\varphi_{II.n}] + \ldots + \rho_{m.\eta} [\varphi_{\eta.n}] = [f_{m.n}] + [\Delta f_{m.n}].$$

Они делови збира на десној страни једнакости (68), (68*), (68**), (69), и (69*), које смо означили са Δf:

$$(71) \ldots \quad \Delta f_{m.p} \text{ и } \Delta f_{m.\mu}$$

претстављају промену, *прираст*, којеф-ата система (55), кад прелазимо од њих ка одговарајућим којеф-има система (53).

Да би се сачувала хомогеност састава израза (69) и (69*), увели смо у (69*) члан $f_{m.\mu}$, чији прираст је $\Delta f_{m.\mu}$; а пошто су у систему (55) слободни чланови друге групе отсутни, то $f_{m.\mu} = 0$.

На основу својства симетрије којеф-ата система неодређеног решења (53) — (53*) имамо:

$$(72) \ldots \quad \varphi_{1.2} = \varphi_{2.1};\ \varphi_{1.3} = \varphi_{3.1};\ \varphi_{2.3} = \varphi_{3.2};$$

одакле, —

$$(72^*) \ldots \quad \begin{aligned} \rho_{1.1} \varphi_{I.2} + \rho_{1.2} \varphi_{II.2} &= \rho_{2.1} \varphi_{I.1} + \rho_{2.2} \varphi_{II.1} \\ \rho_{1.1} \varphi_{I.3} + \rho_{1.2} \varphi_{II.3} &= \rho_{3.1} \varphi_{I.3} + \rho_{3.2} \varphi_{II.3} \\ \rho_{2.1} \varphi_{I.3} + \rho_{2.2} \varphi_{II.3} &= \rho_{3.1} \varphi_{I.2} + \rho_{3.2} \varphi_{II.2} \end{aligned}$$

За општи случај:

$$(73) \ldots \quad \varphi_{m.p} = \varphi_{p.m},$$

одакле, —

$$(73^*) \ldots \quad \rho_{m.1} \varphi_{I.p} + \rho_{m.2} \varphi_{II.p} + \ldots + \rho_{m.\eta} \varphi_{\eta.p} = \rho_{p.1} \varphi_{I.m} + \rho_{p.2} \varphi_{II.m} + \ldots + \rho_{p.\eta} \varphi_{\eta.m}.$$

Формуле (72*) и (73*) могу служити као контролне при рачунању којеф-ата неодређеног решења прве групе.

Збирови израза (68) по стубцима дају контролне формуле, — (68a), (68a*), (68a**).

Закон по коме се формирају којеф-ти неодређеног решења прве групе (53) доста је уочљив. Између осталог се види да код којеф-ата при слободним члановима друге групе, w_1, w_2 фале први сабирци а који су којеф-ти неодређеног решења система (55). То је потпуно схватљиво, јер у систему (55) не постоје уопште којеф-ата са слободним члановима друге групе.

Збирови других, односно трећих производа, у групама којеф-ата (68) може се добити, с једне стране, директним сабирањем, а с друге, према контролним формулама (68a), (68a*), (68a**), помоћу множења одговарајућих помоћних корелата на збирове $[\varphi_{I.n}]$ или $[\varphi_{II.n}]$.

На горе описати начин су нађени сви којеф-ти неодређеног решења система (52) и (52*).

VII ... *Ред у којем се врши неодређено решење у две групе.* За општи случај ред, у коме се изводе рачунања потребна за неодређено решење нормалних једначина у две групе, је следећи:

1... У систему (52) нормалних једначина прве групе све чланове, који се односе на другу групу заједно са слободним члановима дотићних једначина, заемњују са ознаком трансформираних слободних чланова (54).

2... За тако промењен систем (54) се рачуна помоћу алгоритма Гауса, или на какав други начин, неодређено решење (55) за његове корелате.

3... Помоћу којеф-ата овог неодређеног решења (55) рачунају се вредности помоћних корелата (58).

4.... Са нађеним вредностима помоћних корелата рачунају се из (59) и (59*) вредности којефицијената трансформираних једначина (54*) друге групе.

5 ... За систем (54*) помоћу алгоритма Гауса, или на ма који други начин, рачуна се његово неодређено решење (56) и добивају се којеф ти $\Phi_{I.I}$, $\Phi_{I.II}$ ..., који су истоветни са којеф-има $\varphi_{I.I}$, $\varphi_{I.II}$, ...

6... Из формула (62*) рачунају се остале којеф-ти неодређеног решења друге групе (53*).

7... Користећи се изразима (68) рачунају се остали којеф-ти неодређеног решења прве групе (53).

VIII. *Пример неодређеног решења у две групе.* Да неби преоптеретили сувише нашу расправу рачунским операцијама као пример узмемо изравнавање геодетског четвороугла из књиге Iordan'а (в. опаску 3, стр. 208—215).

Једначину полусног услова, која је према књизи Јордана:

$$- 3{,}02(1) + 8{,}00(2) - 4{,}98(3) - 0{,}22(4) + 2{,}56(5) - 2{,}34(6) - \\ - 4{,}97(10) + 4{,}49(11) + 0{,}48(12) - 2{,}9 = 0$$

поделимо са 5,0841 да би квадратички којеф-т његове нормалне једначине редуцирали на вредност, која би била близу броја *6;* добијамо редуцирану полусну једначину:

$$(\alpha) \ldots - 0{,}594(1) + 1{,}574(2) - 0{,}980(3) - 0{,}043(4) + 0{,}504(5) - \\ - 0{,}460(6) - 0{,}978(10) + 0{,}883(11) + 0{,}094(12) - 0{,}570 = 0.$$

Систем нормалних једначина корелата за изравнавање четвороугла биће, онда, следећи:

$$
\text{(б)} \ldots \quad
\begin{aligned}
6к_1 + 2к_2 + 2к_3 - 0{,}628к_4 + 1{,}00 &= 0,\\
+ 2к_1 + 6к_2 + 2к_3 - 2{,}971к_4 + 1{,}02 &= 0,\\
+ 2к_1 + 2к_2 + 6к_3 + 3{,}240к_4 + 1{,}25 &= 0,\\
-0{,}628к_1 - 2{,}971к_2 + 3{,}240к_3 + 6{,}00\,32к_4 - 0{,}570 &= 0.
\end{aligned}
$$

Прве три нормалне једначине, које одговарају угловним условима, одвојимо у прву групу, док ће се у другој наћи само једна, четврта нормална једначина система (б).

Према (54 и (54*) систем трансформираних нормалних једначина за обе групе биће следеће:

$$
\text{(в)} \ldots \quad
\begin{aligned}
6к_1 + 2к_2 + 2к_3 + W_1 &= 0,\\
+ 2к_1 + 6к_2 - 2к_3 + W_2 &= 0,\\
+ 2к_1 - 2к_2 + 6к_3 + W_3 &= 0;
\end{aligned}
$$

$$
\text{(в*)} \ldots \quad A_{4\cdot4}\, к_4 + W_4 = 0.
$$

Ако упоредимо систем нормалних једначина (в) са системом (а) у одељку V, онда видимо да једначина првог система (в) одговара трећој једначини система (а), а друга и трећа једначине система (в) — првој и другој у систему (а). Из овога следи да израз за корелату $к_3$, односно за корелате $к_1$ и $к_2$ у форм. бр. 2. одељка V, одговара изразу за корелату κ_1, односно за корелате κ_2 и κ_3 нашег примера. Према томе неодређено решење наведено у одељку V важи за наш пример само са заменом $к_1$ и w_1, са $к_2$ и w_2; $к_2$ и w_2 са $к_3$ и w_3; и $к_3$, w_3 са $к_1$ и w_1.

Онда за неодређено решење система (в) нашег примера имамо:

$$
\text{(е)} \ldots \quad
\begin{aligned}
к_1 &= -\,0{,}250\,00\ W_1 + 0{,}125\,00\ W_2 + 0{,}125\,00\ W_3,\\
к_2 &= +\,0{,}125\,00\ W_1 - 0{,}250\,00\ W_2 - 0{,}125\,00\ W_3,\\
к_3 &= +\,0{,}125\,00\ W_1 - 0{,}250\,00\ W_8 - 0{,}250\,00\ W_3.
\end{aligned}
$$

Дакле имамо:

$$
\text{(д)} \ldots \quad
\begin{aligned}
f_{1\cdot1} &= -\,0{,}250\,00 = f_{2\cdot2} = f_{3\cdot3},\\
f_{1\cdot2} &= f_{2\cdot1} = +\,0{,}125\,00 = f_{1\cdot3} = f_{3\cdot1},\\
f_{2\cdot3} &= -\,0{,}125\,00 = f_{3\cdot2}.
\end{aligned}
$$

Пошто је друга група састављена само од једне једначине, а друга — од три, то ћемо имати само једну групу од три помоћне корелате: $\rho_{4\cdot1}$, $\rho_{4\cdot2}$ и $\rho_{4\cdot3}$ (упор. са стр. 185 наше расправе). Према системима (57) и (б) нашег примера напишемо:

$$
\text{(ђ)} \quad
\begin{aligned}
\rho_{4\cdot1} &= (-0{,}25000)(-0{,}628) + (+0{,}12500)(-2{,}971) + (+0{,}12500)(+3{,}240),\\
\rho_{4\cdot2} &= (+0{,}12500)(-0{,}628) + (-0{,}25000)(-2{,}971) + (-0{,}12500)(+3{,}240),\\
\rho_{4\cdot3} &= (+0{,}12500)(-0{,}628) + (-0{,}12500)(-2{,}971) + (-0{,}25000)(+3{,}240).
\end{aligned}
$$

Рачунање вредности (ђ) се врши у форм. бр. 3, сличном форм. бр. 1. Бројеви у форм. су изражени у јединицама пете децимале

Форм. бр. 3

$\alpha_1 \cdot \mu =$	$\alpha_{14} =$ — 0,628	$\alpha_{24} =$ — 2,971	$\alpha_{34} =$ + 3,240	$\rho_4 . m$
$\rho_{4 \cdot 1} =$	+ 157 00	— 371 38	+ 405 00	+ 190 62
$\rho_{42} =$	— 78 50	+ 742 25	— 405 00	+ 259 25
$\rho_{4 \cdot 3} =$	— 78 50	+ 371 38	— 810 00	— 517 12
S ...	.	+ 742 75	— 810 00	— 67 25
P ...	.	+ 742 75	— 810 00	— 67 25

У први ред формулара уписане су вредности којеф-ата при корелати $к_4$ друге групе а које се налазе у једначинама (б) за прву групу.

У одговарајући им стубац уписују се њихови производи са којеф-има неодређеног решења (2):

$$(-\ 0{,}250\,00) \times (-\ 0{,}628) = +\ 0{,}157\,00;$$
$$(+\ 0{,}125\,00) \times (-\ 0{,}628) = -\ 0{,}078\,50;$$
$$(+\ 0{,}125\,00) \times (-\ 0{,}628) = -\ 0{,}078\,50;$$

за $\alpha_{1 \cdot 4}$ и тако редом.

Редови s и p су контролни: у s улазе резултати сабирања по ступцима:

за I-и стубац: $+\ 0{,}157\,00 - 0{,}078\,50 - 0{,}078\,50 = 0$ итд.

У ред p стављени су производи збира којеф-ата при одговарајућем ступцу једном те истом слободном члану у систему (2) са одговарајућим α. Тако је за први стубац збир којеф-ата при W_1 у систему (2) једнак.

$$-\ 0{,}250\,00 + 0{,}125\,00 + 0{,}125\,00 = 0,$$

одакле, —

$$p_1 = 0 \times (-\ 0{,}628) = 0.$$

за други стубац збир којеф-ата при W_2 биће:

$$+\ 0{,}125\,00 - 0{,}250\,00 - 0{,}125\,00 = -\ 0{,}250\,00,$$

одакле, —

$$p_2 = (-\ 0{,}250\,00) \times (-\ 2{,}971) = -\ 0{,}74275,$$

и тако редом.

Вредност s и p морају да се поклапају са тачношћу заокруживања производа. У нашем случају оне су идентичне.

Вредности помоћних корелата добијају се сабирањем производа по редовима:

$$\rho_{4\cdot1} = +\ 0{,}157\ 00 - 0{,}371\ 38 + 0{,}405\ 00 = +\ 0{,}190\ 62 \text{ итд.}$$

и стављају се у стубац $\rho_{4\cdot m}$.

Контрола вредности помоћних корелата се изводи сабирањем у ступцу $\rho_{4\cdot m}$ и реду s чији резултати морају бити идентични; они се уписују у ступцу $\rho_{4\cdot m}$ а у редове s и p:

$$+0{,}190\ 62+0{,}259\ 25-0{,}517\ 12= .\ +0{,}742\ 75-0{,}810\ 00=-0{,}067\ 25.$$

Помоћу израза (59) добијамо трансформирани којеф-т $A_{4\cdot4}$:

$$\begin{aligned} A_{4\cdot4} = &+6{,}00\ 32+(+0{,}190\ 62)\ (-0{,}628)+(+0{,}259\ 25)\ (-2{,}971)+ \\ &+(-0.517\ 12)\ (+3{,}240)= +6{,}003\ 2-0{,}119\ 7-0{,}770\ 2 - \\ &-1{,}675\ 5 = +\ 3{,}437\ 8. \end{aligned}$$

Онда за трансформирану једначину (в*) имамо:

$$+\ 3{,}437\ 8\ \kappa_4 + W_4 = 0,$$

одакле, —

$$\kappa_4 = -\frac{1}{3{,}4378} W_4 = -\ 0{,}290\ 88\ W_4$$

Тако смо добили коеф-т $\varphi_{4\cdot4}$ за неодређено решење корелата κ_4. Остале којеф-те рачунамо из обрасца (62*):

$$\begin{aligned} &\varphi_{4\cdot1}\ 1 = (-\ 0{,}290\ 88) \times (+\ 0{,}190\ 62) = -\ 0{,}055\ 45, \\ \text{(и)} \dots\ &\varphi_{4\cdot2}\ 2 = (-\ 0{,}290\ 88) \times (+\ 0{,}259\ 25) = -\ 0{,}075\ 41, \\ &\varphi_{4\cdot3}\ 3 = (-\ 0{,}290\ 88) \times (-\ 0{,}517\ 12) = +\ 0{,}150\ 42. \end{aligned}$$

Ради контроле рачунамо производ $\varphi_{4\cdot4}$ на збир помоћних корелата (— 0,067 25), —

$$p = (-\ 0{,}290\ 88) \times (-\ 0.967\ 25) = +\ 0{,}019\ 56.$$

који упоређујемо са збиром добивених којеф-ата (и):

$$-\ 0{,}055\ 45 - 0{,}075\ 41 + 0{,}150\ 42 = +0{,}019\ 56.$$

Онда ће неодређено решење за корелату κ_4 бити:

$$\text{(j)} \dots\ \kappa_4 = -0{,}055\ 45\ w_1 - 0{,}075\ 41\ w_2 + 0{,}150\ 42\ w_3 - 0{,}290\ 88\ w_4$$

Сада рачунамо којеф-те неодређеног решења за корелате прве групе, — κ_1, κ_2 и κ_3 из обрасца (68).

Ово рачунање се врши у форм. бр. 4.

Форм. бр. 4.

	w_1	w_2	w_3	w_4	$s.$	$p.$
$f_1.m$	$-$ 250 00	$+$ 125 00	$+$ 125 00	.	.	.
$\rho_4.m.\ \varphi_{4\cdot 1}$	$-$ 10 57	$-$ 14 38	$+$ 28 67	$-$ 55 45	$-$ 51 73	$-$ 51 72
$f_2.m$	$+$ 125 00	$-$ 250 00	$-$ 125 00	.	$-$ 250 00	$-$ 250 00
$\rho_4.m.\ \varphi_{4\cdot 2}$	$-$ 14 38	$-$ 19 55	$+$ 39 00	$-$ 75 41	$-$ 70 34	$-$ 70 34
$f_3.m$	$+$ 125 00	$-$ 125 00	$-$ 250 00	.	$-$ 250 00	$-$ 250 00
$\rho_4.m.\ \varphi_{4\cdot 3}$	$+$ 28 67	$+$ 39 00	$-$ 77 79	$+$ 150 42	$+$ 140 30	$+$ 140 30
$f_4\ m$	.	.	.	.	.	.
$\varphi_4\ m$	$-$ 55 45	$-$ 75 41	$+$ 150 42	$-$ 290 88	$-$ 271 32	$-$ 271 32
$\Sigma =$	$-$ 51 72	$-$ 70 34	$+$ 140 30	$-$ 271 32		
$\Pi =$	$-$ 51 72	$-$ 70 34	$+$ 140 30	$-$ 271 32		

У редовима $f_1.m$, $f_2.m$, $f_3.m$ унешени су којеф-ти неодређеног решења прве групе из система (2); у реду $f_4.m$ који одговара корелати друге групе сви су којеф-ти нуле, јер корелата k_4 не улази у систем (г). Испод ових којеф-ата стављају се један испод другог производи $\rho m._1\,\varphi^! m$, који претстављају чланове пораста Δf у формулару (68). У нашем случају порасти састоје се од једног јединог производа и зато је у формулару резервиран за њих само по један ред. Порасти за којеф-те слободних чланова друге групе (у нашем случају то је једини слободан члан w_4) састоје се од сличних производа, израчунатих при формирању неодређених решења за корелате друге групе из формула (62*). У нашем случају њих сачињавају само по један производ (и), чије су вредности уписане у стубац w_4.

У сваком реду производа $\rho_4.m\ \varphi_{4\cdot 1}$; $\rho_4.m\ \varphi_{4\cdot 2}$; $\rho_4.m \cdot \varphi_{4\cdot 3}$ улази по један заједнички множитељ, — $\varphi_{4\cdot 1}$, $\varphi_{4\cdot 2}$, $\varphi_{4\cdot 3}$, који се множи редом на помоћне корелате (ђ); да би при томе у ред производа могао ући по један одговарајући којеф-т неодређеног решења (ј) корелате k_4 друге групе, уписат у стубац w_4, додаје се реду помоћних корелата вредност помоћне корелате:

(к) ... $\rho_{4\cdot 4} = +1{,}0$

и као контролне формуле ће важити:

$$
(л) \ldots \quad
\begin{aligned}
[\rho_4.m \cdot \varphi_{4\cdot 1}]_1^4 &= \varphi_{4\cdot 1}\ [\rho_4\, m]_1^4,\\
[\rho_4\, m \cdot \varphi_{4\cdot 2}]_1^4 &= \varphi_{4\cdot 2}\ [\rho_4\, m]_1^4,\\
[\rho_4.m \cdot \varphi_{4\cdot 3}]_1^4 &= \varphi_{4\cdot 3}\ [\rho_4.m]_1^4,\\
[\rho_4.m \cdot \varphi_{4\cdot 4}]_1^4 &= \varphi_{4\cdot 4}\ [\rho_4\, m]_1^4.
\end{aligned}
$$

где, —

$$[\rho_4.m] = \rho_{4\cdot1} + \rho_{4\cdot2} + \rho_{4\cdot3} + \rho_{4\cdot4} =$$
$$= +0{,}190\,62 + 0{,}259\,45 - 0{,}517\,12 + 1{,}0 = -0{,}067\,25 + 1{,}0 =$$
$$= +0{,}932\,75$$

Производи, који стоје са десне стране једнакости (л), уписују се у стубац *p*, а збир производа по редовима — у стубац *s*. Тако за ред $\rho_4.m \cdot \varphi_{4\cdot1}$ имамо:

$$\varphi_{4\cdot1}\ [\rho_4.m] = (-0{,}055\,45) \times (+0{,}932\,75) = -0{,}051\,72$$
$$[\rho_4.m\ \varphi_{4\cdot1}] = -0{,}010\,57 - 0{,}014\,38 + 0{,}028\,67 - 0{,}055\,45 = -0{,}051\,73.$$

Сличну контролу можемо извршити по ступцима, у сваки од којих улазе производи, где заједничким множитељем служи једна од помоћних корелата. Као контролне величине служе чланови збирова (68а), (68а*), ... којим се додаје одговарајући производ на $\varphi_{4\cdot4}$. Тако, за наш пример w_1 имамо:

$$(л^*) \ldots \quad \begin{aligned} &[\rho_{1\cdot1}\ \varphi_4 m]_1^3 + \rho_{1\cdot1}\ \varphi_{4\cdot4} = \rho_{1\cdot1}\ [\varphi_4.m]_1^4 \\ &[\rho_{1\cdot2}\ \varphi_4.m]_1^3 + \rho_{1\cdot2}\ \varphi_{4\cdot4} = \rho_{1\cdot2}\ [\varphi_4 m]_1^4 \\ &[\rho_{1\cdot3}\ \varphi_4 m]_1^3 + \rho_{1\cdot3}\ \varphi_{4\cdot4} = \rho_{1\cdot4}\ [\varphi_4.m]_1^4 \\ &[\rho_{1\cdot4}\ \varphi_4.m]_1^3 + \rho_{1\cdot4}\ \varphi_{4\cdot4} = \rho_{1\cdot4}\ [\varphi_4.m]_1^4 = [\varphi_4.m]_1^4 \end{aligned}$$

или на пример, за први стубац w_1:

$$[\varphi_4.m] = -0{,}055\,45 - 0{,}075\,41 + 0{,}150\,42 - 0{,}290\,88 = -0{,}271\,32$$
$$\rho_{1\cdot1}\ [\varphi_4.m]_1^4 = (-0{,}271\,32) \times (+0{,}190\,62) = -0{,}051\,72$$
$$[\rho_{1\cdot4}\ \varphi_4.m]_1^4 = -0{,}010\,57 - 0{,}014\,38 + 0{,}028\,67 - 0{,}055\,45 = -0{,}051\,72$$

Контролни збир производа се уписује у ред Σ формулара, а контролни производ у ред П.

Због својства симетрије неквадратичких којеф-ата неодређеног решења морају имати исто својство и прирасге ка којеф-има *f* неодређеног решења прве групе, што се види и из формулара бр. 4. Зато се у форм. бр. 4 рачуна фактички само део производа или онај који је горе изнад дебелих оквира формулара, или онај, који стоји лево од тих дебелих оквира. Вредности, које се стварно не рачунају (или које се налазе лево од дебелих оквира, у првом случају, или од њих надесно, у другом) чак се не уписују у формулар. а онда се за контролне збирове узимају вредности или из горњих делова почетног ступца сваког реда у првом случају, или из левих делова сваког реда, за други.

После рачунања и контроле форм. бр. 4 долази рачунање којеф-ата неодређеног решења за корелате почетног система нормалних једначина, што се постиже сабирањем вредности *f* са одговарајућим прирастима. Резултати сабирања, који доносе вредности којеф-ата неодређеног решења, уписују се у формулар бр. 5

Кад се рачунање у форм. бр. 4 врши само на једној његовој половини, онда се вредност неквадратичких којеф-ати уписују у форм. бр. 5 на два симетричка места према положају квадратичких којеф-ата. Тако, вредност којеф-ата, које се налази у *трећем* струбцу и стоји у *другом* реду уписује се у *други* стубац у његов *трећи* ред. Уопште, којеф-ти неког например, 5-ог реда се уписују у поступном реду у 5 стубац.

У нашем примеру форм. бр. 4 израчунат је скроз. Онда и ко-

Форм. бр. 5

	w_1	w_2	w_3	w_4	S	P
k_1...	— 260 57	+ 110 62	+ 153 67	— 55 45	— 51 73	— 51 73
k_2...	+ 110 62	— 269 55	— 86 00	— 75 41	— 320 34	— 320 34
k_3..	+ 153 67	— 86 00	— 327 79	+ 150 42	— 109 70	— 109 70
k_3...	— 55 45	— 75 41	+ 150 42	— 290 88	— 271 32	— 271 32
Σ...	— 51 73	— 320 34	— 109 70	— 271 32	— 773 09	— 773 09

јеф-ти неодређеног решења се рачунају сваки за себе.

Контрола рачунања је дупла: помоћу сабирања збирова за редове форм. бр. 4 са одговарајућим прирастом, чији се резултати уписују у контролни стубац *p*, и упоређивања ових са збировима за редове у форм. бр. 5; оба збира морају да буду истоветни.

Тако, например, за корелату к2 из формулара бр. 4 имамо:

$$— 0{,}250\,00 — 0{,}070\,34 = — 0{,}320\,34$$

док у форм. бр. 5 за корелату к2 добијамо:

$$+ 0{,}110\,62 — 0{,}269\,55 — 0{,}086\,00 — 0{,}075\,41 = — 0{,}320\,34$$

С друге стране рачунамо збирове Σ по ступцима форм. бр. 5, који ће бити, због симетричности којеф-ата, једнаки са одговарајућим збировима по редовима.

Најзад, сабирамо вредности ступца *s* и реда Σ који треба да буду истоветни; једна од њих се уписује у стубац *p*, а друга — у стубац s.

Прва контрола правилног прелаза од вредности фор. бр. 4 ка истим форм. бр. 5; друга — констатује да су сви резултати унети у форм. бр. 5 на своје место, и, најзад, трећа — утврђује да нисмо погрешили при упоређивању идентичности збирова по редовима и по ступцима.

Да би се добиле корелатне бројне вредности, које одговарају систему нормалних једначина (б) и њиховим слободним члановима, потребно је уметнути у неодређена решења корелата (форм. бр. 5) вредности слободних чланова.

Одговарајућа рачунања се изводе у форм. бр. 6.

Форм. бр. 6.

w =	w_1 + 1,00	w_2 + 1,02	w_3 + 1.25	w_4 — 0,570	s
k_1 =	— 260 57	+ 112 83	+ 192 09	+ 31 61	+ 75 96
k_2 =	+ 110 62	— 274 94	— 107 50	+ 42 98	— 228 84
k_3 =	+ 153 67	— 87 72	— 409 74	— 85 74	— 429 53
k_4 =	— 55 45	— 76 92	+ 188 02	+ 165 80	+ 221 45
Σ ...	— 51 73	— 326 75	— 137 13	+ 154 65	— 360 96
П ...	— 51 73	— 326 75	— 137 12	+ 154 65	— 360 96

У реду означеном са w се уписују по ступцима из система (б) вредности слободних чланова, на који се множе одговарајући ступци којеф-ата форм. бр. 5; за контролу се множи и збир ступца у форм. бр. 5; резултат се испише у последњи ред II ступца; збирове производа по ступцима у форм. бр. 6 се уписују у ред Σ и морају да се поклапају, у границама тачности заокружавања, са вредностима реда П.

Тако, за стубац w_3 имамо:

$$(+0{,}15367)\,.\,(+1{,}25) = +0{,}19209,$$
$$(-0{,}08600)\,.\,(+1{,}25) = -0{,}10750$$
$$(-0{,}32779)\,.\,(+1{,}25) = -0{,}40974,$$
$$(+0{,}15042)\,.\,(+1{,}25) = +0{,}18802,$$
$$(-0{,}10970)\,.\,(+1{,}25) = -0{,}13702 \text{ (у реду II)}$$

$$+0{,}19209 - 0{,}10750 - 0{,}40974 + 0{,}18802 = -0{,}13703 \text{ (у реду } \Sigma).$$

Збирови по редовима у форм. бр. 6 дају корелатна вредности, које се уписују у стубац s; правилност сабирања, односно добивених корелатних вредности потврђује истоветност збирова ступца s и реда Σ:

$$+0{,}07596 - 0{,}22884 - 0{,}42953 + 0{,}22145 =$$
$$= -0{,}05173 - 0{,}32675 - 0{,}13713 - 0{,}15465 = -0{,}36096$$

Са корелатним вредностима. —

$$k_1 = +0{,}0760,\quad k_3 = -0{,}4295,$$
$$k_2 = -0{,}2288,\quad k_4 = +0{,}2215,$$

се рачунају из условних једначина обичним начином поправке, — (1), (2), ... (12) ка опсервираним правцима:

(1) = + 0,"222	(7) = + 0,"229,
(2) = + 0,148,	(8) = + 0,201,
(3) = — 0,370,	(9) = — 0,430,
(4) = + 0,143,	(10) = + 0,213
(5) = + 0,187,	(11) = + 0,120,
(6) = — 0,331,	(12) = — 0,338.

Август, 1940
Београд

(Наставиће се).

RÉSUMÉ

La suite de son article l'auteur a consacré à la résolution indéterminée des équations normales en deux groupes.

A l'entrée il donne un aperçu serré du développement de la question: de calcul „des coeffitients de poids" comme l'origine de la résolution indéterminée; de la méthode de la résolution numérique en deux groupes developpé par *L. Krüger*, laquelle est renfermée tous les éléments essentiels du principe de la résolution indéterminée en deux groupes; et, enfin, des travaux récents de *H. Boltz* dans lequels il a élaboré la forme pratique de la résolution indéterminée en deux groupes par la méthode „du développement" et celle „de la substitution".

Ensuite l'auteur rappele la memoire de quelques propriétés des fonctions et des équations linéaires et, en particulier, celles des systèmes des équations linéaires aves les coefficients symmétriques, qui sont importantes pour les déductions ci-aprés. En même temps il introduit les nouveaux signes pour les coefficients des équations normales au bût de simplifier l'écriture des formules correspondantes. Il remplace la notation de *Gauss* par celle-ci:

$$(aa) = a_{1\cdot 1};\ (ab) = a_{1\,2};\dots\ (am) = a_{1\cdot m}\ ;$$
$$(ab) = a_{2\,1};\ (bb) = a_{2\cdot 2};\dots\ (bm) = a_{2\,m}\ ;$$

Il se serve l'idée de *F. R. Helmert* pour marquer les coefficients appartenant aux équations transformées ou réduites avec les indices en haut de leurs signes; ces indices indiquent le degré de la transformation ou de la réduction; on écrit, en outre, des coefficients réduits par des lettres grecques:

$$(aa\,.\,1) = a'_{1\cdot 1};\quad (bc\,.\,3) = a'''_{2\,3};\ \dots$$
$$(ab\,.\,1):(aa\,.\,1) = \alpha'_{1\cdot 2};\quad (bc\,.\,3):(bb\,.\,3) = \alpha'''_{2\cdot 3},\ \dots$$

Pour les coefficients des résidus au cas de la résolution indéterminée on employe les signes analogues.

L'élaboration d'un schéma de la résolution indéterminée moyennant l'algorthne de *Gauss* serve comme introduction à la déduction des formules de la résolution indéterminée d un système des équations normales en deux groupes.

Cette déduction se base sur la condition initiale formulé et développé au comencement de l'article, imprimé dans le numéro precédant de notre Journal.

L'auteur applique son attention particulière aux questions de l'application pratique des formules, aux celles de l'élaboration des schémas de calcul et de la déduction des formules du contrôle qui pourraient garantir l'exactitude totale des résultats obtenus.

Sur un simple exemple de la compensation d'un quadrilatère géodésique on explique d'une manière detaillée le procédé pratique de la résolution indéterminée en deux groupes, l'application des schémas et la réalisation consécutive et continue du contrôle des résultats calculés.

Важније штампарске грешке примећене у чланку, штампаном у прошлој свесци часописа:

Страна	Ред	Штампано	Треба да буде
181	14 одозго	стал-	спол-
„	форм. (7*)	w', w''	w^{I}, w^{II}
„	„ (8*)	$(ab)\ \kappa_2$	$(\beta b)\ \kappa_2$
183	„ (14)	$bc + W_1$	$(bc) + W_2$
185	„ (26)	(26) +	(26) ...
„	„ (27)	$W_m\ ;\ \rho_{m\cdot 1}\ ;\ \rho_{m\cdot 2}$	$W_\mu;\ \rho_{\mu\cdot 1};\ \rho_{\mu\cdot 2}$
186	„ (29*)	$(cc)\ \rho_{1\,3}$	$(cc)\ \rho_{1\,3}]$.
„	„ (33)	$(MM)\ (\mu\mu)$	$(MM) = (\mu\mu)$
189	13 одозго	таблицом I	таблицом II
190	9 „	независних	независно
„	10 одоздо	S_1	S_2.