Год. 21 Београд — мај-јуни Св. 3

ГЕОМЕТАРСКИ И ГЕОДЕТСКИ ГЛАСНИК
Орган Удружења Геометара и Геодета Краљевине Југославије
БЕОГРАД, Браће Југовића 16/I

Професор **Лав Сопоцко**

РЕШЕЊЕ НОРМАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА У ВИШЕ ГРУПА

I. УВОД

Све већи напредак и проширење тријангулационих радова, нарочито од почетка овог столећа, већ одавно је ставио на ред тражење нових начина решавања нормалних једначина, који би могли повећати област примене шеме Гауса познате под именом алгоритма Гауса. Како је познато, са повећањем броја нормалних једначина при заједничком њиховом решењу по алгоритму Гауса рачунске операције све више се компликују и успоравају.

Дугогодишњи сарадник Пруског геодетског института, проф Болц у предговору у једној од својих расправа каже:

„... техника рачунања по алгоритму Гауса не дозвољава, ни у ком случају, здружено решење више од 60 нормалних једначина. Покушаји да заједнички реше 80 и више нормалних једначина, показали су на најубедљивији начин да се од оваквих јуначких подухвата треба одрећи један пут за свагда".

Ипак, противно свим тешкоћама, после Светског рата, општенародни и државни интереси наметнули су заједничко изравнавање опширних прворазредних тријангулационих мрежа, које су се простирале или на већем делу, или на целом државном простору.

Тако током 1925—1927 г. у Југославији за потребе новог катастарског премера била је изравната, као једна целина, прво-класна тријангулациона мрежа постављена у границама бивше Краљевине Србије и Црне Горе са њеним прикључком на западу на 6 тачака бивше аустријске мреже. У изравнавање је ушло 320 условних, односно нормалних једначина.

У току нешто више од годину дана (1926—27 г.) била је изравната у Чехословачкој цела т. з. основна катастарска мрежа. Број условних једначина, које су заједнички решене, пењао се је на 559.

Најзад, Пруски геодетски институт преузео је 1926 г. изравнавање прво-класне тријангулације на целом простору Немачког рајха паралелно са њеном реамбулацијом и допуном. Посао је био свршен 1937 г. и за то време је решено 673 условних једначина.

Теоријска истраживања нових начина решавања нормалних једначина почела су већ одавно, готово од времена постанка начина најмањих квадрата. Али она постају интензивнија и скрећу на себе пажњу и интересе ширих геодетских кругова тек онда, кад је развој геодетских радова створио услове за њихову практичну употребу.

У самом почетку здружено решење већег броја условних, односно нормалних једначина покушавају изводити начином постугіног приближавања.

Проф. Кригер објавио је 1905 и 1906 г. у аналима Пруског геодетског института (Neue Folge — № № 18 и 25) своја истраживања једног практичног начина решења нормалних једначина, које је применио Гаус при изравнавању Хановерске градусне мреже. Гаус није оставио после себе никакве теоријске основе решења овог начина, ако у то не треба рачунати кратак опис поступка, који је Гаус навео у једном од писама Герингу. Гаус га је убројавао у начине постугіног приближавања. Кригер је успео да разради математичке основе Гаусовог практичног начина и доказао је да он спада у ред начина решавања нормалних једначина, који у свему одговарају условима начина најмањих квадрата.

Мисао Гауса састојала се у томе да систем условних, односно нормалних, једначина подели у две групе, тако да би се свака од њих могла решити независно од друге и да би се резултати, добивени на такав начин поклапали са резултатима здружног решења.

Својом првом расправом (бр. 18) Кригер је први створио строги начин бројног решења нормалних једначина у две групе.

Друга његова расправа (бр. 25) има толико сажету и општу математичку форму да претставља озбиљну препреку за њено лако разумевање и усвајање. У њој Кригер анализира основе практичке примене двогрупног начина ка изравнавању тријангулационих мрежа простијих облика, као што су централни систем, прости и сложен ланац.

Због генералисања извода ово дело Кригера садржи све главне основе сасвим новог начина решења нормалних једначина, које је доцније разрадио Болц, један од најближих сарадника Кригера.

Гаус, као што и Кригер, сматрали су двогрупни начин решавања као бројни, док му је својим формулама, намењеним за нарочите случајеве изравнавања, Кригер дао облик неодређеног решења.

Проф. Болц је продужио Кригерова истраживања и 1919 г. објавио је у мартовској свесци часописа „Zeitschrift für Vermessungswesen“ теорију начина двогрупног решавања нормалних једначина у неодређеној форми.

1923 г. излази у аналима Пруског геодетског института опширна анализа (бр. 90) проф. Болца практичке примене новог начина, назватог од Болца „*начином развијања*“ (Entwickelungs Verfahren), ка изравнавању тријангулационих мрежа са произвољним бројем троуглова. Већина упрошћавања рачунских операција разрађених Боцлом била су већ обележена у горе поменутој расправи Кригера.

Болцови радови стварају могућност прелаза од двогрупног начина ка начину решавања нормалних једначина у више група.

Начин развијања био је примењен при горе поменутом изравнању Немачке државне прворазредне тријангулације.

Инж. Кржовак, шеф чешке тријангулационе канцеларије, искористио је на изравнању основне катастарске мреже начин, готово индетичан са начином развијања, али је разрађен у оригиналан облик поступног приближавања; дефинитивни резултати изравнавања су добивени тек после 92 поступна приближавања.

Изравнавање југословенске катастарске мреже извршено је непосредним решењем условних једначина путем поступног приближавања.

Изравнавање Немачке мреже осведочило је да начин развијања у том облику, који му је дао Болц, има слично алгоритму Гауса своје границе примене, које се одређују са 200 условних (нормалних) једначина. Ради проширења ових граница проф. Болц је разрадио накнадни начин спајања у једну целину резултата изравнавања по начину развијања три суседна дела једне опширне мреже.

Објављен у једном од последњих анала Пруског геодетског института (№ 108) и назван од Болца **„*начином замене*“** (Substitutions — Verfahren), овај начин се односи на начине бројног решења једначина. Али помоћу замашних рачунских операција он ће се моћи свести на начин неодређеног решења.

Начин развијања привукао је пажњу руских геодета, где је питање изравнавања опширних тријангулација постало актуелним због јаког пораста за последњих 10 година тријангулационих радова, који сада прекривавају огромне површине.

У том погледу могли би се споменути радови *проф. Н. А. Урмајева* и *доцента А. А. Изотова*, који упрошћавају и олакшавају низ рачунских операција, везаних за Кригеров и Болцов начин решавања нормалних једначина.

Други пут за решење једначина у више група изабрао је *И. Ј. Пранис-Прањевић.*

Његов начин, који је он објаснио на странама часописа „Геодезист“ за 1935 г. (бр. 6) и за 1936 г. (бр. 1), се оснива на својствима т. зв. *еквивалентних* система једначина. Подела триангулационе мреже на неколико делова, суседних један другоме, и формирање једначина грешака (при изравнавању по начину посредних мерења) или условних једначина (при изравнавању по начину условних мерења, а под условом изравнавања углова) тако да би једначине са елементима мреже који припадају двема суседним деловима, биле стављене на последње место у систему условних једначина, дозвољавају да се у систему нормалних једначина, редуцираном по алгоритму Гауса независно за сваки део мреже, на последњем месту формирају групе еквивалентних једначина. Ове групе се одвајају од сваког појединог система и после спајања се решавају засебно. Добивене вредности непознатих (поправака или корелата) имају ваљаност за све остале, одвојене делове нормалних једначина.

У стручној литератури нису још објављени резултати практичке примене начина Пранис-Прањевића на изравнавању тријангулационих мрежа.

Садашња расправа је посвећена даљем истраживању начина решавања нормалних једначина у више група у вези са омогућавањем изравнавања тријангулационих мрежа, као једне целине, без обзира на њихову величину и опширност.

2^0... Бројно решење нормалних једначина у две групе

Гаус и Геринг при подели условних једначина у две групе предпостављали су да се при решавању одговарајућих двеју група нормалних једначина начином поступног приближавања добијају поступно вредности поправака,—

$$(1) \ldots \qquad v'_k,\ v''_k,\ v'''_k, \ldots$$

чије се вредности поступно смањују, док не постигну одређену границу тачности. Вредности (1) везане су са траженом вредношћу v_k поправке једноставном једначином:

$$(2) \ldots \qquad v_k = v'_k + v''_k + v'''_k + \cdots$$

Кригер у свом истраживању [1] трансформира нормалне једначине друге групе условних једначина под основним условом да

$$(3) \ldots \qquad v_k = v'_k + v''_k$$

где v'_k су поправке добивене из условних једначина прве групе при њиховом одвојеном изравнању, v''_k су поправке добивене из условних једначина друге групе при њиховом одвојеном изравнавању преко трансформираних нормалних једначина ове групе.

Пошто је Кригер узео као полазну тачку својих расуђивања, услов (3), онда и облик, који је он дао начину двогрупног решења, морао је да остане у оквиру овог услова (3).

Међутим, кад би се одвојили од услова (3), онда се начин двогрупног решења може поставити на ширију основу, која ће бити у исто време и простија.

Усвојимо, дакле, следећу дефиницију постављеног проблема:

Подељене у две групе условне једначине трансформирати под условом да се из решења нормалних једначина трансформиране прве групе условних једначина добијају праве вредности кореламa прве групе, а из решења нормалних једначина трансформиране друге групе условних једначина — праве вредности њених корелата, т. ј. оне вредности које задовољавају цели систем нетрансформираних нормалних једначина.

Кригерова трансформација друге групе условних једначина одговара условима постављеног проблема и он се тиме своди на трансформацију условних једначина прве групе.

Да би се избегла компликованост и гломазност при изводу формула, а постигла већа јасноћа при њиховој трансформацији, општи број условних једначина, означен са n, своди се на 5, број једначина n_1 прве групе на 3 и број једначина η_2, друге групе — на 2. Број непознатих условних једначина m остављен је произвољан.

Број корелата и број нормалних једничина у овом случају биће једнак, — за општи систем $n = 5$; за прву групу $n_1 = 3$ и за другу групу — $\eta_2 = 2$.

---

[1] *L. Krüger*. Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen. Veröf. des König. Preuss, Jnstitutes. Neue Folge № 18. Potsdam. 1905.

У општем случају при произвољном броју једначина имамо:

(4) ... $$n = n_1 + \eta_2$$

Непознате условних једначина означимо са v_r, где се индекс r одређује место непознате у једначинама и може добити вредност једног од броја у реду:

(5) ... $$r = 1, 2, 3, \ldots m.$$

За ознаку корегата прве групе искористимо симбол k_p, где:

(6) ... $$p = 1, 2, 3, \ldots n_1$$

Број p одређује место корелате у нормалним једначинама и број условне једначине на коју се односи корелата k_p.

На исти начин за символ корелата друге групе изабира се $k\pi$, где:

(6*) ... $$\pi = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \ldots \eta_2.$$

Да би се условне једначине прве групе одвојиле и по сталном изгледу од једначина друге групе, за ознаку коефицијената у првој групи се користе латинска слова, у другој — грчка; индекс при ознаци коефицијента је индентичан са индексом непознате. Слободне чланове означимо са w_q где q одговара броју условне једначине, дакле, редовима (6) и (6*).

Према томе, систем од 5 условних једначина подељен на две групе изгледаће овако:

(7) ... $$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_m v_m + w_1 &= 0, \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + b_m v_m + w_2 &= 0, \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_m v_m + w_3 &= 0; \end{aligned}$$

(7*) ... $$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_m v_m + w' &= 0, \\ \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_2 + \ldots + \beta_m v_m + w'' &= 0. \end{aligned}$$

Нормалне једначине корелата за све условне једначине (7) и(7*) сачињавају *општи* систем нормалних једначина; нормалне једначине одвојено за прву (7) или за другу (7*) групу условних једначина *делимични* (први, други) системи нормалних једначина:

Напишемо општи систем нормалних једначина!

(8) ... $$\begin{aligned} (aa)\,\kappa_1 + (ab)\,\kappa_2 + (ac)\,\kappa_3 + (a\alpha)\,\kappa_{\mathrm{I}} + (a\beta)\,\kappa_{\mathrm{II}} + w_1 &= 0, \\ (ba)\,\kappa_1 + (bb)\,\kappa_2 + (bc)\,\kappa_3 + (b\alpha)\,\kappa_{\mathrm{I}} + (b\beta)\,\kappa_{\mathrm{II}} + w_2 &= 0, \\ (ca)\,\kappa_1 + (cb)\,\kappa_2 + (cc)\,\kappa_3 + (c\alpha)\,\kappa_{\mathrm{I}} + (c\beta)\,\kappa_{\mathrm{II}} + w_3 &= 0; \end{aligned}$$

(8*) ... $$\begin{aligned} (\alpha a)\,\kappa_1 + (\alpha b)\,\kappa_2 + (\alpha c)\,\kappa_3 + (\alpha\alpha)\,\kappa_{\mathrm{I}} + (\alpha\beta)\,\kappa_{\mathrm{II}} + w_{\mathrm{I}} &= 0, \\ (\beta a)\,\kappa_1 + (\alpha b)\,\kappa_2 + (\beta c)\,\kappa_3 + (\beta\alpha)\,\kappa_{\mathrm{I}} + (\beta\beta)\,\kappa_{\mathrm{II}} + w_{\mathrm{II}} &= 0. \end{aligned}$$

где:

(8**) ... $$(mn) = m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 + \ldots$$

Трансформишемо према Кригеру другу групу (7*) једначина тако, даби њихов делимичан систем нормалних једначина зависио само од корелата $k\pi$ друге групе и могао у општем систему (8) и (8*) заступати место једначина (8*).

Означимо трансформиране вредности коефицијената и слободних чланова великим словима; онда се трансформиране условне једначине друге групе (7*) напишу у облику:

$$(9)\ \dots\quad \begin{aligned} A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + \dots A_m v_m + W_I &= 0, \\ B_1 v_1 + B_2 v_2 + B_3 v_3 + \dots B_m v_m + W_{II} &= 0, \end{aligned}$$

а одговарајући делимичан систем нормалних једначина у облику:

$$(9^*)\ \dots\quad \begin{aligned} (AA)\, \kappa_I + (BA)\, \kappa_{II} + W_I &= 0, \\ (BA)\, \kappa_I + (BB)\, \kappa_{II} + W_{II} &= 0, \end{aligned}$$

Кад би систем (9*) могао заступати у општем систему (8) — (8*) једначине (8*), онда би и једначине (9) могле заступати у систему (7) — (7*) условне једначине друге групе (7*), али под условом да се претходно и једначине прве групе (7) трансформишу. Без тог услова, као што је у свом изводу примио и Кригер, вредности корелата прве групе ће се променити према онима које се добивају из решења општег система нормалних једначина,

Означимо промењене вредности корелата прве групе са k_1', k_2', k_3', .. и формирамо општи систем нормалних једначина за условне једначине (7) и (9): онда ћемо добити:

$$(10)\ \dots\quad \begin{aligned} (aa)\, \kappa_1' + (ab)\, \kappa_2' + (ac)\, \kappa_3' + (aA)\, \kappa_I + (aB)\, \kappa_{II} + w_1 &= 0, \\ (ba)\, \kappa_1' + (bb)\, \kappa_2' + (bc)\, \kappa_3' + (bA)\, \kappa_I + (bB)\, \kappa_{II} + w_2 &= 0, \\ (ca)\, \kappa_1' + (cb)\, \kappa_2' + (cc)\, \kappa_3' + (cA)\, \kappa_I + (cB)\, \kappa_{II} + w_3 &= 0; \end{aligned}$$

$$(10^*)\ \dots\quad \begin{aligned} (Aa)\, \kappa_1' + (Ab)\, \kappa_2' + (Ac)\, \kappa_3' + (AA)\, \kappa_I + (AB)\, \kappa_{II} + w_I &= 0. \\ (Ba)\, \kappa_1' + (Bb)\, \kappa_2' + (Bc)\, \kappa_3' + (BA)\, \kappa_I + (BB)\, \kappa_{II} + w_{II} &= 0, \end{aligned}$$

Да би друга група (10*) нормалних једначина постала идентична систему (9*) потребно је да трансформирани коефицијенти друге групе условних једначина (9) задовољавају шест (у општем случају $n_1 . n_2$) следећих услова:

$$(11)\ \dots\quad \begin{aligned} (Aa) = 0;\ (Ab) = 0;\ (Ac) = 0; \\ (Ba) = 0;\ (Bb) = 0;\ (Bc) = 0; \end{aligned}$$

где на пример:

$$(11^*)\ \dots\ (Bb) = B_1 b_1 + B_2 b_2 + B_2 b_3 + \dots + B_m b_m .$$

Под условима (11) прва група нормалних једначинама (8) се мења у следећу:

$$(12)\ \dots\quad \begin{aligned} (aa)\, \kappa_1' + (ab)\, \kappa_2' + (ac)\, \kappa_3' + w_1 &= 0, \\ (ba)\, \kappa_1' + (bb)\, \kappa_2' + (cc)\, \kappa_3' + w_2 &= 0, \\ (ca)\, \kappa_1' + (cb)\, \kappa_2' + (cc)\, \kappa_3' + w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ако упоредимо (12) са нормалном једначином (8) онда се лако види да оба система једначина постају идентични при замени слободних чланова у систему (12) изразима:

$$(13)\ \dots\quad \begin{aligned} W_1 &= (a\alpha)\,\kappa_I + (a\beta)\,\kappa_{II} + w_1, \\ W_2 &= (b\alpha)\,\kappa_I + (b\beta)\,\kappa_{II} + w_2, \\ W_3 &= (c\alpha)\,\kappa_I + (c\beta)\,\kappa_{II} + w_3. \end{aligned}$$

Јасно је да при оваквој замени вредности корелата, које ће лиферовати систем (12), биће идентичне са вредностима корелата $k_1, k_2, k_3, \dots$, које се добивају из општег система (8) — (8*).

На такав начин систем:

$$(14)\ \dots\quad \begin{aligned} (aa)\,\kappa_1 + (ab)\,\kappa_2 + (ac) + W_1 &= 0, \\ (ba)\,\kappa_1 + (bb)\,\kappa_2 + (bc) + W_1 &= 0, \\ (ca)\,\kappa_1 + (cb)\,\kappa_2 + (cc) + W_3 &= 0; \end{aligned}$$

$$(14^*)\ \dots\quad \begin{aligned} (AA)\,\kappa_I + (AB)\,\kappa_{II} + W_I &= 0, \\ (BA)\,\kappa_I + (BB)\,\kappa_{II} + W_{II} &= 0; \end{aligned}$$

потпуно замењује првобитни систем (8) — (8*) и из његовог решења корелате добивају исте вредности, као из решења система (8) — (8*).

Систем (14) — (14*) претставља, дакле, трансформирани систем (8) — (8*).

Из упоређења (14) са (8) се види да је за трансформацију прве групе (7) условних једначина довољно трансформирати њихове слободне чланове по формулама (13).

За дефинитивно решење постављеног проблема остаје извести изразе за коефицијенте и слободне чланове трансформираних једначина (9).

Број услова (11)—6 (у општем случају $n_1 . \eta_2$) није довољан за одређивање већег броја трансформираних коефицијената, који је према (9), једнак са 2m (у општем случају $m . \eta_2$).

Што је, за општи случај; —

$$(15)\qquad \dots\ n_1 . \eta_2 < m . \eta_2$$

следи из тога да је број m непознатих условних једначина увек већи од броја n самих једначина

$$(16)\qquad \dots\ n < m,$$

а пошто n_1, према (4), претставља само један део од n, то је и

$$(16^*)\qquad \dots\ n_1 < m.$$

Једначине (11) одређују зависност само између трансформираних коефицијената и коефицијената прве групе условних једначина. Међутим мора, постојати, што је разумљиво само од себе, зависност између трансформираних коефицијената и коефицијената друге групе.

Да би одредили ову зависност пођемо Кригеровим путем: помножимо прву групу једначина (7), редом, на неодређене чиниоце;

$$(17)\qquad \dots\ \rho_{1\cdot 1};\ \rho_{1\cdot 2};\ \rho_{1\cdot 3}$$

и саберемо све производе са првом од једначина друге групе (7*). Групишући чланове према непознатим v_κ добићемо:

$$(18)\ \ldots\ \begin{aligned}&(\alpha_1 + a_1\,\rho_{1\cdot1} + b_1\,\rho_{1\cdot2} + c_1\,\rho_{1\cdot3})\,v_1 + (\alpha_2 + a_2\,\rho_{1\cdot1} + b_2\,\rho_{1\cdot2} +\\ &b_2\,\rho_{1\cdot3})\,v_2 + \ldots + (\alpha_m + a_m\,\rho_{1\cdot1} + b_m\,\rho_{1\cdot2} + c_m\,\rho_{1\cdot3})\ v_m +\\ &(w_I + w_1.\rho_{1\cdot1} + w_2.\rho_{1\cdot2} + w_3\,\rho_{1\cdot3}) = 0\end{aligned}$$

Изаберемо неодређене чиниоце (17) тако, даби једначина (18) постала идентична са првом од једначина (9). Онда треба да имамо:

$$(19)\ \ldots\ \begin{aligned}&A_1 = \alpha_1 + a_1.\rho_{1\cdot1} + b_1.\rho_{1\cdot2} + c_1.\rho_{1\cdot3},\\ &A_2 = \alpha_2 + a_2\,\rho_{1\cdot1} + b_2\,\rho_{1\cdot2} + c_2\,\rho_{1\cdot3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A_m = \alpha_m + a_m\,\rho_{1\cdot1} + b_m\,.\,\rho_{1\cdot2} + c_m\,.\,\rho_{1\cdot3}\\ &W_I = w_I + w_1\,.\,\rho_{1\cdot1} + w_2\,.\,\rho_{1\cdot2} + w_3\,.\,\rho_{1\cdot3}\end{aligned}$$

Изрази (19) могу да буду идентични коефицијентима прве трансформиране једначине тек онда, кад они задовољавају први ред једначина (11). Ако уврстимо ове изразе у једначине (11), добиһемо:

$$(20)\ \ldots\ \begin{aligned}&(Aa) = (aa)\,\rho_{1\cdot1} + (ab)\,\rho_{1\cdot2} + (ac)\,\rho_{1\cdot3} + (a\alpha) = 0,\\ &(Ab) = (ba)\,\rho_{1\cdot1} + (bb)\,\rho_{1\cdot2} + (bc)\,\rho_{1\cdot3} + (b\alpha) = 0,\\ &(Ac) = (ca)\,\rho_{1\cdot1} + (cb)\,\rho_{1\cdot2} + (cc)\,\rho_{1\cdot3} + (c\alpha) = 0.\end{aligned}$$

Из овог система линеарних једначина одређују се вредности неодређених чинилаца (17), а са њиховом помоћу из (19) вредности коефицијената прве трансформиране једначине (9).

Ако упоредимо систем (20) са једначинама (14), онда се види да овај систем (20) има облик нормалних једначина прве групе са разликом само у слободним члановима, који у систему (20) заступају коефицијенти прве једначине у систему (8*) при корелатама *прве групе*. Према томе, можемо назвати величине (17) *помоћним корелатама*.

За одређивање коефицијената друге трансформиране једначине у систему (9) множимо једначине (7), редом на другу групу корелата, —

$$(21)\ \ldots\qquad \rho_{2\cdot1};\ \rho_{2\cdot2};\ \rho_{2\cdot3}$$

и сабирамо производе са другом од једначина (7*).

На начин сличан горе описатом и обазирући се на други ред услова (11) нађемо ред израза за коефицијенте друге трансформиране једначине система (9);

$$(22)\ \ldots\ \begin{aligned}&B_1 = \beta_1 + a_1\,.\,\rho_{2\cdot1} + b_1\,.\,\rho_{2\cdot2} + c_1\,.\,\rho_{2\cdot3},\\ &B_2 = \beta_2 + a_2\,.\,\rho_{2\cdot1} + b_2\,.\,\rho_{2\cdot2} + c_2\,.\,\rho_{2\cdot3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &B_m = \beta_m + a_m\,.\,\rho_{2\cdot1} + b_m\,.\,\rho_{2\cdot2} + c_m\,.\,\rho_{2\cdot3},\\ &W_{II} = w_{II} + w_1\,.\,\rho_{2\cdot1} + w_2\,.\,\rho_{2\cdot2} + w_3\,.\,\rho_{2\cdot3},\end{aligned}$$

као и систем једначина за одређивање друге групе помоћних корелата (21):

$$(23)\ \ldots\ \begin{aligned}&(Ba) = (aa)\,\rho_{2\cdot1} + (ab)\,\rho_{2\cdot2} + (ac)\,\rho_{2\cdot3} + (a\beta) = 0,\\ &(Bb) = (ba)\,\rho_{2\cdot1} + (bb)\,\rho_{2\cdot2} + (bc)\,\rho_{2\cdot3} + (b\beta) = 0,\\ &(Bc) = (ca)\,\rho_{2\cdot1} + (cb)\,\rho_{2\cdot2} + (cc)\,\rho_{2\cdot3} + (c\beta) = 0.\end{aligned}$$

Очигледно је да при већем, но два, броју условних и трансформираних једначина (9) друге групе, биће већи и број засебних група помоћних корелата и увек једнак са бројем условних једначина друге групе; у оштем случају он је једнак η_2.

Систем (23) нормалних једначина се разликује од система (14) и (20) само слободним члановима, који су у систему (23) идентични са коефицијентима *друге* једначине система (8*) при корелатама *прве* групе.

Из наведених правила формирања нормалних једначина помоћних корелата лако се изводи опште правило формирања за произвољан број једначина прве и друге групе.

Тако, за групу помоћних корелата, —

$$(24) \ldots \qquad \rho_{\mu\cdot 1};\ \rho_{\mu\cdot 2};\ \rho_{\mu\cdot 3};\ \ldots$$

која одговара μ-тој трансформираној једначини друге групе:

$$(25) \ldots\ M_1 v_1 + M_2 v_2 + \cdots + M_m v_m + W_m = 0,$$

одговарајући систем нормалних једначина биће следећи:

$$(26) \ldots \begin{array}{l} (aa)\rho_{\mu\cdot 1} + (ab)\rho_{\mu\cdot 2} + (ac)\rho_{\mu\cdot 3} + \cdots + (an)\rho_{\mu\cdot n} + (a\mu) = 0, \\ (ab)\rho_{\mu\cdot 1} + (bb)\rho_{\mu\cdot 2} + (bc)\rho_{\mu\cdot 3} + \cdots + (bn)\rho_{\mu\cdot n} + (b\mu) = 0, \\ (ac)\rho_{\mu\cdot 1} + (bc)\rho_{\mu\cdot 2} + (cc)\rho_{\mu\cdot 3} + \cdots + (cn)\rho_{\mu\cdot n} + (c\mu) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (an)\rho_{\mu\cdot 1} + (bn)\rho_{\mu\cdot 2} + (cn)\rho_{\mu\cdot 3} + \cdots + (nn)\rho_{\mu\cdot n} + (n\mu) = 0, \end{array}$$

где слободни чланови су коефицијенти μ-те нормалне једначине у систему (8*) при корелатама прве групе.

Изрази за трансформиране коефицијенте и слободан члан једначине (25) се напишу овако:

$$(27) \ldots \begin{array}{l} M_1 = \mu_1 + a_1\rho_{\mu\cdot 1} + b_1\rho_{\mu\cdot 2} + \cdots + n_1\rho_{\mu\cdot n}, \\ M_2 = \mu_2 + a_2\rho_{\mu\cdot 2} + b_2\rho_{\mu\cdot 2} + \cdots + n_2\rho_{\mu\cdot n}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_m = \mu_m + a_m\rho_{\mu\cdot 1} + b_m\rho_{\mu\cdot 2} + \cdots + n_m\rho_{\mu\cdot n}, \\ W_m = w_\mu + w_1\rho_{m\cdot 1} + w_2\rho_{m\cdot 2} + \cdots + w_n\rho_{\mu\cdot n}. \end{array}$$

Формирање нормалних једначина (14*) могло би се извести помоћу којефицијената трансформисаних једначина (9) на основу уобичајеног за то поступка. Али пошто према формулама (19), (22), (27) трансформисани коефицијенти су везани за вредности помоћних корелата (17), (21), (24), целисходније је коефицијенте једначина (14*) рачунати директно из вредности ових последњих.

Тако из система (17) имамо:

$$28) \ldots\ A_i = \alpha_i + a_i \cdot \rho_{1\cdot 1} + b_i \cdot \rho_{1\cdot 2} + c_i \cdot \rho_{1\cdot 3},$$

где *i* има вредности реда (5).

Подигнемо A_i на квадрат:

$$(28^*) \ldots\ A_i A_i = \alpha_i^2 + 2\alpha_i \cdot a_i \cdot \rho_{1\cdot 1} + 2\alpha_i \cdot b_i \cdot \rho_{1\cdot 2} + 2\alpha_i \cdot c_i \cdot \rho_{1\cdot 3} + \\ + a_i^2 \cdot \rho^2_{1\cdot 2} + 2 a_i \cdot b_i \cdot \rho_{1\cdot 1}\rho_{1\cdot 2} + 2 a_i \cdot c_i \cdot \rho_{1\cdot 1}\rho_{1\cdot 3} + \\ + b_i^2 \rho^2_{1\cdot 2} + 2 b_i \cdot c_i \cdot \rho_{1\cdot 2}\rho_{1\cdot 3} + \\ + c^2_i \rho^2_{1\cdot 3}.$$

Сваки од дуплих чланова претставимо као збир двеју једнаких сабирака и један од њих придружимо ка члану $\alpha^2{}_i$, или, евентуално кад α_i не улази у састав дуплог члана, ка члану са првом помоћном корелатом у квадрату, а други сабирак придружимо ка оном члану, где улази у квадрат друга помоћна корелата. Заједнички чинилац у тако формираним групама чланова, осим прве групе са $\alpha^2{}_i$, извлачимо пред заградом. Онда ћемо добити:

$$
(29)\ \ldots\quad \begin{aligned}
A_i A_i = {} & (\alpha_i \alpha_i + a_i \alpha_i \rho_{1\cdot 1} + b_i \alpha_i \rho_{1\cdot 2} + c_i \alpha_i \rho_{1\cdot 3}) + \\
& + \rho_{1\cdot 1} (a_i \alpha_i + a_i a_i \rho_{1\cdot 1} + a_i b_i \rho_{1\cdot 2} + a_i c_i \rho_{1\cdot 3}) + \\
& + \rho_{1\cdot 2} (b_i a_i + b_i \alpha_i \rho_{2\cdot 1} + b_i b_i \rho_{2\cdot 2} + b_i c_i \rho_{2\cdot 3}) + \\
& + \rho_{1\cdot 3} (c_i \alpha_i + c_i a_i \rho_{3\cdot 1} + c_i b_i \rho_{3\cdot 2} + c_i c_i \rho_{2\cdot 3}) \cdot
\end{aligned}
$$

Ако заменимо индекс i поступно његовим вредностима из реда (5) и добивени изрази за свемогуће нроизводе $A_i A_i$ саберемо, онда ћемо добити:

$$
(29^*)\ \ldots\quad \begin{aligned}
(AA) = {} & (\alpha\alpha) + (a\alpha) \rho_{1\cdot 1} + (b\alpha) \rho_{1\cdot 2} + (c\alpha) \rho_{1\cdot 3} + \\
& + \rho_{1\cdot 1} [(a\alpha) + (aa) \rho_{1\cdot 1} + (ab) \rho_{1\cdot 2} + (ac) \rho_{1\cdot 3}] + \\
& + \rho_{1\cdot 2} [(b\alpha) + (ba) \rho_{1\cdot 1} + (bb) \rho_{1\cdot 2} + (bc) \rho_{1\cdot 3}] + \\
& + \rho_{1\cdot 3} [(c\alpha) + (ca) \rho_{1\cdot 1} + (cb) \rho_{1\cdot 2} + (cc) \rho_{1\cdot 3}.
\end{aligned}
$$

Обзиром на једначине (20) три последња члана у изразу (29*) се елиминишу и формула (29*) добива дефинитивни облик:

$$
(30)\ \ldots\ (AA) = (\alpha\alpha) + (a\alpha) \rho_{1\cdot 1} + (b\alpha) \rho_{1\cdot 2} + (c\alpha) \rho_{1\cdot 3}
$$

Коефицијенти (AB) и (BA), који су због симетрије једнаки добијају се множењем једначина (19) на одговарајуће, према индексу, једначине (22). При груписању чланова овог производа можемо у свакој групи, осим прве, извлачити испред заграда или помоћну корелату прве групе (17), или исту друге групе (21). На такав начин добијамо два израза за коефицијент (AB), односно, (BA):

$$
(31)\ \ldots\quad \begin{aligned}
(AB) & = (\alpha\beta) + (a\beta) \rho_{1\cdot 1} + (b\beta) \rho_{1\cdot 2} + (c\beta) \rho_{1\cdot 3} = \\
& = (\beta\alpha) + (a\alpha) \rho_{2\cdot 1} + (b\alpha) \rho_{2\cdot 2} + (c\alpha) \rho_{2\cdot 3} = (BA)
\end{aligned}
$$

Коефицијент (BB) добија се подизањем на квадрат једначина (22) и следећим сумирањем добивених резултата:

$$
(32)\ \ldots\ (BB) = (\beta\beta) + (a\beta) \rho_{2\cdot 1} + (b\beta) \rho_{2\cdot 2} + (c\beta) \rho_{2\cdot 3}.
$$

У општем случају исту операцију изводимо са једначинама (27) и једном од осталих група трансформираних коефицијената облика (19) и (22). Имаћемо:

$$
(33)\ \ldots\ (MM)\ (\mu\mu) + (a\mu).\ \rho_{\mu\cdot 1} + (b\mu).\ \rho_{\mu\cdot 2} + \ldots + (n\mu)\ \rho_{\mu\cdot n}.
$$

и

$$
(34)\ \ldots\quad \begin{aligned}
(BM) & = (\mu\beta) + (a\beta) \rho_{\mu\cdot 1} + (b\beta) \rho_{\mu\cdot 2} + \ldots + (n\beta) \rho_{\mu\cdot n} = \\
& = (\beta\mu) + (a\mu) \rho_{2\cdot 1} + (b\mu) \rho_{2\cdot 2} + \ldots + (n\mu) \rho_{\mu\cdot\mu} = (MB)
\end{aligned}
$$

Рачунски поступак по изведеним формулама је следећи:

1) … формирање условних једначина (6) и (6*), њихово уписивање у таблице и контрола помоћу шеме условних једначина.[2])

---

[2]) **Проф. Лав Сопоцко.** Пример за искоришћавање шеме условних једначина. Геом. и Геод. Глас. 1940. Св. 1, стр. 1—12.

2) ... Рачунање коефицијената нормалних једначина за општи систем (8)—(8*), уписивање у таблице и контрола.

3) ... Подела нормалних једначина у две групе и одвајање коефицијената прве групе у алгоритам Гауса за рачунање група помоћних корелата.

4) ... Рачунање вредности помоћних корелата.

5) ... Рачунање којефицијената трансформираних нормалних једначина (29*).

6) ... Рачунање по алгоритму Гауса вредности корелата друге групе из трансформираних нормалних једначина (14*).

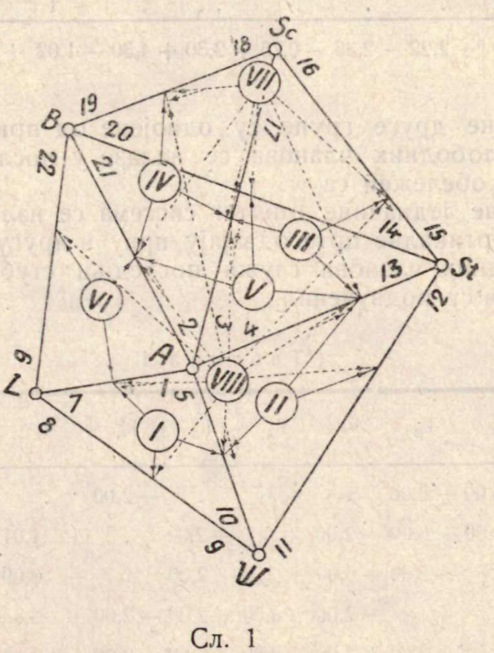
7) ... Трансформирање слободних чланова прве групе према изразима (13).

8) ... Рачунање у алгоритму Гауса, где су се рачунале помоћне корелате а у засебном ступцу, редукције трансформораних слободних чланова система (14) и рачунање корелатних вредности прве групе.

9) ... Рачунање непознатих у условним једначинама (7)—(7*).

3° ... Пример на бројно решење нормалних једначина у две групе

За рачунање је узет систем нормалних једначина за петоугаоник Хановерске варошке мреже (сл. 1), како је он наведен у књизи Јордана.[3]) Мрежа има 5 тачака, 11 двостраних, односно 22



Сл. 1

једностраних праваца који су међусобно везани са 8 услова, — 6 услова фигура и 2 полусна.

[3]) **Jordan.** Handbuch der Vermessungskunde. Erster Band. Stuttgart. 1910 тр. 219—227.

Подела условних једначина у две групе изведена је тако да прву групу сачињавају 6 угловних једначина, док другу — 2 полусне. Условне једначине су стављене у таблицу I.

Таблица I.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
(1)...	+ 1	.	.	.	.	— 1	.	.
(2)...	.	.	.	— 1	— 1	+ 1	— 2,53	.
(3)...	.	.	— 1	+ 1	.	.	+ 4,11	.
(4)...	.	— 1	+ 1	.	+ 1	.	— 1,58	.
(5)...	— 1	+ 1	.	.	.	.	.	.
(6)...	.	.	.	.	.	— 1	.	— 0,54
(7)...	— 1	.	.	.	.	+ 1	.	+ 2,64
(8)...	+ 1	.	.	.	.	.	.	— 2,10
(9)...	— 1	.	.	.	.	.	.	— 3,13
(10)...	+ 1	— 1	.	.	.	.	.	+ 4,88
(11)...	.	+ 1	.	.	.	.	.	— 1,75
(12)...	.	— 1	.	.	.	.	.	— 3,07
(13)...	.	+ 1	— 1	.	— 1	.	— 0,57	+ 3,64
(14)...	.	.	.	.	+ 1	.	+ 3,54	.
(15)...	.	.	+ 1	.	.	.	— 2,97	— 0,57
(16)...	.	.	— 1	.	.	.	.	— 1,64
(17)...	.	.	+ 1	— 1	.	.	.	+ 3,06
(18)...	.	.	.	+ 1	.	.	.	— 1,42
(19)...	.	.	.	— 1	.	.	— 2,20	— 0,21
(20)...	.	.	.	.	— 1	.	+ 2,41	.
(21)...	.	.	.	+ 1	+ 1	— 1	— 0,21	+ 3,40
(22)...	.	.	.	.	.	+ 1	.	— 3.19
w =	+ 2,22	— 2,36	— 0,76	+ 2,30	+ 4,30	— 1,02	+ 7,5	+ 18,2

Једначине друге групе су одвојене од прве дуплом цртом. Вредности слободних чланова се налазе у последњем реду таблице који је обележен са w.

Нормалне једначине општег система се налазе у таблици II, где дупле вертикалне црте одвајају прву и другу групу. За вредности слободних чланова служи последњи стубац. Квадратички којефицијенти су подвучени.

Таблица II

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	w
I...	<u>+ 6,00</u>	— 2,00	.	.	.	— 2,00	.	+ 3,27	+ 2,22
II...	— 2,00	<u>+ 6,00</u>	— 2,00	.	— 2,00	.	+ 1,01	+ 0,08	— 2,36
III...	.	— 2,00	<u>+ 6,00</u>	— 2, 0	+ 2,00	.	— 8,09	+ 0,49	— 0,76
IV...	.	.	— 2,00	<u>+ 6,00</u>	+ 2,00	— 2,00	+ 8,63	— 0,87	+ 2,30
V...	.	— 2,00	+ 2,00	+ 2,00	<u>+ 6,00</u>	— 2,00	+ 2,44	— 0,24	+ 4,30
VI...	— 2,00	.	.	— 2,00	— 2,00	<u>+ 6,00</u>	— 2,32	— 3,41	— 1,02
VII...	.	+ 1,01	— 8,09	+ 8,63	+ 2,44	— 2,32	<u>+ 58,16</u>	— 0,63	+ 7,5
VIII...	+ 3,27	+ 0,08	+ 0,49	— 0,87	— 0,24	— 3,41	— 0,63	<u>+107,19</u>	+ 18,2

Пошто свака од условних и нормарлних једначина има индивидуалан број, нема потребе да се једначине број 7 и 8 друге групе обележавају нарочитим ознакама.

Којефицијенти нормалних једначина друге групе су заокружени на другу децималу.

Пошто се у другој групи налазе 2, а у првој 6 једначина, то ће постојати две групе помоћних корелата са по шест корелата у свакој.

Из таблице II извађамо према (26) нормалне једначине за рачунање цомоћних корелата које су унете у таблицу III. Вредност слободних чланова за прву групу помоћних корелата увршћене су у стубац са ознаком w', за другу у стубац сг озиаком w''.

На пракси могло би се задовољити таблицом I општег система у којој се лако разликују једначине прве групе, постављене на првим местима; улогу слободних чланова играју којефицијенти нормалних једначина друге групе, у нашем примеру, ступци $к_7$ и $к_8$.

Таблица III

	$\rho m._1$	ρm_2	$\rho m._2$	$\rho m._4$	$\rho m._5$	$\rho m._6$	w'	w''
I...	+ 6,00	— 2,00	.	.	.	— 2,00	.	+ 3,27
II...	— 2,00	+ 6,00	— 2,00	.	— 2 00	.	+ 1,01	+ 0,08
III...	.	— 2,(0	+ 6,00	— 2,00	+ 2,00	.	— 8,09	+ 0,49
IV...	.	.	— 2,00	+ 6,00	+ 2,00	— 2,00	+ 8,63	— 0,87
V...	.	— 2,00	+ 2,00	+ 2,00	+ 6.00	— 2,00	+ 2,44	— 0,24
VI...	— 2,00	.	.	— 2,00	— 2,00	+ 6,00	— 2,32	— 3,41

Решење по алгоритму Гауса у заједничкој шеми даје следеће вредности помоћних корелата:

$$\rho_{1\cdot1} = -0{,}00474;\quad \rho_{2\cdot1} = -0{,}40132;\quad \Sigma_1 = -0{,}40606;$$
$$\rho_{1\cdot2} = +0{,}07016;\quad \rho_{2\cdot2} = -0{,}13266;\quad \Sigma_2 = -0{,}06250;$$
$$\rho_{1\cdot3} = +1{,}26630;\quad \rho_{2\cdot3} = -0{,}07692;\quad \Sigma_3 = +1{,}18938;$$
$$\rho_{1\cdot4} = -0{,}86234;\quad \rho_{2\cdot4} = +0{,}26717;\quad \Sigma_4 = -0{,}59517;$$
$$\rho_{1\cdot5} = -0{,}54606;\quad \rho_{2\cdot5} = +0{,}12027;\quad \Sigma_5 = -0{,}42579;$$
$$\rho_{1\cdot6} = -0{,}08438;\quad \rho_{2\cdot6} = +0{,}56371;\quad \Sigma_6 = +0{,}47933;$$

Вредности означене са Σ_m су збирови помоћних корелата чији индекси, други по реду, су једнаки и служе за контролу при даљем рачунању.

За рачунање којефицијената трансформираних нормалних једначина друге групе (једначине VII и VIII) важе изразе (30), (31) и (32).

Сабирајући изразе за (AA) са (AB) и (BA) са (BB), који имају једнаке којефицијенте при помоћним корелатама, добијамо следеће контролне формуле:

$$(35)\ \ldots\ \begin{array}{l}(AA) + (AB) = [(\alpha\alpha) + (\alpha\beta)] + (a\alpha)\,\Sigma_1 + (b\alpha)\,\Sigma_2 + \ldots \\ (BA) + (BB) = [(\beta\alpha) + (\beta\beta)] + (a\beta)\,\Sigma_1 + (b\beta)\,\Sigma_2 + \ldots\end{array}$$

Рачунајући коефицијенти (AA) и (AB), односно (BA) и (BB), у два упоредних стубаца сваки збир S ма којег реда можемо упоређивати са једним од чланова контролних израза (35), чије вредности се рачунају независно. За то у формулару бр. 1 за рачунање вредности трансформираних коефицијената додаје се два контролних стубаца: један — за вредности збирова по редовима s и други, означен са p, за вредности независних израчунатих производа, — $(a\alpha)\ \Sigma_1$, $(b\alpha)\ \Sigma_2, \ldots$ $(a\beta)\ \Sigma_1$, $(b\beta)\ \Sigma_2, \ldots$ У први ред ступца s унаша се вреднест збира $(\alpha\alpha + (\alpha\beta)$, односно збира $(\beta\alpha) + (\beta\beta)$.

За наш пример рачунање изведено је са тачношћу до 5 децимале.

Рачунање (AA) и (AB) Формулар бр. 1

	$(\alpha\alpha)$ $(m\alpha) . \rho_1 m$	$(\alpha\beta)$ $(m\alpha)\ \rho_2 . m$	$(\alpha\alpha) + (\alpha\beta)$ S_1	$p_1 =$ $(m\alpha) . \Sigma m$
$(\alpha\mu)\ldots$	+ 58, 160 00	— 0, 630 00	+ 57, 530 00	.
$(a\alpha) . \rho m ._1$	.	.	.	.
$(b\alpha)\ \rho m ._2$	+ 70 86	— 133 99	— 63 13	— 63 12
$(c\alpha)\ \rho m ._3$	— 10, 244 37	+ 622 28	— 9, 622 09	— 9, 622 08
$(d\alpha)\ \rho m ._4$	— 7, 441 99	+ 2, 305 68	— 5, 136 31	— 5, 136 32
$(e\alpha)\ \rho m ._5$	— 1, 332 39	+ 293 46	— 1, 038 93	— 1, 038 93
$(f\alpha)\ \rho m ._6$	+ 195 75	— 1, 307 81	— 1, 112 05	— 1, 112 05
(AM) =	+ 39, 407 87 (AA)	+ 1, 149 62 (AB)	+ 40, 557 49 S_1'	+ 40, 557 49 S_1''

Рачунање (BA) и (BB) Формулар бр. 1

	$(\beta\alpha)$ $(m\beta)\ \rho_1 m$	$(\beta\beta)$ $(m\beta)\ \rho^2 m$	$(\beta\alpha) + (\beta\beta)$ S_1	$p_2 =$ $= (m\beta)\ \Sigma m$
$(\beta\mu)\ldots$	— 0, 630 00	+ 107, 190 00	+ 106, 560 00	.
$(a\beta)\ \rho m ._1 \cdots$	— 15 50	— 1, 312 32	— 1, 327 82	— 1, 327 82
$(b\beta)\ \rho m ._2 \cdots$	+ 5 61	— 10 61	— 5 00	— 5 00
$(c\beta)\ \rho m ._3 \cdots$	+ 620 49	— 37 69	+ 582 80	+ 582 80
$(d\beta)\ \rho m ._4 \cdots$	+ 750 24	— 232 44	+ 517 80	+ 517 80
$(e\beta)\ \rho m ._5 \cdots$	+ 131 05	— 28 86	+ 102 19	+ 102 19
$(f\beta)\ \rho m ._6 \cdots$	+ 287 74	— 1, 922 25	— 1, 634 51	— 1, 634 52
(BM) =	+ 1, 149 63 (BA)	+ 103, 645 83 (BB)	+ 104, 795 46 S_2'	+ 104, 795 46 S_2''

Ради скраћења, производи и остале вредности се уписују у формулар у јединицама последње децимале, у нашем случају у јединицама 5 децимале; онда, на пример, величина (+ 561) означава стварно + 0,00561. Цели део броја, кад он постоји, одваја се од децималног запетом.

Састав формулара бр. 1 доста је једноставан и јасан и не тражи нарочита и дугачка објашњења. Ограничимо се на кратку анализу састава само једног реда вредности у том формулару. На пример, реда $(d\beta)\,\rho_{m\cdot4}$ у рачунању (BA) и (BB). У развијеном изразу имамо:

$$(d\beta)\,\rho_{m\cdot4} = (d\beta)\,\rho_{1\cdot4} + (d\beta)\,\rho_{2\cdot4} = (d\beta)\,(\rho_{1\cdot4} + \rho_{2\cdot4}) = (d\beta)\,\Sigma_4,$$

$$(d\beta) = -0{,}87;\ \rho_{1\cdot4} = -0{,}86234;\ \rho_{2\cdot4} = +0{,}26717;\ \Sigma_4 = -0{,}59517,$$

одакле:

$$(d\beta)\,\rho_{1\cdot4} = +0{,}75024;\ (d\beta)\,.\,\rho_{2\cdot4} = -0{,}23244;\ (d\beta)\,\Sigma_4 = +0{,}51780$$

Збир $S = (d\beta)\,\rho_{1\cdot4} + (d\beta)\,\rho_{2\cdot4} = +0{,}51780$ се поклапа са вредношћу $(d\beta)\,\Sigma_4$ што сведочи да су производи исправни.

Збирови по ступцима дају вредност за трансформиране којефицијенте; њихова контрола се врши збир ступца S, који мора да буде индентичан са збиром последњег реда формулара:

$$+39{,}40787 + 1{,}14962 = +57{,}53000 - 0{,}06313 - 9{,}62209 - \text{итд.} = +40{,}55749$$

Рачунање се изводи на машини за рачунање. Најзгодније су машине, које имају нарочити регистар где се бележи алгебарски збир резултата поступних операција изведених на машини. Онда се збирови по ступцима или по редовима добијају директно на овом регистру без нарочитог рачунања. Контролни стубац p је факултативан, али је боље да се он увек попуњује да се неби ма и једна контролна операција измакла.

За контролу, да се нисмо послужили при рачунању појединих производа у сваком реду форм. бр. 1 погрешним чиниоцем (погрешка при постављању чиниоца на машину, што неће показати упоређење добивених вредности у ступцима s и p), служи при рачунању трансформираних којефицијената индентичност симетричних којефицијената. Тако, у нашем примеру, — (AB) = (BA). И стварно смо добили у формулару бр. 1 за прву једначину (AB) = + 1,14962, а за другу (AB) = + 1,14963. Ова контрола нарочито је потребна за сигурност рачунања квадратичких којефицијената (AA) и (BB), који немају за то никакве друге контроле.

У формулару бр. 1 се рачунају трансформирапи слободни чланови друге групе. Улогу величина $(\mu\eta)$ играју слободни чланови w_m.

Формулар бр. 1

	w_7 $w_m \cdot \rho_1 \cdot m$	w_8 $w_m \cdot \rho_2 \cdot m$	$w_7 + w_8$ S	p = $= w_m \cdot \Sigma m$
w_7 ; w_8 ...	+ 7, 500 00	+ 18, 200 00	+ 25, 700 00	..
$w_1 \cdot \rho m_{\cdot 1}$	— 10 52	— 820 93	— 901 45	— 901 45
$w_2 \cdot \rho m_2$	— 165 58	+ 313 08	+ 147 50	+ 147 50
$w_3 \cdot \rho m_{\cdot 3}$	— 962 39	+ 58 46	— 903 93	— 903 93
$w_4 \cdot \rho m_{\cdot 4}$	— 1, 983 38	+ 614 49	— 1, 368 89	— 1, 368 89
$w_5 \cdot \rho m_{\cdot 5}$	— 2, 348 06	+ 517 16	— 1, 830 90	— 1, 830 90
$w_6 \cdot \rho m_6$	+ 86 07	— 574 98	— 488 91	— 488 92
W_m =	+ 2, 116 14 W_7	+ 18, 237 28 W_8	+ 20. 353 42 S′	+ 20, 353 42 S″

Из горњих рачунања долазимо до трансформираних нормалних једначина друге групе:

$$+ 39{,}40787\, к_7 + 1{,}14962\, к_8 + 2{,}11614 = 0,$$
$$+ 1{,}14962\, к_7 + 103{,}64583\, к_8 + 18{,}23728 = 0.$$

По алгоритму Гауса добијамо:

$$к_7 = -0{,}04858; \; к_8 = -0{,}17542.$$

Са овим корелатним вредностима рачунамо из формула (13) трансформиране вредности слободних чланова нормалних једначина прве групе. Рачунање изводимо у истом формулару бр. 1.

Формулар бр. 1

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	S	P
w_m ..	+2,22000	—2,36000	—0,76000	+2,30000	+4,30000	—1,02000	+4,68000	
$(m\alpha) k_7$	.	— 4907	+ 39301	— 41925	— 11854	+ 11271	— 8114	— 8113
$(m\beta) k_8$	— 57362	— 1403	— 8596	+ 15262	+ 4210	+ 59818	+ 11929	+ 11929
W_m =	+1,64638	—2,42310	—0,45295	+2,03337	+4,22356	—0,30911	+4,71815	+4,71815

Рачунање нормалних једначина (14) прве групе изводимо у оном алгоритму Гауса, где су се рачунале помоћне корелате, додајући му један стубац за редукцију слободних чланова и један за контролу.

Добијамо на такав начин вредности корелата прве групе:

$$к_1 = -0,36622;$$
$$к_2 = +0,11097;$$
$$к_3 = +0,41476;$$
$$к_4 = -0,02037;$$
$$к_5 = -0,92720;$$
$$к_6 = -0,38642;$$

Заменимо корелате у општем систему нормалних једначина са нађеним вредностима, добићемо отступања која карактеришу тачност рачунања корелата; ради упоређења наведемо напоредо отступања нормалних једначина, која одговарају корелатним вредностима наведеним у књизи Јордана и израчунатим директно из општег система по алгоритму Гауса.

Отступања

Једначине	при рачунању у две групе	према Јордану.
I...	— 0, 000 04	— 0, 010 79.
II...	+ 4	+ 1 36
III...	+ 1	+ 15 59
IV...	+ 7	+ 23 75.
V...	+ 4	+ 5 36.
VI...	— 5	— 29 7.
VII...	+ 10	+ 24 35
VIII...	+ 15	— 171 45.

Знатна неслагања слободних чланова нормалних једначина са вредностима, које добијају једначине при замени корелата вредностима израчунатим општим системом по алгоритму Гауса долазе отуда, што се је рачунање заокруживало на трећу децималу и што квадратички којефицијент у једначинама VII и VIII много одскаче по вредности од осталих квадратичких којефицијената система нормалних једначина. У овим случајевима потребно је вредности корелата, код којих се налазе велики којефицијенти, рачунати са више децимала, него ли остале.

Јуни 1940
Београд

(наставиће се)

RÉSUMÉ

Dans l'introduction l'auteur fait un aperçu historique des méthodes de résolution des équations normales au nombre indéterminé à partir de Gauss jusqu'au temps actuel: le premier procédé pratique de résolution en deux groupes qui Gauss a utilisé dans la compensation du réseau géodesique en Hanovre; l'interprêtation mathématique de

ce procédé donné par Krüger; les formules pratiques de Krüger pour la compensation par le procédé de Gauss des formes simples de réseaux géodésiques, comme système central, chaîne des triangles simple ou composée; l'importance de ces formules particulières de Krüger pour la recherche de la solution des équations normales en deux groupes et en forme indéterminée; la création par Boltz à base des recherches de Krüger du nouvel mode de résolution des équations normales nommé par lui „la méthode du développement“ — „Entwickelungs-Verfahren“; la création par Boltz la méthode supplémentaire — „méthode de substitution“, „Substitutions-Verfahren“, pour étendre l'application de la méthode du développement jusqu'aux 600 équations de condition; la liaison de la méthode du développement avec celle de résolution des équations normales en maints groupes; les simplifications pratiques introduit par N. Ourmajeffet, A. Izotoff dans la méthode de Boltz; l'utilisation par I. Pranis-Pranjevitch des propriétés des systèmes équivalents des équations pour la création de la méthode originale de résolution des équations normales en maints groupes et son application à la compensation des rèseaux géodésiques en deux modifications — pour la compensation des mesures indirectes et pour celle des mesures conditionelles.

A la fin du résumé l'auteur définit le but de ses recherches comme la suite de l'étude théorique et pratique des méthodes de résolution des équations normales en maints groupes.

Dans la première chapitre se trouve la déduction des formules de Krüger en basant sur la définition plus génerales du problème.

Tandis que Krüger n'effectue la transformation que des équations de condition du deuxiéme groupe et calcule les corrections par la formule, —

$$v_k = v'_k + v''_k,$$

ou v_k est la correction complète, v'_k et v''_k — sont les corrections correspondant succesivement au premier et au deuxième groupe, l'auteur execute la transformation de tous les deux groupes à condition que les valeurs des quantités correlatives calculé de deux systèmes transformés soient identiques aux valeurs des mêmes quantités qui fournit du système complet des équations normales.

Les valeurs des quantitès correlatives calculé á cette condition permettent le calcul directe des corrections cherchées par deux voies: ou au moyen du système des équations de condition initiales, ou au moyen du système des équations transformées.

Comme éxemple de l'application des formules déduites l'auteur a choisi le pentagone composé de la triangulation de la ville Hanovre, emprunté du livre de Jordan (Handbuch der Vermessungskunde, Vol. I, Stuttgart, 1920, pages 230—238). La comparaison des valeurs des quantités correlatives obtenu par l'auteur avec celles indiqué dans le livre de Jordan (p. 234) a montré la discordance de ces valeurs.

Le contrôle exécuté a établi que les valeurs de Jordan satisfont les équations normales avec les écarts suivants:

+ 0,17145; + 0,02435; — 0,00297 — 0,01079; + 0,00136; + 0,01559
+ 0,02375; + 0,00536.

Les écarts corespondants pour les valeurs obtenu par l'auteur sont, —

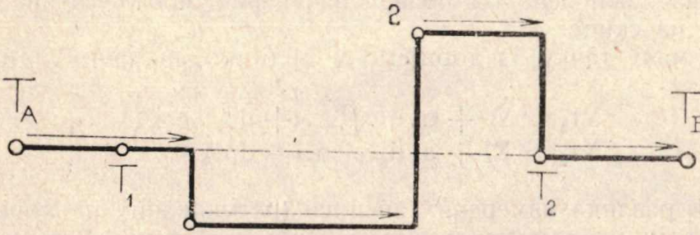
+ 0,00015; + 0,00010; — 0,00005; + 0,00004; + 0,00007; + 0,00001;
+ 0,00004; — 0,00004.

Ing. **Фрањо Рудл**

ЈЕДНОВРЕМЕНО РАЧУНАЊЕ КООРДИНАТА МАЛИХ И ДЕТАЉНИХ ТАЧАКА БЕЗ РАЧУНАЊА КООРДИНАТА ПОДНОЖНИХ ТАЧАКА

Да би се омогућило једновремено рачунање координата малих и детаљних тачака машином за рачунање **без рачунања координата подножних тачака,** може се применити ниже објашњени начин рачунања у обрасцу кога ћемо назвати тригон. обрасцем бр. 22с.

Овај начин рачунања разликује се од досадашњег по томе, што линија за снимање не мора да буде уједно правац рачунања, већ се правац рачунања пребацује са линије снимања паралелно овој кроз детаљне тачке (види доњу слику).



Сл. 1

Стрелица показује правац рачунања. Ради лакшег разумевања даћемо дефиницију неких термина: 1) „Измена апсциса" d_a ... дужина апсцисе мале тачке или дужина апсцисе детаљној тачци припадајуће подножне тачке измерене на терену.

2) Измерена ордината d_p ... дужина ординате детаљне тачке у односу на линију снимања T_A — T_B измерене на терену.

3) Правац рачунања . . . поклапа се са линијом снимања.

4) Помоћни правац рачунања . . . правац који пролази кроз детаљну тачку паралелно линији за снимање.

5) Ординатни правац . . . окомица (управна) којом прелазимо из једног у други правац рачунања.