Д. 20 Београд — септембар, октобар, новембар и децембар Св. 5 и 6

ГЕОМЕТАРСКИ И ГЕОДЕТСКИ ГЛАСНИК
Орган Удружења Геометара и Геодета Краљевине Југославије
БЕОГРАД, Браће Југовића 16/I

Професор Лав Сопоцко

ИСКОРИШЋЕЊЕ ШЕМЕ УСЛОВНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРИ ИЗРАВНАВАЊУ ТРИЈАНГУЛАЦИОНЕ МРЕЖЕ.[1])

Шема условних једначина игра важну улогу како при контроли таблица условних и нормалних једначина, тако и при формирању оних коефицијената нормалних једначина, који се односе на корелате угловних услова.

У чланку, означеном у примедби ове стране, био је наглашен пресудан значај на резултат целокупног рачунског рада на изједначењу сваке грешке у саставу ма иједне условне једначине, или корелатне једначине. Да би њу избегли, формирање условних односно корелатних једначина изводи се на два или више начина: упоређивање резултата, добивених на такав начин, независно један од другог, даје довољну гарантију да је операција формирања једначина извршена добро и да није ниједан од њених чланова испуштен.

Ради даљих рачунских операција коефицијенти и слободни чланови једначина стављају се у таблицу условних и корелатних једначина.

Таблица условних једначина служи при формирању нормалних једначина, док друга, таблица корелатних једначина, — за рад на одређивању корелатних вредности по логаритму Гауса.

Ако би при изради ових таблица била допуштена макаква грешка, она би имала исти кобни утицај на резултат рачунања, као што и свака грешка у саставу једначина.

При многобројности непознатих у једночинама обе групе, нарочито, код условних једначина, где улазе, при изравнавању углова — сви углови, а при изравнавању праваца — сви опсервирани правци мреже, при уписивању коефицијената непознатих у таблици може се лако погрешити место, у који се ставља коефицијенат — погрешити стубац или ред.

При савремној тежњи за изравнавањем мрежа првог реда као нераздвојену целину или за целу државну територију, или за њен већи део, број условних и корелатних једначина, а заједно и број непознатих, може стићи такве величине, да омашке при уписивању коефицијената једначина у таблици постају доста вероватнима.

Тако, на пример, за нови катастарски премер у Југославији била је изравната здружено цела прворазредна тријангулациона мрежа, опсервирана од стране Војно-Географског Института на

---

[1]) Чланак у св. 4 т. г. Г. и Г. Гласника. — „Број независних једначина у тријангулационим мрежама" — стр. 198—202.

територији пређашње Србије и Црне Горе; број условних једначина износио је при томе 320[2]) једначина.

Пруски Геодетски Институт предузео је у 1926 г.[3]) изравнавање целокупне прворазредне тријангулационе мреже Немачког Рајха, као једне целине, која је везано са 673 услова[4]) са 1593 непознате.

Код толико многобројних једначина и непознатих свака независна контрола исправности израђених таблица није сувишна.

Једну од оваквих независних контрола омогућава шема условних једначина, за обе таблице — како условних, тако и корелатних једначина.

На основу ове шеме можемо саставити, за сваку једначину — условну, или корелатну — списак непознатих, које улазе у њихов састав.

При искоришћавању шеме у ту сврху придржавају се следећих правила:

1) Свака везна линија, без бочне стрелице, одређује да правци мреже, на које и она ослања, улазе у условну једначину.

Тако, на шеми условних једначина (сл. 1), чија је израда објашњена у бр. 4 часописа,[5]) за I услов везна линија на страни AC показује да поправке за правце 2 и 11 улазе, као непознате, у прву условну једначину.

2) Свака везна линија са бочном страницом одређује да од два правца (у случају, кад линија шеме мреже претставља двострани правац) у условну једначину улази само један, онај, на који је управљена бочна стрелица.

Тако, везна линија услова XI ка страни AC одређује да у XI условну једначину улази, као непозната, поправка само за правац 2.

3) За угловне услове по шеми се одређују не само непознате, него и предзнаци њихових коефицијената, чија је вредност константна и једнака јединици. На тај начин из шеме условних једначина за угловне условне једначине може се директно исписати цела условна једначина са непознатима и њиховим којефицијентима.

За ову радњу важи следеће мнемоничко правило: ако би се гледала страна, на коју се ослања везна линија угловног услова, у правцу стрелице везне линије, онда правац, који лежи на десно у условној једначини има позитивни коефицијент (+ 1), а који лежи налево — негативни коефицијент (— 1).

Тако, код I услова за везну линију на страни AB нађемо да правац 10 у условној једначини има коефицијент (+ 1), а правац 1 — (— 1); за везну линију ка страни BC — правац 12 има ко-

---

[2]) Le cadastre, le livre foncier et la réforme agraire en Jougoslavie. Belgrade 1936, стр. 22-23.

[3]) Jahresbericht des Direktors des Geodätischen Instituts für die Zeit von April 1926 bis März 1927. Potsdam. 1927, стр. 16.

[4]) Jahresbericht... für die Zeit von April 1936 bis März 1937. Potsdam 1937 стр. 6.

[5]) **Г. и Г. Гласник**, бр. 4, 1939 г., стр. 198—202.

Омашком цртача условна једначина XII уцртана је на клише погрешно, и то: нису уцртане везне линије, које вежу XII са двостраним правцем BD и са једностраним правцем DC (правац 7) и уцртана је везна линија са двостраним правцем CE.

јефицијент (+ 1), а правац 9 — коефицијент (— 1) и, најзад, за везну линију ка страни AC — правац 2 има коефицијент (+ 1), а правац 11 коефицијент (— 1). Онда цела условна једначина за I услов има облик:

$$(1)\qquad -(1)+(2)-(9)+(10)-(11)+(12)+w_1=0$$

За корелатне једначине важе следећа правила:

4) У сваку корелатну једначину, чији број одговара броју услова означеног на шеми, поред корелата са квадратичним коефицијентом а која има индекс са бројем овог услова, улазе корелате са индексима оних бројева услова, чије се везне линије (са бочном стрелицом или без ње) сусрећу са везним линијама услова, који одговара корелатној једначини.

Тако I услову одговара I корелатна једначина, где корелата са квадратичким коефицијентом носи индекс 1 — к$_1$. Везне линије I услова (односно I корелатне једначине) сусрећу се на линији AB са везном линијом услова XII, што показује да поред корелате к$_1$ у корелатну једначину улази као непозната, корелата к$_{12}$; на страни BC везна линија I-ог услова сусреће се са везним линијама услова II, XII и XIII, што значи да у I-ву корелатну једначину улазе корелате к$_2$, к$_{12}$ и к$_{13}$; на страни AC одговарајућа везна линија се сусреће са линијама услова IV, XI, XII и XIV, што одговара корелатама к$_4$, к$_{11}$, к$_{12}$ и к$_{14}$.

Из овог примера се види да на различитим странама шеме тријангулације се могу сретати везне линије једног те истог услова, као што су у нашем случају линије услова XII. То се односи на неугловне услове (полусне, базисне итд.), који вежу више праваца, него угловне услове.

У I корелатну једначину, дакле, улазе следеће корелате, — к$_1$, к$_2$, к$_4$, к$_{11}$, к$_{12}$, к$_{13}$ и к$_{14}$

5) Кад је услов, за чију се корелатну једначину одређују непознате, везан са страном тријангулационе шеме линијом са бочном стрелицом, корелате оних услова, које су везани са истом страном шеме линијама са бочним стрелицама, уђиће у корелатну једначину само онда, кад стрелице везних линија гледају у исту страну. У противном случају корелата услова, чија везна линија има стрелицу противног правца, неће ући у корелатну једначину.

Тако, везна линија са стрелицом XI-ог услова, која се ослања на страну CE, сусреће везне линије са стрелицама од услова XIII и XVI пошто стрелице везних линија од услова XI и XIII гледају на исту страну, корелата к$_{13}$ ће ући у XI-у корелатну једначину, док корелата XVI услова, чија везна линија има стрелицу противног правца но стрелица XI-ог услова, корелата к$_{16}$ не улази са стране CE у XI-ту корелатну једначину.

Као пример за одређивање непознатих корелатних једначина неугловних услова узмемо полусни услов XVI. Поред корелата к$_{16}$ са квадратичним коефицијентом у XVI корелатну једначину улазе, — по страни AC, корелате к$_1$, к$_6$, к$_{11}$; по страни CE — корелате к^6, к$_7$, к$_{15}$; корелате к$_{11}$ и к$_{13}$ неће ући у овај ред, пошто стрелице везних линија за услове XI и XIII имају супротни правац према правцу стрелице везне линије за услов XIV; по страни CF— корелате к$_{10}$ и к$_{15}$; по страни EF — корелате к$_4$, к$_5$, к$_{10}$, к$_{14}$ и к$_{15}$; по страни AF — корелата к$_5$; по страни AE —- корелате, — к$_5$,

$к_6$, $к_8$, $к_{11}$. Према овом пребројавању у XVI корелатну једначину улазе ове корелате, — $к_1$, $к_4$, $к_5$, $к_6$, $к_7$, $к_8$, $к_{10}$, $к_{11}$, $к_{14}$, $к_{15}$, $к_{16}$.

Кад су састављени спискови непознатих угловних и корелатних једначина, они служе за упоређивање састава таблица одговарајућих једначина. Ово упоређивање доноси констатацију: да ли су коефицијенти свију непознатих унешени у таблицу? Није ли стављен у таблицу ма који коефицијент оне непознате, која не улази у састављени списак на основи шеме?

Свака примећена разлика између таблица и списка непознатих се анализира, испитује се њен узрок и доводе се у сагласност оба документа.

За условне једначине угловних услова контрола таблица условних једначина остварује се потпуно како саставом непознатих, унешених у таблицу, тако и предзнацима коефицијената са вредношћу од 1.

Како којефицијенти једначина за угловне услове имају константне вредности, а њихови предзнаци лако се одређују, то је потпуно схватљива могућност простијег одређивања вредности коефицијената оних корелата, који одговарају угловним условима.

Први у стручној литератури скренуо је пажњу на ову могућност **H. Boltz,** у његовој опширној расправи, о новом начину рачунских операција при изравнавању тријангулацијоних мрежа. [6]) **H. Boltz** је дао правила за одређивање коефицијената за корелате угловних услова фигура у случајевима тријангулационих ланаца и централних система.

У вези са изједначењем основне катастарске мреже за Чехословачку истим питањем се забављао Kržvak, [7]) који је пронашао правила за одређивање истих коефицијената за општи случај централног система, кад поред страна система троуглова у мрежу улазе двострани дијагонални правци.

За све облике тријангулационих мрежа и за све угловне услове (услов фигура,фиксног угла, азимута) [8]) правила за одређивање корелатних коефицијената, која одговарају угловном условима разрадио је писац ових редова, а у вези са шемом условних једначина, која придаје овим правилима једноставан, готово мнемонички карактер.

Ова правила су следећа:

I. За услове фигура:

Квадратички коефицијент An.n корелате кn за n-ти услов фигуре са m страна у n-ој нормалној једначини увек је позитиван и једнак је дуплом броју страна фигуре:

$$(2) \qquad An.n = +2m.$$

За троуглове, који се готово искључиво узимају за услов фигура, имамо:

$$(3) \qquad m = 3$$

одакле

$$(4) \qquad An.n = +6.$$

---

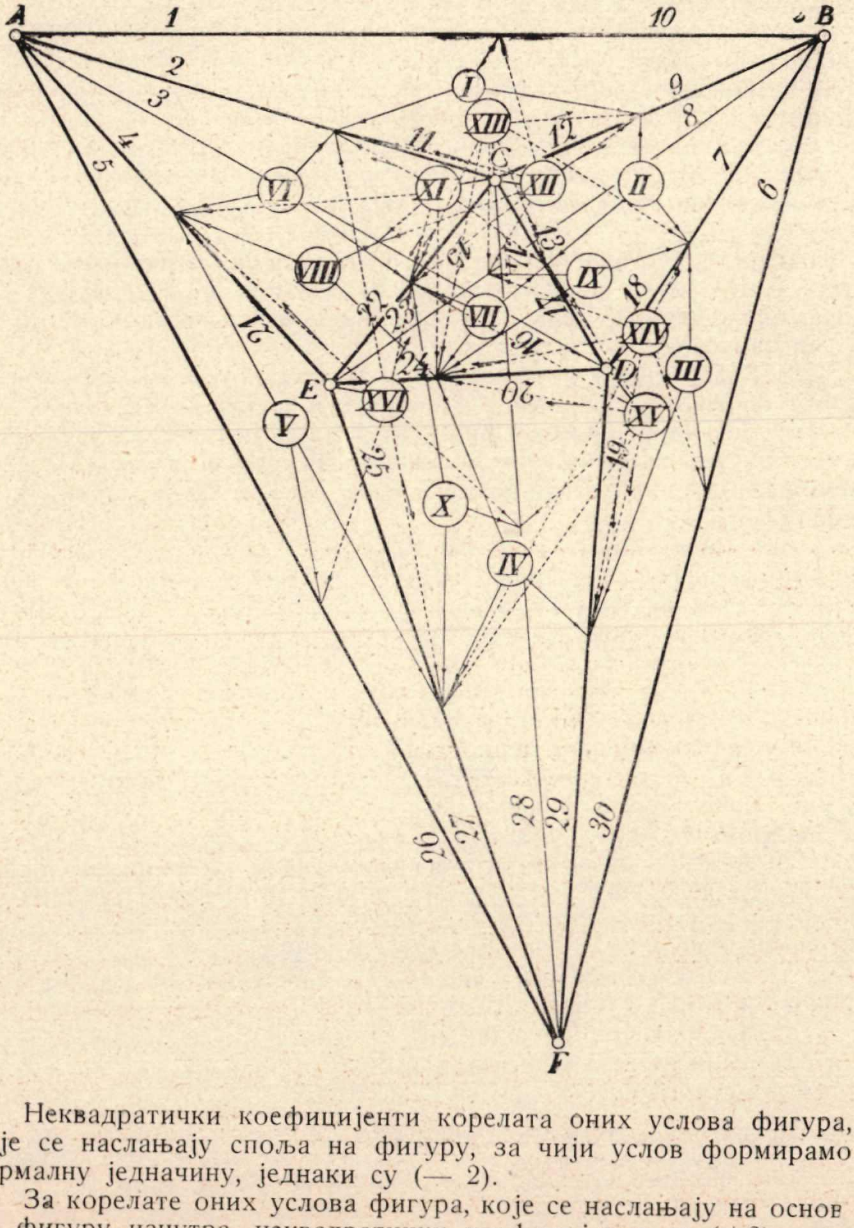
[6]) **H. Boltz**. Entwickelungsverfahren zum Ausgleichen geodetische Netze nach der Methode der kleinesten Quadrate. Berlin. 1923. стр. 19; 26—27.

[7]) **Ing. Josef Kržvak.** — Rešeni normalnich rovnic pržipojovanim nebo spojovaném. Zpravl vežejne siužbeby technické.". 1927 br. 10.

[8]) В. Г. и Г. Гласник, бр, 4 стр. 187—192.

За сваки услов фигуре, који је означен на шеми условних једначина, квадратички коефицијент се придаје корелати са бројем услова; тако, за IV услов троугла FDE шеме корелата $к_4$ у IV-ој нормалној једначини има коефицијент (+6).

2) Остале корелате услова фигура, које улазе у n-ту нормалну једначину и одређени према горе изведеним правилама, имају т. зв. **неквадратички** коефицијенти.



Неквадратички коефицијенти корелата оних услова фигура, које се наслањају споља на фигуру, за чији услов формирамо нормалну једначину, једнаки су (— 2).

За корелате оних услова фигура, које се наслањају на основну фигуру изнутра, неквадратички коефицијенти су (+2).

Тако, за нормалну једначину IV-ог усл[illegible] гао FDE (сл. 1), корелата к$_{3}$ за III-и услов троугла BDF, који се наслања на троугао FDE споља, има коефицијент (—2), док корелата к$_{10}$ за X-и услов троугла CEF, који се наслања на исти троугао FDE изнутра, има коефицијент (+2).

II. За услове фиксног угла важе следећа правила:

3) Кад фиксни угао има **само једну** заједничку страну (један заједнички правац) са фигуром, за коју се формира корелатна једначина, онда се разликују два случаја:

а) кад друга страна фиксног угла (други његов једнострани правац) лежи према заједничкој страни фиксног угла и фигуре (троугла) са исте стране, као и фигура, неквадратички коефицијнт корелата за услов фиксног угла је једнак (+1);

б) кад друга страна фиксног угла лежи према заједничкој страни са друге стране, него фигура (троугао), онда неквадратички коефицијент корелате за услов фиксног угла је једнак (— 1).

4) Кад обе стране фиксног угла (оба његова једнострана правца) улазе у сстав фигуре, за чији се угловни услов формира корелатна једначина, онда неквадратички коефицијент корелате за услов фиксног угла једнак је (+2).

5) Квадратички коефицијент у корелатној једначини услова самог фиксног угла је увек позитиван и једнак (+2).

6) Неквадратички коефицијент исте корелатне једначине за корелате услова оних фигура, са којима фиксни угао има један или два заједничка једнострана правца одређују се према правилама 3 и 4.

Ако бисмо претпоставили да је на шеми (сл. 1) угао EFD фиксни и његов услов носи број XVII, онда у корелатној једначини IV услова троугла FDE а према правилу 4, пошто обадва једнострана правца (27) и (29) фиксног угла улазе у састав троугла FDE, корелата к$_{17}$ би имала коефицијент (+2).

За III и V услове троуглова BDF и AEF, неквадратички коефицијенти корелате к$_{17}$ су једнаки са (— 1), пошто оба троугла леже према заједничком једностраном правцу — (29) за троугао BDF и (27) — за троугао AEF, са друге стране, него ли други једнострани правац фиксног угла — (27) за троугао BDF и (29) — за троугао AEF.

За X услов троугла CEF неквадратички коефицијент за корелату к$_{17}$ је једнак са (+1), јер троугао CEF и друга страна FD фиксног угла се налазе са исте стране према заједничком једностраном правцу (27), односно FE.

За XVII-у корелатну једначину услова фиксног угла EFD на основу правила 5 и 6, наћи ћемо —

за квадратички коефицијент корелате к$_{17}$ величину (+2),

за неквадратички коефицијент корелата к$_{4}$, к$_{3}$, к$_{5}$ и к$_{7}$ величине (+2), односно (— 1), (— 1) и (+1).

III. За услов азимута или нагиба.

При формирању условне једначине за услов азимута или нагиба, полазећи од једног познатог азимута (односно, нагиба) помоћу опсервираних углова полигона изабратог на шеми тријангулационе мреже, а који веже први познати азимут (нагиб) са другим, рачуна се вредност другог азимута (нагиба).

У овом полигону први и последњи правац су једностани, и остали правци, који сачињавају полигонске стране су двострани.

Тако, на пример, ако бисмо претпоставили, да су на шеми тријангулационе мреже (сл. 1) познати азимути праваца (20) и (6), онда за рачунање из азимута правца BF — (6) могао би се изабрати полигон EDCBF, у којем стране DE и BF сачињавају једностране правце (20) и (6), а остале стране сачињавају двостране правце и то: страну BC — правци (13) и (17) и страну CB — правци (9) и (12).

У корелатну једначину азимуталног услова ће ући корелате оних услова фигура (троуглова), који имају са полигоном заједничке једностране или двостране правце.

Тако, у нашем примеру, корелатна једначина азимуталног услова, који смо обележили бројем XVIII, садржи корелату $к_{18}$ са квадратичким коефицијентом и корелате $к_4$, $к_7$, $к_8$, $к_9$, $к_2$, $к_1$, $к_3$ које одговарају условима троуглова: FDE са једним заједничким једностраним правцем (20) — CDE са три заједничка правца — (20), (17) и (13); троугла AED са једним заједничким правцем (20); троугао BED са једним заједничким правцем (20); троугла BCD са 4 заједничка правца, — (17), (13), (12) и (9); троугао ABC са 2 заједничка правца (12) и (9), и, најзад, троугао BDF са једним заједничким правцем (6).

За формирање коефицијената корелатне једначине азимуталног услова важе следећа правила:

7) Означимо број страна полигона, који је изабрат за везу између познатих азимута и рачунајући у овај број први и последњи једнострани правци са m. Квадратички коефицијент $A_{n.n}$ корелатне једначине одређује формула, —

(5) $A_{n.n}=2(m—1)$.

У нашем примеру полигон EDCBF има 4 стране, — ED; DC; CB и BF и према формули (5)

(6) $A_{18.18}=2\ (4—1)=6$.

8) Предзнаци неквадратичних коефицијената зависе од правца, у којем иде полигон од првог познатог азимута ка другом: за услове оних фигура (троуглова) који леже на лево од тог правца предзнаци одговарајућих корелата су позитивни (+), а надесно негативни.

За наш пример, троуглови CDE, AED, BED и ABC леже на лево од заједничких страна полигона и предзнаци коефицијената њихових корелата су позитивни, док за троуглови FDE, BCD и BDF су негативни.

9) Бројна вредност неквадратичних коефицијената корелата за услове фигура (троуглова) једнака је броју једностраних праваца, заједничких са полигоном.

Тако, троуглови EDF (IV), AED (VIII); BED (IX) и BDF (III) имају са полигоном EDCBF само по један заједнички правац и неквадратички коефицијент њихових корелата, и то, — $к_4$, $к_8$, $к_9$ и $к_3$ су једнаки са 1.

Троугао ABC (I) има два заједничка једнострана правца — (9) и (12) и корелате $к^1$ има коефицијент 2.

Троугао CDE (VII) има 3 заједничка праваца — (20), (17) и (13) и корелата $к_7$ има коефицијент 3.

Најзад, троугао BCD (II) има 4 заједничка праваца — (17), (13), (12) и (9) и корелата $к_2$ има коефицијент 4.

Кад применимо наједанпут правила (7), (8) и (9) за чланове XVIII корелатне једначине, који одговарају угловним условима, наћи ћемо

$$+6к_{18}+2к_1-4к_2-к_3-к_4+3к_7+к_8+к_9 \tag{7}$$

10) За одређивање неквадратичких коефицијената корелата азимуталног услова у корелатним једначинама за услове фигура (троуглова) важе правила (8) и (9).

Да би што више разјаснили корист шема условних једначина при формирању корелатних једначина навешћемо један детаљнији пример, који ћемо анализирати у следећем чланку.

Инж. Драгмио М. Бошковић,
асистент Универзитета

ИСТОРИЈАТ БОРБЕ ЗА МЕТАРСКИ СИСТЕМ

Француска револуција, која је у многим својим актима показала да се не плаши увођења у живот нових идеја, дала се је на реформу и унификацију јединица за дужине и тежине, и тај проблем решила у току десет година борбе око тог питања, од 1789 до 1799 године, када је у главном борба за метарски систем завршена.

Читајући историју те борбе, често врло мучне и тешке, наилази се на најславнија имена научника целога света. Идеја водиља је била да се јединице извуку из природе. Како изгледа творци те идеје су Huygens, Picard и Mouton. Прва двојица су предлагали за јединицу дужину обичног клатна које даје секунде и то клатна на ширини од 45° и на морском нивоу. Много доцније Cassini, du Fay, La Condamin су заступали исто гледиште.

Различност система мера у Француској довела је до таквог стања које није могло више да се трпи. Али режими до Револуције нису имали храбрости да изврше радикалне реформе, њих је извршила тек Револуција. 4 месидора VII године Револуције (22 јуна 1799) дати су еталони за метар и килограм Државној Архиви. Тим поводом био је предложен пројекат да се искује медаља, али је одбачен.

Као датум рађања метарског система узима се појава декрета Народне Скупштине 8 маја 1790 године. Исте године, октобра месеца, подноси извештај комисија Академије Наука, коју су сачињавали Borda, Langrange, Lavoissier, Tillet и Condorcet. Друга комисија коју су сачињавали Borda, Lagrange, Laplace, Monge и Condorcet подноси други извештај у коме предлаже као јединицу за мерење дужина **метар,** као десетмилионити део четвртине