ГЕОМЕТАРСКИ И ГЕОДЕТСКИ ГЛАСНИК
Орган Удружења Геометара и Геодета Краљевине Југославије
БЕОГРАД, Браће Југовића 16/I

Професор **Лав Сопоцко**

Број независних условних једначина у тријангулационим мрежама и њихов избор

I. Опште примедбе.

При изравнавању тријангулационих мрежа, већих по броју троуглова, нарочито непрекидних мрежа које прекривају веће површине а исто и код сложених ланаца, [1]) где се могу срести опсервирања дијагоналних праваца, који пресецају једноставну мрежу троуглова, питање о избору из свемогућих услова оног броја међусобно независних услова, који се уводе у изравнавање, постаје изванредно важно за правилан ток изравнавања и са њим везаних рачунских операција.

Како је познато, улазак у изравнавање два међусобно зависна услова при решавању корелатних једначина своди на нулу коефицијенте оне редуциране корелатне једначине, која одговара другом по реду зависне условне једначине уведене у изравнавање.

Свођење на нулу коефицијената редуциране нормалне једначине дешава се у онај моменат рачунања, кад долази на ред елиминисање ове једначине из општег система нормалних једначина и изазива потребу: — 1) да се одговарајућа зависна условна једначина замени са другом — независном; 2) да знатан број коефицијената нормалних једначина буде израчунат поново и 3) да се рачунања на елиминисању нормалних једначина понове. [2])

При неодређеном решавању нормалних једначина на начин поделе система нормалних једначина на две или више група постојање између уведених у изравнавање условних једначина неколико међусобно зависних услова не утиче много на резултате већ извршених рачунања и квари само рачунске операције, везане са елиминисањем погрешне нормалне једначине.

Ако неби један или више независних услова били уведени у изравнавање, што се у пракси може десити само у изузетним случајевима, то ће се приметити само по завршетку целог изравнавања при дефинитивном рачунању страна мреже.

Последице изостављања из изравнавања једног од независних услова нису мање тешке но у првом случају и траже: 1) по-

---

[1]) Назив „сложени ланац“ се односи на тријангулационе ланце, чије су карике састављене од више троуглова, но један, као што су четвороуглове са две дијагонале, централни системи свију облика итд.

[2]) Ове последице постојања између изабратих условних једначина међусобно зависних има место кад за елиминисање нормалних једначина искоришћује се алгоритам Гауса.

пуњавање система условних једначина оним једначинама, које одговарају пропуштеним условима; 2) рачунање коефицијената накнадних нормалних једначина; 3) рачунање према алгоритму Гауса поступног реда коефицијената и слободних чланова редуцираних нормалних једначина, које одговарају новој нормалној једначини; 4) рачунање нових корелатних вредности; 5) рачунање одговарајућих им нових вредности поправака праваца; 6) поновно дефинитивно рачунање страна тријангулације.

Да би се избегао овакав рачунски посао, претпоставља се понекад, занемарајући пуну строгост изравнавања целокупне мреже, да се исти ограничи на поновно изравнавање само оног дела мреже, где је утицај изостављеног услова највећи.

Ово дозвољава да буде сачуван већи део првог изравнавања и да број условних једначина, које улазе у ново изравнавање, буде редуциран на најмањи могући. Али у овом случају произлази низ накнадних, т. з. фиксних услова, помоћу којих се изолује изједначени део мреже од оног издвојеног за накнадно изравнавање.

Да би се осигурао правилан избор за изравнавање потребног броја независних услова мреже, прво, — према броју тачака мреже и броју опсервираних праваца, односно углова, одређује се за сваку врсту геометријских услова мреже број могућих независних услова и друго — утврђује се онај ред избора услова, који би гарантовао излучење из сваколиких могућих услова одређене врсте само оних, који су независни један од другог и да неби ниједан од независних услова био испуштен.

Одређивање оптшег броја независних услова сваке врсте изводи се према обрасцима, предложеним од стране различитих геодета.[3]) Разлика у обрасцима изведеним од стране различитих геодета зависи како од врста услова узетих у обзир, тако од ознака различитих величина.

Задатак овог чланка састоји се у томе: 1) да утврди какве врсте геометријских услова вежу непрекидну мрежу вишег реда (од I до III класе); 2) да да, поред осталог, обрасце за рачунање броја независних услова сваке врсте; 3) да разјасни који су од услова сваке врсте најпогоднији за простије извођење рачунања при изравнавању и најзад, 4) да утврди практични начин за избор у циљу изравнавања потребног броја независних услова који би давао највише гарантија од погрешног избора.

II. Врсте геометријских услова непрекидне тријангулационе мреже

При изравнавању непрекидне тријангулационе мреже[4]) геометријски услови, који вежу елементе (углове и стране) мреже

---

[3]) Последњи пут овакве формуле предложио је *Dr. ing. S. Jachimowski* у чланку „Uogólnienie wzorów do ustalenja ilosci równan warunkowych u sieciach triangulacyjnich", штампаном у Przeglad Mierniczy, бр. 11 и 12 за 1938 год. стр. 226—229 и 245—253.

[4]) У тријангулационим мрежама, које имају облик ланаца, број и разноврсност геометријских услова вежућих опсервиране правце, односно углове, много су мањи но у мрежи непрекидној. Зато наша расматрања ми односимо на непрекидну мрежу.

могу се поделити у три групе: 1) услови који се односе само на правце, односно углове; 2) услови који вежу стране мреже и 3) услови који вежу истовремено и углове (правце) и стране.

Прву групу сачињавају **услови геометријских облика** (фигуре), састављени од непрекидних, или обостраних праваца; **услови фиксних углова,** у које улазе само једнострани правци и, најзад, **азимутални услови,** који се односе на оријентацију мреже на земаљској површини.

Другој групи припадају, — **полусни услови,** у које улазе на половину једнострани, на половину двострани правци и **услови фиксних страна,** који су истоветни у својој суштини са **условима базиса** а који вежу како једностране, тако и двостране правце.

У трећу групу улазе **полигонални услови,** које неки од геодета из више разлога и са већим правом зову **координатним условима фиксних тачака.**

При изравнавању прворазредних градусних ланаца а ради тачнијег преноса (пројецирања) положаја тријангулационих тачака са геоида на елипсоид искоришћују **физичка посматрања** расподеле снаге земљине тежине на површини геоида. Резултати ових опажања вежу одређеним условима посматране углове, односно правце. Али највише због недовољне бројности **гравиметријских опажања,** како се зову опсервирања земаљске тежине, ови услови се не искоришћују при изравнавању мреже.

Пошто гравиметријска опажања брзо добијају све већи опсег, треба очекивати у скорој будућности да ће питање њиховог укључења у опште изравнавање прворазредних тријангулационих мрежа бити решено, као што је случај са астрономским посматрањима на тријангулационим тачкама.

Као што је увод у изравнавање астрономских посматрања претворио чисто **геодетске** мреже у мреже **астрономо-геодетске,** тако ће и увод гравиметријских посматрања додати астрономо-геодетској тријангулацији још и карактер **физички,** односно, **геолошки.**

III) Угловни услови

а) **Услов геометријског облика или фигуре** проистиће из геометријског закона, према којему је сума S свих унутрашњих углова сваке затворене фигуре на равни, или на сфери и за раван износи:

(1) $S = 180^0 (n-2)$,

где n је број страна фигуре, а за сферу:

(2) $S = 180^0 (n-2) + \varepsilon$

где Σ — сферни ексцес.

Ма да се тријангулација виших редова изравнава и рачуна на сфероиду, ипак њени троуглови заузимају површину толико малу према целој површини сфероида да могу изгледати као сферни.

Како се у изравнање само у изузетним случајевима уводи услов фигуре, која се разликује од троугла, то ће за највећи део ових услова важити образац:

(3) $S = 180^0 + \varepsilon$.

Услов фигуре може се односити само на затворени геометријски облик, дакле, на фигуре, које су формиране од двостраних праваца.

Кад у мрежи постоји p тачака њихова међусобна поступна веза са (p—1) двостраних праваца не сачињава још ниједну затворену фигуру и само веза последње тачке са првом двостраним правцем ствара први затворени облик и налаже на мрежу први независни услов фигуре. Сваки нови двострани правац формира једну нову затворену фигуру, независну од претходне и уводи један нов независни услов фигуре. Дакле, кад мрежа има l_1 двостраних праваца, (p—1) од њих не стварају ниједан услов фигуре, а остали сваки по један независан услов и општи број F независних услова фигуре биће једнак:

(4) $F = l_1 - (p - 1) = l_1 - p + 1.$

Општи број свемогућих затворених фигура, које стварају у мрежи са n тачака l_1 двострани правци, од којих свака одговара једном услову фигуре, много је већи но број F независних услова из обрасца (4).

Тако, четвороугаоник са две диагонале, према обрасцу (4), где је $l_1 = 6$ и $p = 4$, има, —

(5) $F_4 = 6 - 4 + 1 = 3$

независних услова фигуре док општи број F^1_4 затворених фигура у таквом четвороугаонику $F^1_4 = 5$ и $F^1_4 - F_4 = 2$.

У петоугаонику, који има све диагонале имаћемо:

(6) $F_5 = 10 - 5 + 1 = 6$; $F^1_5 = 14$; $F^1_5 - F_5 = 8$.

И у мрежи, већој по броју тачака, ова разлика постаје све већа. И онда треба имати највећу опрезност и уложити највећу пажњу да би из многобројних постојећих услова фигуре одабрали број независних услова, према обрасцу (4) и да при томе не би увели у рачун изравнавања ниједну зависну условну једначину.

Између свију затворених геометријских облика најпогоднији за изравнавање је облик троугла, јер онда у условну једначину фигуре улази најмањи број непознатих поправака једностраних праваца, и то 6.

У тријангулацији 1 и 2 реда при рекогносцирању и избору тачака увек се поставља услов видљивости најмање две претходне тачке и најмање две наредне тачке. Зато се у овим тријангулацијама увек цела површина прекрива непрекидном мрежом троуглова и за њих сви услови фигура могу бити изабрати троуглови

У мрежама 3 реда у оним деловима, који потпадају општем изравнавању могу се понекад срести фигуре неподељене на троуглове; али и у овом случају најкомпликованија фигура је четвороугао.

У локалним мрежама, као што су мреже за варошко снимање, које се обично изравнавају засебно, могу ући фигуре неподељене на троуглове чак и са већим бројем страна но 4.

в) **Услов фиксног угла** постоји тамо, где у мрежи, ослоњеној на мрежу већ изравнату, улазе две или више већ познате (фиксне) стране (двостраних праваца) старе мреже истог или већег реда него ли је нова.

У мрежама (ланцима) 1-ог реда овај случај може се десити онда, кад постојећа и већ израчуната мрежа 1-ог реда или се продужава, или се допуњава новим групама тачака.

Мреже 2-ог реда увек се развијају на основу постојеће мреже 1-ог реда и у њима се доста често среће случај, да у мрежу улазе две фиксне стране или чак целог фиксног полигона.

Услов фиксног угла тражи, да би поправке поново опсервираних праваца који га одређују изједначивале опсервирану величину угла са његовом фиксираном величином.

Две суседне фиксне стране у њиховој општој тачци образују један фиксни угао и уводе у мрежу један услов фиксног угла.

Кад имамо у мрежи m одвојених пара таквих фиксних страна, онда ће број a_f независних услова фиксног угла бићи једнак:

$$(7) \qquad a_f = m$$

Ако имамо у мрежи низ, например n_1, међусобно суседних фиксних страна, који стварају фиксни полигон, онда ће се у њему налазити $(n_1 - 1)$ углова, независних један од другога, а сваки од њих уводи у мрежу по један услов фиксног угла. Број $a_{f.1}$ свих оваквих услова биће

$$(8) \qquad a_{f.1} = n_1 - 1.$$

Ако би у мрежу улазило више полигона, например m_1 тада би број њихових страна био, — за први n_1, за други — n_2 и т. д. за m — и — m_n, онда на основу обрасца (8) могли би написати:

$$(9) \qquad \begin{aligned} a_{f.1} &= n_1 - 1, \\ a_{f.2} &= n_2 - 1, \\ a_{f.m} &= n_m - 1. \end{aligned}$$

А општи број a_f услова фиксног угла би био:

$$(10) \qquad a_f = a_{f.1} + a_{f.2} + \ldots a_{f.m} = \sum_1^{m} n_k - m.$$

Образац (10) има **општи** карактер и њега можемо искоришћавати за одређивање броја независних услова фиксног угла за све случајеве праксе само под условом да се у број фиксних полигона увршћују и свака изолована фиксна страна. Ове последње не уводе у образац (10) ниједан услов фиксног угла, јер према формули (8) овај број, пошто $n_1 = 1$, једнак је нули.

Реалну вредност број услова фиксног угла, а према обрасцима (9), добива само под условом:

$$(11) \qquad n \geqq 2.$$

Избор услова фиксног угла не претставља тешкоћу, јер број независних услова увек се поклапа са бројем постојећих у мрежи фиксних углова.

c) **Азимутални услов,** или **услов нагиба** појављује се у мрежи онда, кад ова има, најмање, две оријентиране стране.

Оријентација тријангулационих страна у мрежи 1-ог и 2-ог реда врши се обично према истинитом (географском) меридијану помоћу истинитог или географског азимута. Опсервирање овог у том случају се обавља на једном од крајева базиса. Али ова околност није обавезна за постојање азимутног услова, јер за сваку страну мреже може да буде опсервиран њен истинити азумут, што се у пракси понекад и дешава.

Фиксне стране увек су оријентисане. Кад оне леже једна поред друге, онда се и азимутни услов претвара у услов фиксног угла. Кад оне леже одвојено, онда сваки пар овако одвојених фиксних страна или одвојених фиксних полигона ствара по један независни азимутни услов.

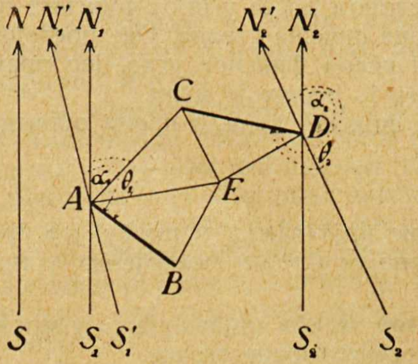
Фиксне стране (координате њихових крајева) могу да буду изравнане и израчунате не на површини елипсоида (не у апсолутном или географском систему координата) већ у некој одређеној пројекцији и у одговарајућем систему координата. У последње време најширу употребу у пракси има проекција и правоугли систем координата Гаус—Кригеров.

У оваквим случајевима оријентисање фиксних страна се односи на неки условни правац (правац главног меридијана пројекције, који се поклапа са правцем x — осе) и место истинитог азимута се употребљава **условни азимут** или **нагиб** фиксне стране, зашто и услов, који се односи на нагибе две фиксне стране се зове **условом нагиба.**

У мрежима 1-ог и 2-ог реда, чије се тачке увек рачунају првобитно на земаљском елипсоиду у апсолутном систему (географске ширине и дужине) координата, нагиби фиксних страна, ако нису познати њихови азимути, прерачунавају се претходно у истините азимуте и услов нагиба претварају тиме у азимутни.

Кад се, после изравнавања мреже, координате њених тачака рачунају дефинитивно у некој пројекцији, онда је често пута, практички корисније пре изравнавања опсервиране правце и азимута трансформирати у правце и нагибе у пројекцији и са њима вршити изравнавање и дефинитивно рачунање мреже. Овај пренос азимута и праваца са геоида директно у пројекцију претставља обично рачунску операцију простију него ли, трансформација апсолутних координата тачака мреже у координатни сестем пројекције.

Азимутни услов, односно услов нагиба тражи да се азимут α'_2, односно нагиб θ'_2 једне од фиксних страна DEC израчунати од азимута α_1, односно нагиба θ_1 друге фиксне стране AB помоћу углова везног ланца троуглова AEB, AEC и CED, поклопи са познатим азимутом α_2, односно нагибом θ_2 исте стране CD.



Сл. 1

$$\alpha_2' - \alpha_2 = 0 \tag{12}$$

односно:

$$\theta_2' - \theta_2 = 0 \tag{13}$$

Да би одредили број независних азимутних услова, односно услова нагиба, могло би се радити на следећи начин: изабере се једна оријентисана страна (базис, фиксна страна), која лежи одвојено од осталих, као почетна и израчуна се поступно полазећи од њеног азимута (нагиба) а помоћу углова везујућих троуглова азимуте (нагибе) осталих оријентисаних страна. Свако поједино овакво рачунање ствара по један независни од осталих услов азимута (нагиба). Тиме бисмо исцрпли све могуће независне услове азимута, јер ће свака друга веза оријентисаних страна бити зависна од већ остварених.

Ако означимо број свију независних услова азимута са α, број оријентисаних страна, односно одвојених фиксних страна и фиксних полигона са m, онда на основу горе наведеног имамо:

(13) $$\alpha = m - 1.$$

Узимајући у обзир да сваку оријентисану страну можемо везати са свима осталима и сваки пут добити по један услов оријентисања (азимута или нагиба), општи број α_0 свемогућих ових услова, независних и зависних, биће:

(14) $$\alpha_0 = m\,(m-1),$$

или на основу (13), —

(14*) $$\alpha_0 = m\alpha_1$$

т. ј. величина α_0 m пута је већа од броја α независних услова оријентисања. А пошто у непрекидној мрежи ланаца троуглова, који везују једну оријентисану страну са другом, више од једног, то ће број α свемогућих услова оријентисања биће још већи према α.

Најпростије изравнавање услова оријентисања мреже биће оно где је веза између два оријентисана елемената најкраћа, у коју, дакле, улази најмањи број везујућих троуглова. То се даје лако утврдити из прегледа шеме тријангулационе мреже.

Како је горе споменуто услов угла претставља нарочити случај услова оријентисања, кад две оријентисане стране леже једна поред друге и везу између њих стварају троуглови са општим врхом и најчешће само један троугао.

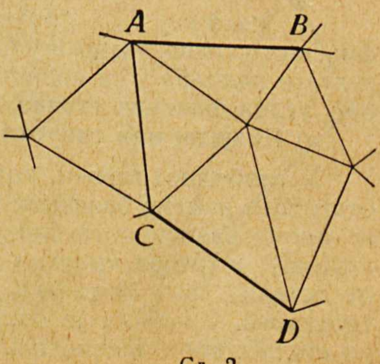
Пошто у фиксном полигону услови оријентисања између суседних страна су замењени условима фиксних углова, као најпростији, то се за услов оријентисања сваки одвојени фиксни полигон сматра као један елеменат оријентисања.

Могућност замене услова оријентисања условом фиксног угла дозвољава у пракси у неким нарочитим случајевима да се иста искористи ради упрошћавања самог изравнавања.

Такав је, например, случај приказан на сл. 2.

Овде нова тријангулациона мрежа пролази између две фиксне стране AB и CD, при чему се је могло опсервирати са тачке A тачку C и обрнуто. Онда помоћу координата ових тачака могли би смо израчунати дужину стране AC и њен угао за оријентисање и израчунате елементе увести у мрежу као нову фиксну страну.

Овим уводом повећали бисмо општи број независних услова



Сл. 2

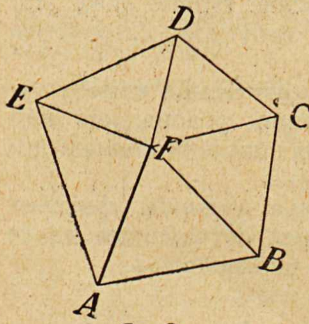
мреже и то, у нашем случају, један услов оријентисања био би замењен са два услова фиксних углова DCA и CAB и један базисни услов са два услова фиксних страна. Тако би смо број свих независних услова повећали за 2, или у исто време поделили би смо целу мрежу на два дела—на лево од фиксног полигона BACD и на десно од њега, које делови би могли сада изравнавати независно један од другог.

Кад фиксне стране леже на већој раздаљини једна од друге и са једне се не може опсервирати друга, увод у мрежу израчунате фиксне стране ствара већи број нових независних услова (фигура, полуса, фиксних углова, фиксних страна), ипак и у оваквим случајевима ово може бити за изравнавање од велике користи ако се тиме постиже подела мреже на два независна дела.

IV) Услови страна.

Кад у тријангулационој мрежи опсервирани правци стварају могућност да једна страна може да буде израчуната два пута, полазећи од друге те исте стране а на два независна начина, то ће у изравнатој мрежи оба резултата бити истоветне. У не изравнатој мрежи, због грешака опсервирања, оба резултата ће се разликовати и да би се ова разлика отклонила уводи се у изравнавање услов страна.

У слободној мрежи, где ниједна страна, осим базиса, није позната пре завршетка изравнавања, упоређивање резултата рачунања дужине једне исте стране може се чинити само онда кад ову дужину можемо израчунати други пут полазећи од ње ка истој.



Сл. 3

Тако, например, у централном систему (сл. 3) ABCDEF страну AF можемо израчунати други пут полазећи од ње ка истој кроз троуглове ABF, FBC, FCD, FDE, FEA.

У овом случају ми ћемо имати т. зв. **полусни** или **синусни** услов.

Кад у мрежи постоје две или више фиксних (познатих) страна, или базиса, то полазећи од дужине једне фиксне стране (базиса) можемо кроз везујући ланац троуглова израчунати дужине осталих фиксних страна, односно базиса и тражити да се добивени резултати поклапају са познатим дужинама истих страна, који стварају **услов фиксних страна,** односно **базисни услов.**

а) **Полусни или синусни услов.**

У слободној мрежи, која има p тачака и један мерени базис, отстојање између базисних тачака је познато; за одређивање тачке према базису потребно је имати три двострана правца, који стварају потребан троугао за рачунање страна. Отстојање између осталих (n — 3) тачака може се одредити помоћу поступних троуглова, у којима је отстојање између две тачке већ познато из претходног одређивања, као што је познат и вежећи их двострани правац. Дакле, за одређивање отстојања до треће тачке у сваком од оваквих троуглова довољно је имати два нова двострана правца.

Укупно, за одређивање свих међусобних отстојања између суседних тачака мреже, потребно је имати: за прве три тачке — 3 двострана правца и за $(n-3)$ осталих за сваку тачку по 2 двострана правца, или свега:

$$(15) \qquad k=3+2(n-3)=(2n-3) \text{ праваца.}$$

Сваки нови правац, двострани или једнострани дозвољава израчунати поново једно од отстојања између неке две тачке мреже, чиме се ствара један независан полусни услов.

Ако у мрежи постоји l_1 — двостраних праваца и l_2 — једностраних, то ће број c независних полусних услова бити:

$$(16) \qquad c=l_1+l_2-(2n-3)=l_1+l_2-2n+3.$$

Број непознатих, које улазе у полусну условну једначину, зависи од броја праваца, који вежу изабрани полус са тачкама основице и једнак је дуплом броју тих праваца.

Неки од праваца, који стварају полусни услов, могу да буду једнострани али само они, који иду на полус, док основица увек је састављена од двостраних праваца. Број двостраних и једностраних праваца, који су везани за полусни услов, увек је једнак.

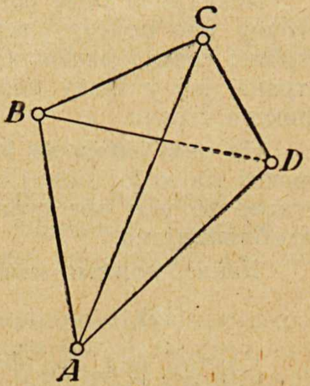
Ако означимо са m број праваца једностраних, онда и број двостраних праваца, као што је речено горе, биће исто m, а пошто сваки двострани правац уводи у условну једначину по две непознате, а једнострани — по једну, то ће општи број x непознатих полусне условне једначине одредити образац:

$$(17) \qquad x=2m+m=3m.$$

Број двостраних праваца у полусном услову одговара броју страна основице, из чега следи да ће најпростији, т. ј. с најмањим бројем непознатих, бити полусни услов, где је за основицу изабрат троугао. Онда, према обрасцу (17), број непознатих условне једначине биће једнак

$$(17^*) \qquad x_3=9.$$

Случај полусног услова са основицом од троугла претставља четвороугао са обадве дијагонале (сл. 4), — ту за основицу служи троугао ABC а као полус тачка D, куда иде једнострани правац BD. У условну једначину улазе три двострана правца основице, — AB, BC и CA и три једнострана правца, који иду од основице на полус, и то, — CD, BD и AD.

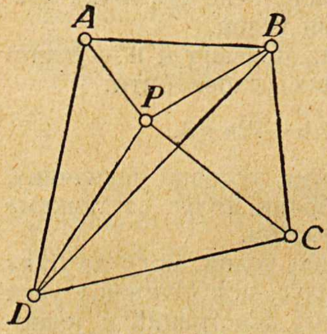


Сл. 4

Кад су сви правци у четвороуглу ABCD са дијагоналама AC и BD двострани, онда сваки његов врх може да служи као полус. У том случају изабира се онај, који је најближи једној од дијагонала, што обезбеђује тачније рачунање вредности непознатих.

Сваки централни систем уводи у мрежу по један полусни услов. Али пошто његова основица увек има већи број страна него ли троугао, то у случају, кад овакав систем пресеца ма и једна дијагонала, од којих свака уводи у мрежу још по један независни полусни услов, то се основни полусни услов централног система увек замењује са онима два или више (у зависности од броја дијагонала) простијих полусних услова, на који деле дијагонале централни систем.

Тако се централни систем PABCD са четвороугаоном основицом (сл. 5) дијагоналом DB дели на два полусна услова са основицама од троуглова DBC и DBA и полусом P.



Сл. 5.

Пошто се за полус у полусном услову у случају, кад је мрежа формисана само од двостраних праваца, може изабрати ма који врх фигуре, који уводи у мрежу полусни услов, то је број свемогућих полусних услова много већи но број независних истих.

Зато, при избору полусних услова за изравнавање треба поклањати највећу пажњу да би изабрати услови били најпростији за рачунање и да неби ниједан од них био зависан.

b) **Услов фиксних страна.**

У овом услову се разликују два случаја: први, кад фиксне стране леже једна поред друге и други, кад су оне растављене ланцем троуглова.

У оба случаја број независних услова фиксних страна остаје исти: сваки пар фиксних страна, од којих једна није улазила у већ изабрате услове фиксних страна, ствара један независни услов.

Да би одредили општи број b_f независних услова фиксних страна поступамо на исти начин, који смо искористили за одређивање азимутних услова.

Нека је m број свију фиксних страна мреже. Узевши једну страну, као почетну, вежемо њу поступно за све остале $(m - 1)$ стране; свака оваква веза ствара један независан услов фиксних страна, јер у сваку комбинацију улази сваки пут по једна нова фиксна страна.

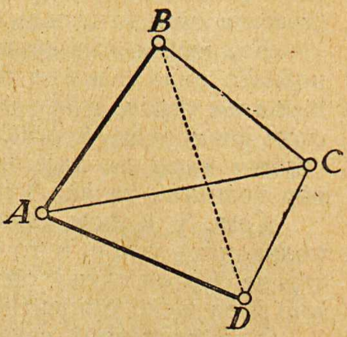
На овај начин ми ћемо исцрпсти све независне услове, јер у свакој ма којој новој комбинацији пара фиксних страна неизоставно ћеући обе стране, које су биле искоришћене у горњим комбинацијама.

Дакле, можемо написати:

$$(18) \qquad b_f = m - 1.$$

Случај, кад две фиксне стране леже једна поред друге, је најпростија, јер се веза између обе стране ствара са малим бројем троуглова.

Најпростији случај приказан је сликом 6, где су фиксне стране AB и AD везане са два троугла ABD и ADC.



Сл 6

Случај, кад су AB и AD везане двостраним опсервираним правцем BD не узима се у обзир, јер се онда две фиксне стране замењују фиксном страном BD, чија се величина и оријентисање рачуна из познатих координата тачака B и D.

Дакле, при избору услова фиксних страна у први ред долазе услови суседних страна и тек када њихов број не одговара броју израчунатих из обна и тек када њихов број не одговара броју израчунатих из обрасца (18), изабира се остали број независних услова између парова међусобно одвојених фиксних страна.

Од ових практичну предност имају они парови фиксних страна, који су везани најкраћим ланцем по броју троуглова, дакле оне, које леже једна од друге на најкраћем отстојању. То се лако даје утврдити прегледом тријангулационе шеме.

е) **Базисни услов.**

Базиси у тријангулацијоној мрежи се разликују од фиксних страна само начином одређивања њихових дужина: док се дужина базиса одређује непосредним мерењем помоћу базисних прибора, дужина фиксне стране се рачуна из троугла изравнате мреже. Јасно је да начин, којим је одређена ова или она страна тријангулационе мреже ниуколико не утиче на геометричке везе њених елемената.

Зато базисни услов је потпуно идентичан услову фиксних страна, кад су ове одвојене једна од друге ланцем троуглова.

Из овога следи да се број $\mathfrak{b}$ независних базисних услова, кад мрежа има $\mathfrak{m}$ базиса, рачуна из обрасца, сличном обрасцу (18), и то:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{m} - 1. \tag{19}$$

За избор независних базисних услова који су најпогоднији за изравнавање важе примедбе наведене за избор услова одвојених фиксних страна.

V) Полигонални услов или услов координата

При рачунању сваке тријангулационе мреже потребно је одредити њено право место на земаљској површини, односно на земаљском елипсоиду, на чију се површину пројецирају сва мерења, извршена на земаљској површини.

То се постизава или одређивањем из астрономских посматрања географских координата једне од тачака мреже (крајње тачке базиса) и азимута једне њене стране (оријентисање мреже), или спајањем нове мреже са једном од тачака постојеће и изравнате мреже (фиксна тачка) и мерењем угла између фиксне стране која полази од фиксне тачке и једне од страна нове мреже (угао за оријентисање).

Кад мрежа има више тачака чије су координате одређене или познате, онда свака од тих тачака у вези са оријентацијом полазеће од ње стране може послужити за фиксирање мреже на земаљском елипсоиду. А пошто у изравнатој мрежи свако овако фиксирање мора да даје истоветне резултате, ово ствара за сваки пар познатих тачака[5]) полигонални услов или услов координата.

Само у једном случају један пар фиксних тачака не ствара полигонски услов, и то кад се он односи на крајеве исте фиксне стране, јер он служи онда поред фиксирања мреже на елипсоиду још и за њено оријентисање.

У непосредној вези са полигоналним условом стоји услов оријентисања мреже или услов азимута, односно услов нагиба, о коме смо већ расправљали горе.

Полигонални услов тражи да координате једне од фиксних тачака израчунате из координата друге, помоћу ланца троуглова, који веже ове тачке, буду истоветне са познатим координатама исте. Зато полигонални услов садржи у стварности два засебна услова: услов једне и услов друге координате. За апсолутни координатни систем то је услов географске ширине и услов географске дужине. Кад се мрежа рачуна у некој пројекцији, например, у пројекцији Гаус—Кригера, онда се полигонални услов дели на услов координате x и на услов координате y.

Кад мрежа има m одвојених фиксних тачака (које не припадају нити истој фиксној страни, нити истом фиксном полигону), онда изабравши једну из њих и комбинујући њу са сваком од (m — 1) осталих фиксних тачака, добићемо (m — 1) пар фиксних тачака од којих сваки ствара по један независни полигонални услов. Свака друга комбинација пара од m фиксних тачака ствара полигонални услов који се може добити из спајања два полигонална услова прве групе и од њих је зависан.

Одавде следи да ће број p независних полигоналних услова бићи једнак:

$$p = 2(m - 1) \tag{20}$$

При избору независних полигоналних услова треба за изравнавање узимати оне, који одговарају полигону између фиксних тачака са најмањим бројем страна.

Постојећа пракса изравнавања тријангулационих мрежа одваја полигоналне услове у засебну групу, које уводи у изравнање после задовољења свију осталих услова. У том случају да би се сачували резултати првог изравнавања, групи полигоналних услова додаје се низ фиксних услова који се изравнавају заједнички.

Овај начин изравнавања полигоналних услова правда се тиме да, с једне стране, увођење ових у опште изравнавање много не компликује рачунање, а с друге — да поправке праваца у изравнатој мрежи од полигоналних услова буду малене и да не превазилазе стотините делове секунде.

---

[5]) Тачке, чије су координате познате или путем астрономских мерења или путем рачунања изравнате мреже називати ћемо **фиксним** тачкама.

Усавршавање начина рачунања корелатних једначина и повећање тачности угловних опсервирања тражи да се сви услови, које тријангулациона мрежа мора да задовољи, маколико њих било, уводе у заједничко изравнавање.

Тако Посдамски геодетски институт у Немачкој већ неколико година изводи опште изравнавање целокупне државне тријангулације I реда, које обухвата више од хиљаде условних једначина.

VI. Начин избора независних услова за изравнавање мреже.

Као што се види из свега горе наведеног избор потребног броја независних услова за изравнавања претставља веома важну операцију, чија погрешка може поништити резултате дуготрајних рачунања, јер се открива сувише касно.

Зато је од велике важности пронаћи онакав начин овог избора услова, који би могао да осигура његову правилност у сваком погледу, — како избор целокупног броја независних услова према обрасцима за његово рачунање [обрасци (4) — (20)], тако и облик условних једначина, најпогоднијег за изравнавање.

У геодетској литератури готово не постоје озбилна расправљања овог питања.

Једино професор Ф. Н. Красовски [6]) даје један практички начин за избор полусних услова и фигура, који се састоји у томе да се при сваком избору независног услова на шеми триангулационе мреже поступно поништава — брисањем или прецртавањем, по један од праваца, који је улазио у изабрати услов и тиме се овај правац отстрањује од стварања зависних услова.

Али овај начин има доста битних недостатака.

Он је погодан за употребу у мрежама са ограниченим бројем троуглова. При опширним и сложеним непрекидним мрежама његова примена толико се компликује да често пута доводи у ћорсокак, одакле је једини излаз да се понови од почетка цела операција избора.

Пошто је поништавање једног правца из сваког од изабратих независних услова потпуно произвољно и може да буде изведено са више различитих комбинација, оно не даје никакве гаранције да избачени правац из шеме не улази у други независни услов, којему одговара условна једначина најпогоднија по форми за изравнавање.

Због тога поједини независни услови изаберу се, нарочито при крају избора, потпуно случајно и неке од њих безразложно компликују рачунске операције изравнавања.

Она изравнавања тријангулационих мрежа виших редова, која су се изводила под мојим руководством дали су повод да се ближе позабавим питањем о избору независних услова по величини произвољне мреже и разрадим нов практички начин за његово целисходно решење.

Овај начин се базира, као што и начин проф. Красовског, на шеми тријангулационе мреже и разликује се од њега у првом реду тиме, да се место поништавања правца на шеми, који би

---

[6]) *Ф. Н. Красовскій,* профессор. Руководство по высшей геодезіи. Часть 1 Москва, 1936. Стр. 287—288.

могли створити зависни услов, шема мреже у почетку израђује са минималним бројем праваца, потребним за избор најпростијих за изравнавање независних услова и тек да се после појединачно допуњује поступним унашањем и осталих праваца, а у вези са тим да се врши избор осталог броја опет најпростијих независних услова.

При изравнавању тријангулационих мрежа најбројнији су услови фигура и полусни. Чак у мрежама са неколико фиксних страна или оријентисаних базиса њихов број превазилази за 90% број осталих услова. У слободној мрежи постоје само ове две врсте услова.

Зато тешкоће при избору независних услова постоје само за услове фигура и полусне и цела наша анализа се односи на ове услове. За остале врсте услова потпуно су довољне оне примедбе, које смо дали горе при њиховом прегледу.

Да би се што јасније претставиле све појединости израде шеме тријангулационе мреже одређене за избор независних и најпростијих полусних услова и фигура, а коју шему у том случају називамо **шемом условних једначина,** пропратимо наша објашњења једним примером, који се односи на аустријску базисну мрежу око Kranichsfeld'a [7])

Мрежа је претстављена на сл. 7. Мрежу сачињавају 6 тачака A, B, C, D, E, F: на свакој од њих опсервиране су све остале пет. Свега је опсервирано 30 праваца, који стварају 15 двострана правца и ниједни једнострани. Према нашим ознакама имамо

(21) $$p=6;\ l=30;\ l_1=15 \text{ и } l_2=0.$$

Из образаца (4) — (16) налазимо:

(22) $$\begin{aligned} s&=30-3.6+4=16\\ a&=15-6+1=10\\ c&=15+0-2.6+3=6\\ a+c&=10+6=16=s. \end{aligned}$$

Пре свега на шему нанашамо у приближној размери, одређујући од ока узајамни положај тачака мреже, низ троуглова, — ABC, BCD, BDF, DEF, EFA и CDE, који покривају целу триангулирану површину и од којих ниједан не прекрива други. Сви су они распоређени један поред другог. То је основни услов цртања шеме условних једначина.

Сваки од ових троуглова ствара у мрежи по један независни услов фигуре, а пошто је овај истовремено најпростији, то при уцртавању на шему појединих троуглова узимамо његов услов за изравнавање и означујемо на шеми у средини троугла број одговарајуће му условне једначине.

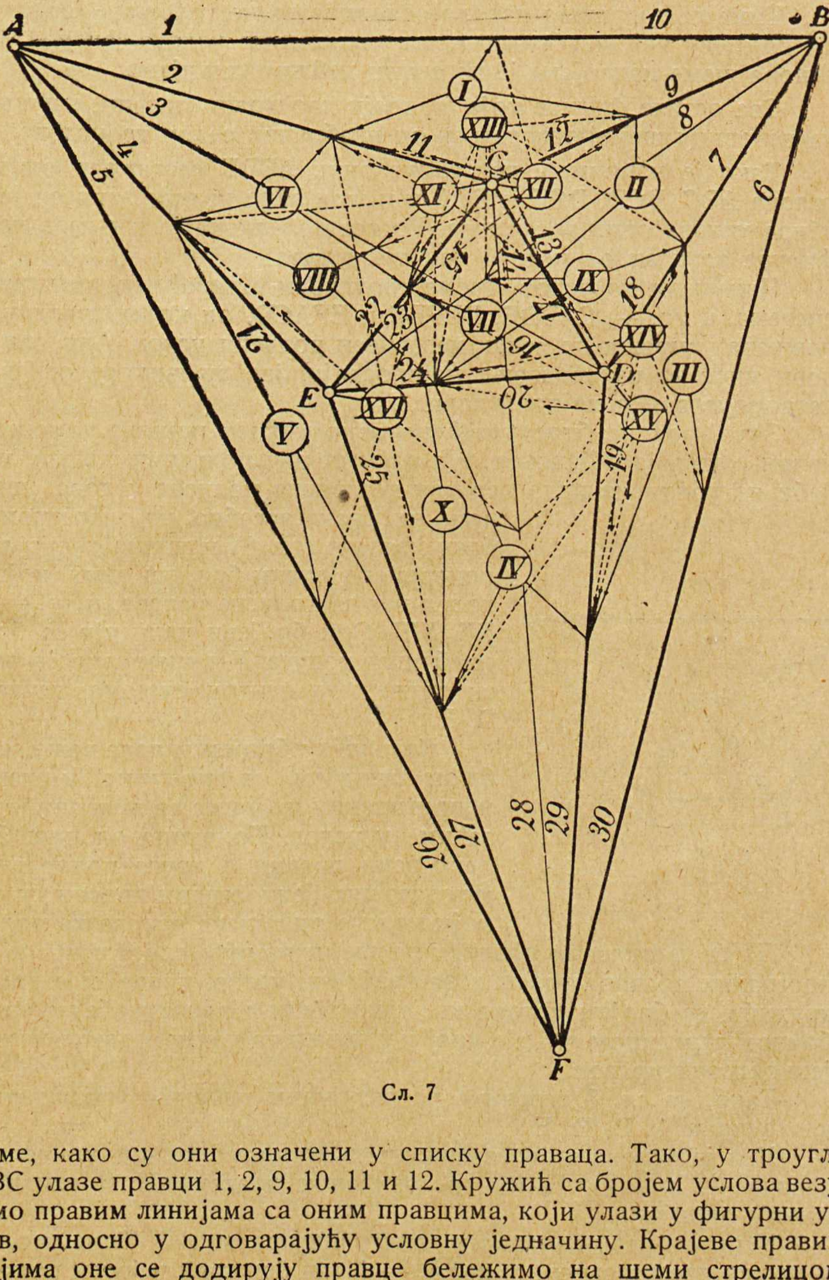
Уобичајено је да се условне једначине нумеришу римским бројевима, а фигурни услови, као, уопште, угловни услови, стављају се у таблици условних једначина на прво место.

---

[7]) *Die Ergebnisse* der Triangulierungen des K. u. K. Militärgeographischen Instituts. I Band. Tafel 7.

Зато у нашем примеру за услове фигура, а према њиховом броју, резервишемо цифре од I до X; за услове полуса остале цифре од XI до XVI.

Како израду шеме почињамо са уцртавањем троугла ABC, то његов фигурни услов означујемо са бројем I, који стављамо у кружић; нанешене правце бележимо арапским бројевима према



Сл. 7

томе, како су они означени у списку праваца. Тако, у троугло ABC улазе правци 1, 2, 9, 10, 11 и 12. Кружић са бројем услова везујемо правим линијама са оним правцима, који улази у фигурни услов, односно у одговарајућу условну једначину. Крајеве правих, којима оне се додирују правце бележимо на шеми стрелицом.

После уцртавања другог троугла BCD изабирамо његов независан фигурни услов, као други, који означавамо на шеми на горе наведен начин. Тако поступамо редом при уцртавању на шему осталих троуглова. При крају, кад уцртавамо праву CE ради конструисања троугла AEC у исто време ће се на шеми појавити и троугао CED, чије су стране CD и DE биле уцртане већ на шеми при конструисању троуглова BCD и FED. Троугао CED даје седми фигурни услов.

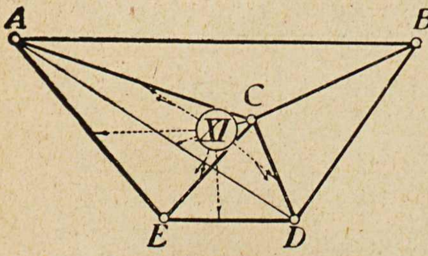
Тиме се завршава израда основице шеме условних једначина на којој су већ изабрати седам независних услова фигура. Ова основа шеме издвојена је на слици дебљим линијама.

Све остале фигуре које стварају двострани правци, нанешени на основицу шеме, зависни су од изабраних седам троуглова.

Тако је например, четвороугаоник ABDE састављен од троуглова ABC, BCD, DCE и ECA и његов збир углова зависан је од збира углова ових троуглова. Из тога следи да је и његов услов фигуре зависан од услова тих троуглова.

Нанешени на основу шеме троуглови стварају три централна система, и то, — CABDE, DBFEC и EFACD, од којих сваки установљава у мрежи по један независан полусни услов. Али ови услови нису за изравнавање најпростији, јер су њихове основице четвороуглови а не троуглови.

Зато, док не буде утврђена немогућност њихове замене, на начин, какав је објашњен при расматрању полусних услова, и да неби изгубили из вида ова три независна полусна услова, уцртавамо их, сваки засебно, на одвојеном табаку хартије (сл. 8) и придајемо сваком привремено редни број из оних, који су додељени за полусне услове, и то, — XI, XII, XIII. Ови бројеви исписују се близу изабратог полуса. У нашем случају полуси служе код центри система, тачке C, D, E.



Сл. 8

Кружић са бројем услова веже се дебљом линијом са полусом и тањим испрекиданим правима са правцима, улазећим у услов. Половица од њих биће двострани правци а друга половица — једнострани. Једнострани правци су они, који полазе од тачака основе ка полусу.

Да би направили разлику на шеми између двостраних и једностраних праваца везаних за изабрани услов, праве које иду од кружића са бројем услова ка једностраном правцу обележене су бочном стрелицом чији је крај управљен ка тачки, одакле почиње једнострани правац.

Тако, на сл. 8 стрелице на везујућим правима управљене су ка тачкама A, B, D, E.

Кад је основа шеме завршена приступамо ка поступном уцртавању на шеми осталих опсервираних праваца. Њих нанашамо тањим линијама.

У првом реду нанашамо двострани правац AD. Тиме уводимо у мрежу два независна услова, — један фигурни и један полусни.

Свака фигура на шеми, коју затвара нови правац, даје независан услов фигуре; од ових изабирамо за изравнавање троугао, као најпростију фигуру.

Правац AD затвара четири троугла, — AED, ACD, ABD и ADF. Какав ће се од њих изабрати за осми независни услов фигуре то је свеједно. Изабирамо троугао AED; остале фигуре постају онда зависне.

Правац AD дели централни систем CABDE на два једна од другог независна дела од којих сваки уводи у мрежу полусни услов. Први део — четвроугао ACDE са две диагонале CE и AD и други централни систем CABD са троугаоном основом ABD (сл. 8).

Четвороугао ACDE даје нов најпростији полусни услов са полусом C и троугаоном основицом AED.

Што се тиће централног система CABD, то он ствара полусни услов опет са троугаоном основом и простији је него провизорни изабрани услов једанајести. Зато њом замењујемо овај услов. Онда провизорни услов XI се изоставља као зависни од два горња услова.

Условну једначину, која се односи на полусни услов четвороугла ACDE, нумеришемо бројем XI и унашамо у шему.

Условну једначину, која одговара централном систему CABD нумеришемо бројем XII и унашамо у шему.

Сада по реду уцртавамо на шеми правац BE који дели полусни услов централног система BCEF на два простија полусна услова, један са полусом C и основицом BED, који замењује провизорно изабрани услов XII и нумерише се са XIII; други са полусом D и основицом BEF даје четврти независни полусни услов са бројем XIV.

Осим тога двострани правац BE ствара у мрежи девети независни услов фигуре, за који изабирамо услов троугла BED.

Све ове услове означујемо на шеми.

Најзад уцртавамо на шеми последњи двострани правац CF, који ствара десети и последњи независни услов фигуре и један независан полусни услов, делећи у исто време провизорно изабрани полусни услов централног система EACDF на два међусобно независна дела.

За десети услов фигуре изабирамо услов троугла CEF.

Полусни услов четвороугла DCEF са полусом D и основицом CEF замењује провизорно изабрани полусни услов централног система EACDF који смо провизорно означили са XIII. Овај услов нумеришемо са XV.

Полусни услов централног система EACF са полусом E и основицом ACF биће шести и последњи независни услов наше мреже. Њега нумеришемо на шеми са бројем XVI.

Сада су сви правци наше мреже нанешени на шеми и сви независни услови фигура, њих на броју 10, и сви независни полусни услови, по броју 6, изабрани су у најпростијем облику за изравнавање и означени су на шеми.

Састављена шема условних једначина на описани начин може служити при даљем раду на изравнавању:

1) за контролу таблице условних једначина;

2) за директно и једноставно рачунање коефицијената нормалних једначина при корелатима, који одговарају угловним условима (угловним условним једначинама);

3) за контролу таблице нормалних једначина.

О таквом искоришћењу шеме условних једначина расправићемо у засебном чланку.

Ing. ДРАГМИЮ БОШКОВИЋ,
асистент универзитета

ИСТОРИСКИ РАЗВИТАК ГЕОДЕЗИЈЕ

Основни циљ свих геодеских радова је добијање правог земљиног облика, т. зв. „Геоида". Питање облика претрпело је многе и многе измене од најстаријег времена па до данас. Кинези, Вавилонци, Египћани и Грци бавили су се тим питањем још у најстарија времена и давали су објашњења која су одговарала ступњу њихове културе и науке. За сваки од тих народа свет се је простирао донде докле су њихови путници допирали — а даље је био крај. По најстаријим схватањима земља је била котурасто плочастог облика.

Геометрија је у почетку свог развитка сматрана врло отменом науком. Знањем њених основних појмова стицао се је врло велики углед. Тек доцније је спуштена на ниво елементарне науке, а на њено место ступила је Геодезија.

Стари Асирци, Вавилонци и Египћани имали су своје геометре, који су уживали велики углед, што је и морало бити узимајући у обзир њихову велику образованост. Вавилонци су већ употребљавали и аритметичку средину што се види из једног плана из 3000 година пре Христа. Тако исто су познавали и сексагезималну поделу. (Круг је делен на 360° зато што се је веровало да година траје 360 дана те би сваком дану одговарао 1 степен). Постоје и једне Вавилонске таблице писане клинастим писмом са картом земље, али да ли су они и вршили какво мерење за одређивање земљиних димензија није познато.

Нарочито су били чувени египатски геометри који су били дужни да после сваке нилске поплаве, успоставе старе границе сопствености, на основу књига о положају. Положај, границе, суседи и прападност дати су у њима најтачније. Мера је била египатски лакат, који је био сличан Вавилонском а површинска мера је била површина квадрата стране 100 лаката и звала се Арура.

Настарији познати уџбеник за практичну геометрију био је „папирус Ринд" који се чува у британском музеју и потиче свакако из 17 века пре Христа. Први египатски геометри били су њихови свештеници и по њиховим храмовима су се налазили записи о поседима и о решењу математичких задатака. Још је Хе-