Год. 19 Нови Сад — септембар-октобар 1938 Св. 5

ГЕОМЕТАРСКИ И ГЕОДЕТСКИ ГЛАСНИК

Орган Удружења Геометара и Геодета Краљевине Југославије
БЕОГРАД, Адмирала Гепрата 68

27

0-1-5

СТРУЧНИ ДЕО

ЛАВ СОПОЦКО, професор

ИЗРАВНАВАЊЕ ОПАЖАЊА ИЗОЛОВАНИХ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ ТАЧАКА ВИШИХ РЕДОВА НАЧИНОМ НЕОДРЕЂЕНОГ РЕШЕЊА КОРЕЛАТНИХ ЈЕДНАЧИНА

Познато је, да се изједначење изолованих триангулационих тачака базира, према прописима постојећег катастарског правилника, на принципу изједначења посредних мерења.

За рачунање се искоришћују познати формулари правилника бр. 9, 10 и 11.

Иако се ово рачунање у горе наведеним формуларима изводи доста једноставно и брзо, нарочито кад се имају при руци помоћне таблице за вађење коефицијената a_i, b_i једначина грешака, ипак је код калкулатора увек постојала и постоји тежња да нађу још једноставније и још краће путеве, који би довели брже до резултата исто толико тачних како их захтевају прописи правилника.

У овом смеру се појавило на странама стручних часописа неколико предлога за нове начине изједначења триангулационе мреже уопште, и изолираних тачака понаособ.

Ту би требало споменути чланак *Инж. Штвана* — „О скраћеном решењу нормалних једначина за централне системе", који је био оштампан у св. 5 за 1935 г. нашег часописа, као и чланци руских геодета *Гањшина* и *Баршаја*)* у којима се третира питање изједначења триангулационих мрежа простијих облика — геодетски четвороугао, централни систем, ланац између две основице (уметање тачака).

---

*) В. *Гањшин* — Општи начин изједначења углова централног система. „Геодезист" 1934 г. бр. 3—4; стр. 27—35.

С. Е. Баршај — Обрасци и формулари за тачно изједначење простијих геодетских фигура „Геодезист" 1935 г. бр. 8 стр. 23—29.

Ма да се у горе наведеним чланцима налазе врло једноставне формуле, које у многоме упрошћавају обичне начине изједначења и скраћују рачунски рад, ипак оне решавају постављено питање само делимично, јер се односе на т. зв. *слободну мрежу*, у којој се не узимају у обзир *фиксни услови*, (изузев случај уметања) или другим речима, не претпоставља се да у мрежи постоје већ познате и израчунате тачке, на чијој се основи помоћу спољних и унутрашњих праваца одређује изолирана тачка.

У пуном облику постављен је и решен проблем од стране *инж. Н. Свечникова*, за триангулационе тачке нижих редова у чланку, увршћеном у бр. 1 — 1938 г. руског часописа „Земљомерноје Дјело"*).

Начин, који је предложен од стране *инж. Н. Свечникова*, базира на следећим принципима:

1) ... да се изједначење врши на основу условних мерења;

2) ... да се за величине, које се изједначују, узимају углови, а не правци — нити приближне координате;

3) ... да се изједначење изводи у две етапе: у првој се задовољавају услови фиксних углова, фигура и хоризонта, а у другој — полусни услов.

Обрасци разрађени на овим основима смештају се у једноставне формуларе, где се угловне поправке рачунају са тачношћу до десетих делова секунде. Према рачунању у формулару бр. 10 постизава се уштеда у рачунском раду од 25% до 40%: пример, који је наведен у чланку, за изједначење изолиране тачке са три спољна и три унутрашња правца, у формулару бр. 10 тражи 310 рачунских операција, док у формулару г. Свечникова изједначене координате тачке добивају се из свега 176 рачунских операција.

Од стране инж. Свечникова предложени начин веома је погодан за изједначење тачака нижих редова, где се можемо задовољити угловним поправкама са тачношћу до десетих делова секунде, а заокруживање се изводи до секунде, али он не може задовољити услове за изједначење изолираних тачака виших редова, као што су тачке 2-ог и 3-ег реда, где се угловне поправке траже са тачношћу до хиљадитих, односно стотинитих

*) *Инж. Ник. Свечников.* Један од упрошћених начина изједначења триангулационих тачака нижих редова. „Земљомерноје Дјело" 1938 бр. 1 стр. 1—9.

делова секунде (заокруживање се врши до стотинитих, односно десетих делова секунде), што захтева заједничко решење у једној етапи свију условних једначина, како угловних, тако и полусних.

Тригонометриски образац бр. 33, који је прописан постојећим катастарским правилником за рачунање изолованих тачака виших редова, много је компликованији него ли форм. бр. 9 и 10 и његово упрошћавање нарочито је пожељно.

У овом се чланку предлаже решење постављеног проблема на основи начина *неодређеног решења* нормалних једначина*), који се састоји у томе да се непознате нормалних једначина (поправке или корелате) изражавају у облику функција слободних чланова једначина (отступања посредних односно условних опажања).

Ако означимо слободне чланове нормалних једначина са, —

$$(1) \quad w_1,\ w_2,\ \ldots.\ w_n$$

а корелате, при изравнавању условних опажања, са

$$(2) \quad k_1,\ k_2,\ \ldots.\ k_n$$

онда се у резултату неодређеног решења нормалних једначина добијају за корелате (2) изрази следећег облика:

$$(3) \quad \begin{aligned} k_1 &= f_{1\cdot1}\ w_1 + f_{1\cdot2}\ w_2 + \ldots + f_{1\cdot n}\ w_n \\ k_2 &= f_{2\cdot1}\ w_1 + f_{2\cdot2}\ w_2 + \ldots + f_{2\cdot n}\ w_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n &= f_{n.1}\ w_1 + f_{n.2}\ w_2 + \ldots + f_{n.n}\ w_n \end{aligned}$$

где су, —

$$(4) \quad \begin{matrix} f_{1\cdot1}, & f_{1\cdot2}, & \ldots & f_{1\cdot n} \\ f_{2\cdot1}, & f_{2\cdot2}, & \ldots & f_{2\cdot n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n\,1}, & f_{n,2}, & \ldots & f_{n.n} \end{matrix}$$

неке константне величине — коефицијенти, чија вредност и својства зависе од вредности и својстава коефицијената нормалних једначина.

Од важнијих својстава величина (4) помињемо следећа:

a) Коефицијенти

$$(5) \quad f_{1\cdot1}, \quad f_{2\cdot2}, \quad \ldots \quad f_{n.n}$$

при слободним члановима, који одговарају корелати, се зову *квадратичним,* увек су негативни и у већини једначина (3) већи по апсолутној вредности од осталих коефицијената.

---

*) *Jordans* Handbuch der Vermessungskunde. Erster Band Stuttgart 1920; стр. 94.

$$
(6) \qquad \begin{array}{ccccc}
\cdot & f_{1\cdot 2}\,, & f_{1\cdot 3}\,, & \dots & f_{1\cdot n} \\
f_{2\cdot 1}; & \cdot\,, & f_{2\cdot 3}, & \dots & f_{2\cdot n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
f_{n.1}; & f_{n.2}\,, & f_{n.3}, & \dots & \cdot
\end{array}
$$

који се зову *неквадратичним*.

b) Како је познато коефицијенти нормалних једначина, који су распоређени симетрично према диагонали квадратичних главних чланова једначина, једнаки; истим својством располажу неквадратични коефицијенти (6), који су распоређени симетрично према диагонали где стоје квадратични коефицијенти (5).

Ово својство се изражава једначином, —

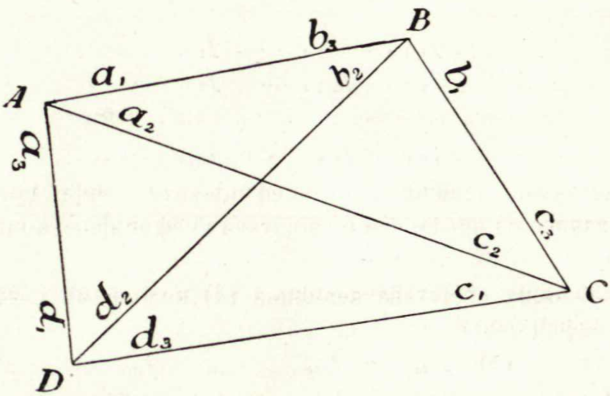
$$(7) \qquad f_{m.k} = f_{k.m}$$

где

$$(7^*) \qquad m \neq k.$$

c) Кад коефицијенти условних једначина имају константне вредности независне од угловних вредности, онда и коефицијенти одговарајућих нормалних једначина имају константне вредности.

Неодређено решење групе нормалних једначина корелата са коефициентима константне вредности даје изразима за корелате (3) сталан облик, — њихови коефицијенти (4) ће имати сталну, непромењиву вредност.



Тако, например, неодређено решење групе угловних условних једначина геодетског четвороугаоника (сл. 1), које су следеће*),

*) Са a_1. a_2, a_3, b_1, b_2, b_2 ... су означени опажани правци, а са (a_1), (a_2) ... њихове поправке.

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
&\text{за } \triangle ABC \ldots (a_2)-(a_1)+(b_3)-(b_1)+(c_3)-(c_2)+w_1=o\\
&\text{„ } \triangle ABD \ldots (a_3)-(a_1)+(b_3)-(b_2)+(d_2)-(d_1)+w_2=o\\
&\text{„ } \triangle BCD \ldots (b_2)-(b_1)+(c_3)-(c_1)+(d_3)-(d_2)+w_3=o
\end{aligned}
$$

и којима одговара систем од 3 нормалних једначина корелата, —

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
6k_1 + 2k_2 + 2k_3 + w_1 &= o;\\
2k_1 + 6k_2 - 2k_3 + w_2 &= o;\\
2k_1 - 2k_2 + 6k_3 + w_3 &= o;
\end{aligned}
$$

даје за корелате, — k_1, k_2, k_3 следеће изразе:

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
k_1 &= 0{,}250\ w_1 + 0{,}125\ w_2 + 0{,}125\ w_3\\
k_2 &= 0{,}125\ w_1 - 0{,}250\ w_2 - 0{,}125\ w_3\\
k_3 &= 0{,}125\ w_1 - 0{,}125\ w_2 - 0{,}250\ w_3
\end{aligned}
$$

На основу овог последњег својства неодређеног решења нормалних једначина групе условних једначина, које имају коефицијенте константне вредности и одговарајуће им групе нормалних једначина корелата могу да буду решене један пут за свагда и корелатне вредности могу се израчунати из израза (3) према стварним вредностима слободних чланова (1).

H. Boltz, који је разрадио основе теорије неодређеног решења нормалних једначина, први је саставио таблице коефицијената (4), који одговарају простом ланцу троуглова или затвореном венцу троуглова при произвољном њиховом броју*).

У истом свом раду *H. Boltz* је показао следеће: кад постоји неодређено решење неке изоловане групе условних и одговарајућих им нормалних једначина корелата (3) оно може да буде трансформирано, путем веома једноставних рачунских операција, у неодређено решење нове групе условних и нормалних једначина, где улазе поред прве групе једначина, којих решење је познато, још једна или цела група нових условних једначина.

За наша даља разлагања је важно разјаснити трансформацију обрасца (3) у случају додавања ка првој групи условних и нормалних једначина корелата само једне нове једначине.

Нека условне једначине и нормалне једначине корелата, којим одговара решење (3), имају облик,

а) *за условне једначине*, чији број је n са m поправака:

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m + w_1 &= o,\\
b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_m v_m + w_2 &= o,\\
\vdots\qquad & \\
n_1 v_1 + n_2 v_2 + \ldots + n_m v_m + w_n &= o,
\end{aligned}
$$

где је $$m > n$$

*) *H. Boltz*. Entwickelungs-Verfahren zum Ausgleichen geodätischen Netze nach der Methode der kleinesten Quadrate. Berlin 1923

b) *За нормалне једначине кореалата*:

$$\begin{aligned} &(aa)\,k_1 + (ab)\,k_2 + \dots + (an)\,k_n + w_1 = o,\\ (12)\quad &(ba)\,k_1 + (bb)\,k_2 + \dots + (bn)\,k_n + w_2 = o,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &(na)\,k_1 + (nb)\,k_2 + \dots + (nn)\,k_n + w_n = o. \end{aligned}$$

Ка овој групи једначина се додаје једна нова условна једначина;

(13) $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m + w_{\mathrm{I}} = o,$$

којој одговара нова корелата k_{I}.

Корелатна једначина, која ће се додати групи (12) има облик:

(14) $$(\alpha a)\,k_1 + (\alpha b)\,k_2 + \dots + (\alpha n)\,k_n + (a\alpha)\,k_{\mathrm{I}} + w_{\mathrm{I}} = o$$

При додавању једначине (13) ка условним једначинама (11) промениће се група нормалних једначина (12) тиме да ће се поред нове нормалне једначине (14) која ће ући у групу, у сваку од осталих једначина (12) додати по један нови члан са корелатом k_{I} и то

(15)
у прву једначину — члан $+ (a\alpha)\,k_{\mathrm{I}}$,
у другу једначину — члан $+ (b\alpha)\,k_{\mathrm{I}}$,
. . . .
у n-ту једначину — члан $+ (n\alpha)\,k_{\mathrm{I}}$.

Пошто је разумљиво да ће се корелатне вредности (3) за прву групу нормалних једначина (12) променити, кад њих израчунамо из нове групе трансформираних нормалних једначина (15) са додатом једначином (14).

Означимо промењене вредности корелата (3) са ,—

(16) $$k'_1,\ k'_2,\ \dots\ k'_n$$

а величине одговарајућих промена корелатне вредности (3) са,

(16*) $$\Delta k_1,\ \Delta k_2,\ \dots\ \Delta k_n$$

онда ће између величина (3), (16) и (16*) постојати следећа веза,

$$\begin{aligned} &k'_1 = k_1 + \Delta k_1;\\ (17)\quad &k'_2 = k_2 + \Delta k_2;\\ &\dots\dots\\ &k'_n = k_n + \Delta k_n; \end{aligned}$$

За решење постављеног проблема довољно је да нађемо поред вредности нове корелате k_{I} још и корелатне промене (16*) прве групе.

То постижемо помоћу т. зв. *помоћних корелата*,

(18) $$\rho_1,\ \rho_2,\ \dots\ \rho_n,$$

које се рачунају из образаца:

$$
(19) \quad \begin{aligned}
\rho_1 &= f_{1\cdot 1}\,(a\alpha) + f_{1\cdot 2}\,(b\alpha) + \ldots + f_{1n}\,(n\alpha);\\
\rho_2 &= f_{2\cdot 1}\,(a\alpha) + f_{2\cdot 2}\,(b\alpha) + \ldots + f_{2n}\,(n\alpha);\\
&\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \ldots \quad\quad \cdot\\
\rho_n &= f_{n.1}\,(a\alpha) + f_{n.2}\,(b\alpha) + \ldots + f_{n.n}\,(n\alpha).
\end{aligned}
$$

Њихов састав је веома једноставан: свака помоћна корелата ρ_m формира се као збир парних производа коефицијената нове нормалне једначине (14):

$$(20) \qquad (a\alpha);\ (b\alpha);\ \ldots\ (n\alpha)$$

на одговарајуће коефицијенте оног корелатног израза из групе (3), на који се односи помоћна корелата:

$$(21) \qquad f_{m.1},\quad f_{m.2},\ \ldots\quad f_{m.n}.$$

Из упоређења образаца (19) са таблицом коефицијената (4) се види, да се формирање помоћних корелата своди на множење сваког ступца (или реда, пошто су редови и једноимени ступци идентични) таблице (4) на одговарајући њему по бројном реду коефицијент нове нормалне једначине (20) и на сабирање добивених производа по редовима. За ову рачунску операцију може служити следећи формулар.

Формулар бр. 2.

(1)	(2)	(3)			(n)	(n+1)
	$(a\alpha)$	$(b\alpha)$	.	.	$(n\alpha)$	ρ_k
1 ...	$f_{1.1}\ (a\alpha)$	$f_{1.2}\ (b\alpha)$	.	.	$f_{1.n}\ (n\alpha)$	ρ_1
2 ...	$f_{2.1}\ (a\alpha)$	$f_{2.2}\ (b\alpha)$	.	.	$f_{2.n}\ (n\alpha)$	ρ_2
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
n ...	$f_{n.1}\ (a\alpha)$	$f_{n.2}\ (b\alpha)$	.	.	$f_{n.n}\ (n\alpha)$	ρ_n
s ...	$[f_{k.1}\ (a\alpha)]$	$[f_{k.2}\ (b\alpha)]$	.	.	$[f_{k.n}\ (n\alpha)]$	$\Sigma\,\rho$
p ...	$(a\alpha)\ \Sigma\ f_{k\,1}$	$(b\alpha)\ \Sigma\, f_{k.2}$	.	.	$(n\alpha)\ \mathbf{\Sigma}\ f_{k.n}$	$\Sigma\,[f_{k.r}\,(r\alpha)]$

У ступцу 1 формулара се бележи број оног реда коефицијената из таблице (4) који служи за формирање величина одговарајућег реда формулара бр. 2.

На челу сваког ступца означеног бројем од *2* до *n* стоји вредност коефицијента нове нормалне једначине (14) на коју се множи вредности коефицијената из ступца таблице (4).

Вредности ових производа се уписују у један од стубаца формулара бр. 2.

Ради контроле правилности множења у сваком ступцу формулара бр. 2 збир израчунатих вредности се упоређује са производом величине која је стављена на чело ступца на збир вредности истоименог ступца у таблици (4), према формули:

$$(22)\qquad f_{1.m}\,(m\alpha) + f_{2.m}\,(m\alpha) + \dots + f_{n.m}\,(m\alpha) = \\ = (m\alpha)\,[f_{1.m} + f_{2.m} + \dots + f_{n.m}],$$

где је

$$(22^*)\qquad f_{1.m}\,(m\alpha) + f_{2.m}\,(m\alpha) + \dots + f_{n.m}\,(m\alpha) = s \\ (m\alpha)\,[f_{1.m} + f_{2.m} + \dots + f_{n.m}] = p.$$

Збир производа, који стоје у једном те истом реду, даје вредност помоћне корелате; ове вредности се уписују у $(n+1)$ и стубац, означен са ρ_k.

Правилност сабирања у редовима. односно правилност израчунатих вредности помоћних корелата, контролише се упоређивањем збира вредности у ступцу ρ_k, односно у $(n+1)$-ом ступцу, са збиром вредности, које стоје у реду означеном у првом ступцу са s. Ова контрола се оснива на једначини:

$$(23)\qquad \Sigma\rho_k = \Sigma\,[f_{k.r}\,(r\alpha)]$$

Кад су вредности помоћних корелата израчунате, онда се рачуна величине A и W из формула:

$$(24)\qquad A = (\alpha\alpha) + (a\alpha)\,\rho_1 + (b\alpha)\,\rho_2 + \dots + (n\alpha)\,n$$

$$(24^*)\qquad W = w_1 + (a\alpha)\,k_1 + (b\alpha)\,k_2 + \dots + (n\alpha)\,k_n.$$

а са њиховом помоћу вредност нове корелате k_{I}.

$$(25)\qquad k_{\mathrm{I}} = -\frac{W}{A}$$

После тога се рачунају корелатне промене (16*) из образаца:

$$(26)\qquad \begin{aligned} \Delta k_1 &= \rho_1 .\ k_{\mathrm{I}}. \\ \Delta k_2 &= \rho_2 .\ k_{\mathrm{I}}. \\ &\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \Delta k_n &= \rho_n .\ k_{\mathrm{I}}. \end{aligned}$$

после чега ће све тражене вредности корелата (17) бити познате.

Рачунање величина (24), (24*) и (26), које се састоји од множења двеју величина и збира добивених производа, веома је једноставно и изводи се у једноликим формуларима као што се може видети из примера који следе.

При изједначењу и рачунању изолованих триангулационих тачака, односно при изједначењу централног система са фиксним тачкама по начину неодређеног решења условних једначина проблем се састоји у овоме: прво — да се изразе фиксни услови у облику само угловних услова, друго — да се израчунају таблице коефицијената (4) за неодређено решење групе угловних услова у свим случајевима праксе при одређивању изолованих трихангулационих тачака и треће — да се израде за праксу погодни рачунски формулари.

Кад је то извршено ток самог рачунања је следећи:

а) ... формирати једначину полусног (односно полусних) услова, његов слободан члан (величину отступања) и одговарајућу корелатну нормалну једначину, која се односи на целокупан број условних једначина, — угловних и полусног (полусних);

б) ... рачунати отступања, односно слободне чланове (1) за све угловне услове;

в) ... изабрати ону таблицу коефицијената (4), која одговара фактичком случају опажања изоловане тачке;

г) ... на основу изабрате таблице (4) рачунати из образаца (3) вредности корелата за групу угловних услова;

д) ... помоћу исте таблице (4) рачунају се према обрасцу (19) вредности помоћних корелата у формулару бр. 2;

ђ) ... из вредности помоћних корелата (19) и корелата прве групе једначина (3) рачуна се из образаца (24), (24*) и (25) величина корелате полусног услова k_l

е) ... са вредношћу корелате k_l се рачунају промене корелата прве групе из формулара (26);

ж) ... најзад, са израчунатим вредностима промена корелата (26) долази се помоћу формуле (17) до дефинитивних вредности корелата прве групе.

Даља рачунања не излазе из оквира уобичајених при изједначењу триангулације, и то:

1) рачунање из образаца:

$$
(27) \quad
\begin{aligned}
v_1 &= a_1\, k_1 + b_1\, k_2 + \ldots + n_1\, k_n + \alpha_1\, k_l\,; \\
v_2 &= a_2\, k_2 + b_2\, k_2 + \ldots + n_2\, k_n + \alpha_2\, k_l\,; \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
v_m &= a_m\, k_1 + b_m\, k_2 + \ldots + n_m\, k_n + \alpha_m\, k_l\,;
\end{aligned}
$$

поправака праваца, који улазе у изједначење.

2) ... рачунање најмање два одстојања изоловане, тражене тачке од две или више (ради контроле) фиксних тачака;

3) ... рачунање нагиба (односно сферног азимута) оних праваца са фиксних на тражену тачку, где се рачунало отстојање;

4) ... рачунање, најмање, два пута, координатних разлика од две фиксне на тражену тачку и помоћу њих координата тражене тачке.

Практичну примену наведеног начина изједначења објаснићемо у идућем броју.

(Завршетак у идућем броју)