B. Živančević, k. geometar
Đ. Berković, civilni geometar

TRANSFORMACIJA KOORDINATA

(Prostim afinim jednačinama)

U geometarskom i geodetskom glasniku u sv. 3 od 1937 god. objavljen je članak „Transformacija koordinata baricentričnim kalkilom". U uvodu pomenutog članka, iznete su kao jedan način transformacije (približne — umetanje) i afine jednačine:

1) $\eta_1 = A_1 y_1 + B_1 x_1 + C_1$ 4) $\xi_1 = A_2 y_1 + B_2 x_1 + C_2$

2) $\eta_2 = A_1 y_2 + B_1 x_2 + C_1$ 5) $\xi_2 = A_2 y_2 + B_2 x_2 + C_2$

3) $\eta_3 = A_1 y_3 + B_1 x_3 + C_1$ 6) $\xi_3 = A_2 y_3 + B_2 x_3 + C_2$

U ovim jednačinama koje prestavljaju opštu formu analitičkih jednačina pravih; yn, xn i ηn, ξn jesu koordinate iste tačke u obadva sistema; A_1, B_1 i A_2, B_2 jesu faktori, a C_1 i C_2 jesu aditativne konstante. U članku o baricentričnom kalkilu, nije se ovaj način dalje obrađivao, već je samo uzgred pomenut, dok je ovom članku cilj da se podrobno pozabavi praktičnom primenom gornjih jednačina. Pri tom, izneće se dokaz, da se pretvaranjem ovih jednačina dolazi do osnovnih jednačina baricentričnog kalkila, kao i to da je rezultat postignut jednim ili drugim načinom apsolutno identičan.

Kod ove transformacije uslov je da su poznate koordinate triju tačaka i to u obadva sistema (y_1, x_1; y_2 x_2; y_3 x_3 i η_1 ξ_1; η_2 ξ_2; η_3 ξ_3), a faktori A_1, B_1 i A_2, B_2 kao i konstante C_1, C_2 kao nepoznate imaju se dobiti rešavanjem gornjih jednačina.

Prvo se određuju faktori A_1, B_1 i A_2, B_2 na taj način, što će se od jednačina 2) i 3) oduzeti jednačina 1), te se dobije:

$$\eta_2 - \eta_1 = A_1 (y_2 - y_1) + B_1 (x_2 - x_1)$$
$$\eta_3 - \eta_1 = A_1 (y_3 - y_1) + B_1 (x_3 - x_1)$$

Iz ove dve jednačine određuju se faktori A_1 i B_1, naizmeničnim eliminisanjem nepoznate B_1 i A_1:

1) Za određivanje faktora A_1 treba gornju jednačinu množiti sa $(x_3 - x_1)$, a donju jednačinu sa $(x_2 - x_1)$ te se dobije:

$$(\eta_2-\eta_1)(x_3-x_1) = A_1 (y_2-y_1)(x_3-x_1) + B_1 (x_2-x_1)(x_3-x_1)$$
$$(\eta_3-\eta_1)(x_2-x_1) = A_1 (y_3-y_1)(x_2-x_1) + B_1 (x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

Oduzimanjem donje jednačine od gornje dobija se:

$$A_1 = \frac{(\eta_2-\eta_1)(x_3-x_1) - (\eta_3-\eta_1)(x_2-x_1)}{(y_2-y_1)(x_3-x_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{\eta_2 x_3 - \eta_1 x_3 - \eta_2 x_1 - \eta_3 x_2 + \eta_1 x_2 + \eta_3 x_1}{y_2 x_3 - y_1 x_3 - y_2 x_1 - y_3 x_2 + y_1 x_2 + y_3 x_1}$$

Sređivanjem brojitelja i imenitelja po x dobijemo:

$$A_1 = \frac{x_1(\eta_3 - \eta_2) + x_2(\eta_1 - \eta_3) + x_3(\eta_2 - \eta_1)}{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)} = \frac{2\,P_1}{2\,P_0}$$

2) Istim načinom rada, samo drugim redosledom (ciklusom) dobija se:

$$B_1 = \frac{y_1(\eta_3 \quad \eta_2) + y_2(\eta_1 - \eta_3) + y_3(\eta_2 - \eta_1)}{y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)} = \frac{2\,P_2}{2\,P_0}$$

$$A_2 = \frac{x_1(\xi_3 - \xi_2) + x_2(\xi_1 - \xi_3) + x_3(\xi_2 - \xi_1)}{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)} = \frac{2\,P_3}{2P_0}$$

$$B_2 = \frac{y_1(\xi_3 - \xi_2) + y_2(\xi_1 - \xi_3) + y_3(\xi_2 - \xi_1)}{y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)} = \frac{2\,P_4}{2\,P_0}$$

Kao što se vidi, imenitelj kod gornjih rezultata, prestavlja dvogubu površinu osnovnog trougla i to u jednoj projekciji, analogno osnovnom trouglu pri računanju težina kod baricentričnog kalkila po obrascima:

$$p_1 = \frac{\triangle\, T_0\, T_2\, T_3}{\triangle\, T_1\, T_2\, T_3}; \; P_2 = \frac{\triangle\, T_0\, T_3\, T_1}{\triangle\, T_1\, T_2\, T_3}; \; P_3 = \frac{\triangle\, T_0\, T_1\, T_2}{\triangle\, T_1\, T_2\, T_3}$$

Brojitelji gornjih iednačiua prestavljaju dvogube površine trouglova za čija su temena uzete naizmenično koordinate jednog i drugog sistema.

Kod računanja gornjih površina treba naročitu pažnju posvetiti predznacima, koji rezultiraju mašinskim računanjem t. j. vrlo je važno, dali se rezultat pojavljuje kao pozitivni broj ili njegova dopuna. Jasno je, da se pri računanju površine pojedinih trouglova uvek zadržava isti redosled koordinata i koordinatnih razlika.

Aditativne konstante C_1 i C_2 dobijaju se rešavanjem početnih jednačina 1) do 6), u koje će uvršćuju numeričke vrednosti dobijenih faktora A_1, B_1 i A_2, B_2. Rezultati za C_1 i C_2 dobijaju se prema tome trogubo i moraju imati istu vrednost.

Vrednosti koordinata (η_n ξ_n) jedne tačke koja je data samo u jednom sistemu koordinatama (y_n x_n) transformišu se po obrascima:

$$\eta_n = A_1\, x_n + B_1\, y_n + C_1 \quad \text{i}$$
$$\xi_n = A_2\, x_n + B_2\, y_n + C_2$$

Za praktičnu primenu ove transformacije svrstali smo gornje računske operacije u sledeći obrazac, u kome iznosimo i jedan praktičan primer, i to isti koji je bio obrađen u pomenutom članku o transformaciji koordinata baricentričnim kalkilom.

Трансформација координата

Рачунање фактора A_1, A_2, B_1 и B_2

$$A_1 = \frac{x_1(\eta_3-\eta_2) + x_2(\eta_1-\eta_3) + x_3(\eta_2-\eta_1)}{x_1(y_3-y_2) + x_2(y_1-y_3) + x_3(\eta_2-\eta_1)} = \frac{P_1}{P_0} \qquad B_1 = \frac{y_1(\eta_3-\eta_2) + y_2(\eta_1-\eta_3) + y_3(\eta_2-\eta_1)}{y_1(x_3-x_2) + y_2(x_1-x_3) + y_3(x_2-x_1)} = \frac{P_2}{P_0}$$

$$A_2 = \frac{x_1(\xi_3-\xi_2) + x_2(\xi_1-\xi_3) + x_3(\xi_2-\xi_1)}{x_1(y_3-y_2) + x_2(y_1-y_3) + x_3(y_2-y_1)} = \frac{P_3}{P_0} \qquad B_2 = \frac{y_1(\xi_3-\xi_2) + y_2(\xi_1-\xi_3) + y_3(\xi_2-\xi_1)}{y_1(x_3-x_2) + y_2(x_1-x_3) + y_3(x_2-x_1)} = \frac{P_4}{P_0}$$

Тачка T_n	Систем: Ивањик		Систем: државни (Гаус-Кригер)	
	y_n	x_n	η_n	ξ_n
T_1 △ Црвени Гот	− 136478,54	+ 31641,68	7399105,40	5001517,68
T_2 △ клачине	− 138512,44	+ 33686,86	7402735,60	4997426,10
T_3 △ Бешеново ледине	− 136128,56	+ 36264,96	7397945,03	4992802,91
	R: 136000,00	R: 31000,00	R: 7397000,00	R: 4992000,00
	y_n red	x_n red	η_n red	ξ_n red
T_1 △ Црвени Гот	− 478,54	+ 641,68	2105,40	9517,68
T_2 △ клачине	− 2512,44	+ 2686,86	5735,60	5426,10
T_3 △ Бешеново ледине	− 128,56	+ 5264,96	945,03	802,91
T_1	− 478,54	+ 641,68	2105,40	9517,68

x	89880938,7	x	19156596,6	x	1089579,1	x	8906753,3	x	19156941,9
P_0	10119061,3	P_1	80843403,4	P_2	8910420,9	P_3	1093246,7	P_4	80843058,1

$A_1 = \frac{P_1}{P_0} = -1,893113$	$A_2 = \frac{P_3}{P_0} = +0,108038$	$B_1 = \frac{P_2}{P_0} = -0,107675$	$B_2 = \frac{P_4}{P_0} = -1,893147$

Рачунање константи C_1 и C_2

$C_1 = \eta_1 - A_1 \cdot y_1 - B_1 x_1$	η_1	+ 2105,40	3	η_2	+ 5735,60	8	η_3	+ 945,03	3
$= \eta_2 - A_1 y_2 - B_1 x_2$	$-A_1 y_1$	− 905,93	8	$-A_1 y_2$	− 4756,33	1	$-A_1 y_3$	− 243,38	2
$= \eta_3 - A_1 y_3 - B_1 x_3$	$-B_1 x_1$	+ 69,09	6	$-B_1 x_2$	+ 289,31	5	$-B_1 x_3$	+ 566,91	0
	C_1	+ 1268,56	1	C_1	+ 1268,58	3	C_1	+ 1268,56	1
$C_2 = \xi_1 - A_2 y_1 - B_2 x_1$	ξ_1	+ 9517,68	0	ξ_2	+ 5426,10	0	ξ_3	+ 802,91	2
$= \xi_2 - A_2 y_2 - B_2 x_2$	$-A_2 y_1$	+ 51,70	4	$-A_2 y_2$	+ 271,44	0	$-A_2 y_3$	+ 13,89	3
$= \xi_3 - A_2 y_3 - B_2 x_3$	$-B_2 x_1$	+ 1214,80	7	$-B_2 x_2$	+ 5086,63	1	$-B_2 x_3$	+ 9967,36	4
	C_2	+ 10784,18	2	C_2	+ 10784,17	1	C_2	+ 10784,16	0

ПРИМЕДБА:

афиним једначинама

Трансформација координата: $\eta_n = A_1 y_n + B_1 x_n + C_1$; $\xi = A_2 y_n + B_2 x_n + C_2$

Систем: Иванић				Систем: државни					
Тачка: $\hat{\text{O}}$ 202				C_1	+ 1268.56	1	C_2	+ 10784.17	1
y	− 137171,35	x	+ 33105.53	$A_1 y_n$	+ 2217.50	8	$A_2 y_n$	− 126.55	1
y_{red}	− 1171,35	x_{red}	+ 2105,53	$B_1 x_n$	− 226.71	0	$B_2 x_n$	− 3986,08	7
				η_{red}	+ 3259,35	0	ξ_{red}	+ 6671,54	2
				η			ξ		
Тачка:				C_1			C_2		
y		x		$A_1 y_n$			$A_2 y_n$		
y_{red}		x_{red}		$B_1 x_n$			$B_2 x_n$		
				η_{red}			ξ_{red}		
				η			ξ		
Тачка:				C_1			C_2		
y		x		$A_1 y_n$			$A_2 y_n$		
y_{red}		x_{red}		$B_1 x_n$			$B_2 x_n$		
				η_{red}			ξ_{red}		
				η			ξ		
Тачка:				C_1			C_2		
y		x		$A_1 y_n$			$A_2 y_n$		
y_{red}		x_{red}		$B_1 x_n$			$B_2 x_n$		
				η_{red}			ξ_{red}		
				η			ξ		
Тачка:				C_1			C_2		
y		x		$A_1 y_n$			$A_2 y_n$		
y_{red}		x_{red}		$B_1 x_n$			$B_2 x_n$		
				η_{red}			ξ_{red}		
				η			ξ		

ПРИМЕДБА:

Pre računanja površina trouglova (Elingovom metodom) koordinantne vrednosti redukuju se za najveći mogući iznos, a da se predznak koordinatnih vrednosti ne menja. Vrednosti redukcija za η_n i ξ_n dodaju se sa odgovarajućim predznacima dobivenim redukovanim koordinatama η_n red i ξ_n red.

Dobijeni rezultati transformacijom pomoću afinih jednačina, podudaraju se potpuno sa rezultatima dobijenim transformacijom pomoću baricentričkog kalkila. (Vidi rezultate za kovrdinate trig. tačke 202, koja je transformisana na obadva načina u pomenutom članku o baricentričnom kalkilu).

U uvodu ovoga članka, napomenuto je da se pretvaranjem afinih jednačina dolazi do osnovnih jednačina baricentričkog kalkila. Ovaj dokaz jednostavan je, ali zahteva jako opsežne algebarske operacije koje ovde izostavljamo. Do željenog rezultata dolazi se na taj način, što se aditativne konstante C_1 i C_2 (za koje su u prednjem primeru sračunate samo numeričke vrednosti) iz osnovnih afinih jednačina algebarski računaju i dobija se:

$$C_1 = \frac{y_1 (x_2 \eta_3 - x_3 \eta_2) + y_2 (x_3 \eta_1 - x_1 \eta_3) + y_3 (x_1 \eta_2 - x_2 \eta_1)}{y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_1)}$$

a za

$$C_2 = \frac{y_1 (x_2 \xi_3 - x_3 \xi_2) + y_2 (x_3 \xi_1 - x_1 \xi_3) + y_3 (x_1 \xi_3 - x_2 \xi_1)}{y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_1)}$$

Uvršćujući algebarske izraze za A_1, B_1 i C_1 u osnovnu jednačinu

$$\eta_n = A_1 x_n + B_1 y_n + C_1$$

(Usled velike obsežnosti kod substitucije ova operacija se ovde izostavlja).

dobija se:

$$\eta_n = \eta_1 \frac{y_0 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_0) + y_3 (x_0 - x_2)}{y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_1)} +$$

$$+ \eta_2 \frac{y_1 (x_0 - x_3) + y_0 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_0)}{y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_2 (x_2 - x_1)} +$$

$$+ \eta_3 \frac{y_1 (x_2 - x_0) + y_2 (x_0 - x_1) + y_0 (x_1 - x_2)}{y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_1)}$$

η_n odgovara kod baricentričnog kalkila . . . . . y'_0

η_1 „ „ „ „ . . . . y'_1

η_2 „ „ „ „ . . . . . . y'_2

η_3 „ „ „ „ . . . . . . y'_3

Razlomci gornjeg rezultata u istom redosledu odgovaraju težinama P_1, P_2 i P_3,

Substitucija koja je izvršena u jednačini za ordinatu η_n, ima da se izvrši i kod jednačine za apscisu ξ_n, da bi se konstatovala indentičnost sa osnovnim jednačinama transformacije baricentričnim kalkilom.

I kod ovoga načina transformisanja (afinim jednačinama) kao i kod transformacije (baricentričnim kalkilom) koordinate se mogu bez daljeg upotrebiti sa njihovim datim vrednostima, bez obzira, da li su izražene u metrima ili hvatima ili nekoj drugoj meri.

Osim nedostataka, koji su svojstveni svima transformacijama umetanjem, ova transformacija, kao i transformacija pomoću baricentričkog kalkila deformiše uglove i dužine strana srazmerno menja. Prema tome, jedan pravougli sistem transformisan ovim metodama u transformisanom obliku nije više strogo pravougli — za razliku od konformne transformacije, koja verno prenaša uglove.

S obzirom na to da se u praksi transformacije umetanjem vrše samo na manjem ograničenom prostoru, a i na to da se rezultati dobiveni transformacijom neuzimaju kao osnova obimnih i osnovnih radova, ove metode transformacije zadovoljavaju tačnost, koja se traži kod podređenijis radova.

Kada ćemo vršiti transformaciju baricentričnim kalkilom, a kada afinim jednačinama — pošto se dobijaju i jednom i drugom metodom isti rezultat — to odlučuje samo broj tačaka koje se imaju da transformišu u okviru jednog istog trougla.

Prema broju računskih operacija i prema njihovoj složenosti izlazi da je transformacija pomoću baricentričnog kalkila ekonomičnija samo za transformaciju jedne tačke, dok dve i više tačaka (na temelju istog osnovnog trougla) treba svakako transformisati afinim jednačinama.