Год. 18 Нови Сад — мај и јуни 1937 Св. 3

ГЕОМЕТАРСКИ И ГЕОДЕТСКИ ГЛАСНИК
Орган Удружења Геометара и Геодета Краљевине Југославије
БЕОГРАД, Адмирала Гепрата 68

СТРУЧНИ ДЕО

Б. Живанчевић, кат. геометар
Ђ. Берковић, цивилни геометар

ТРАНСФОРМАЦИЈА КООРДИНАТА БАРИЦЕНТРИЧНИМ КАЛКИЛОМ

За извођење катастарског премера у нашој Краљевини, усвојена је Гаус-Кригерова пројекција. Поред ове пројекције v разним деловима наше државе налазе се још разни координатни системи у разним пројекцијама, а има их и без пројекција.

У крајевима где су премери старога порекла, њихови координатни системи и пројекције имаће своју намењену улогу све док се не изврши обнова премера, тј. док и то подручје не буде покривено тригонометријском мрежом у државној пројекцији. Према томе, у крајевима где се додирују два разна координатна система, или где се преклапају, врло је честа потреба — при разноврсним геодетским радовима — да се координате тачака једнога система прерачунају у други.

За ова прерачунавања постоји више начина, али се у главном деле у две групе, и то: прерачунавање (трансформација) по строгој методи и прерачунавање по приближној методи (уметање).*

Строга метода, примењива је само, у случају када су почетне тачке разних координатних система у међусобној

* Постоји још једна могућност строгог прерачунавања појединих тачака: ако нам нису на располагању податци опажања исте можемо заменути срачунатим правцима из координата тачака онога система, из кога желимо прећи у други систем. Помоћу тих срачунатих праваца, које можемо по потреби и ређуковати, сходно законима полазне пројекције, и поправити по начелима друге пројекције, координате тачке могу се одредити вишеструким пресецањем у назад и изравнати по методи најмањих квадрата.

прецизној геодетско-астрономској вези, те се прерачунавање може вршити преко географских координата. Таква рачунања данас скоро искључиво врши само Одељење катастра, а у обичној геодетској пракси ова метода једва се примењује. Међутим, код радова мањег обима врло је честа потреба, да се известан број тачака трансформира из једнога у други систем. Оваква трансформација може се извршити методом уметања, а може се обављати и без познавања пројекционих једначина дотичних система. Обзиром на тачност, која се може постићи, овај начин прерачунавања може се употребити код тачака подређенијег значаја (тачака нижег реда).

Од великог низа приближних метода, наводимо само две које су најчешће у примени.

1. Начин трансформације предвиђен катастарским правилником I део у обрасцу 24, и то помоћу две тачке, чије су координате познате у обадва система. Пошто је овај начин заснован на двема познатим тачкама, врло је прикладан за трансформацију координата полигоних тачака које се између њих умећу. Ако желимо постићи већу тачност, можемо факторе рачунати из више пари индентечних тачака и добијене вредности изравнати по методи најмањих квадрата и ту методу применити за трансформацију тригонометријских тачака нижих редова.

2. Можемо за трансформацију употребити једначине врло простог облика. Н. пр.:

$$y_1 = A_1\,\eta_1 + B_1\,\xi_1 + C_1 \qquad x_1 = A_2\,\eta_1 + B_2\,\xi_1 + C_2$$
$$y_2 = A_1\,\eta_2 + B_1\,\xi_2 + C_1 \qquad x_2 = A_2\,\eta_2 + B_2\,\xi_2 + C_2$$
$$y_3 = A_1\,\eta_3 + B_1\,\xi_3 + C_1 \qquad x_3 = A_2\,\eta_3 + B_2\,\xi_3 + C_2$$

Код ових једначина **y, x** и η и ξ јесу координате индентичних тачака у обадва система. Непознати су фактори A_1, A_2, B_1, B_2 и константе C_1 и C_2 које можемо из горњих једначина одредити и помоћу њих извршити трансформацију координата тачака чије су нам координате познате само у једном систему.

Овим начином, фактори и константе за транформацију, добијају се из три познате тачке и у једном и у другом систему. Ова метода — која је врло честа у практичној примени — дозвољава на једноставан начин извршити трансформацију једне мање групе тачака у оквиру датог троугла, даје доста повољне резултате.

Један од начина приближног прерачунавања (трансформација координата), који је предмет овога чланка, јесте трансформација координата помоћу барицентричног калкила. Овај начин прерачунавања мало је познат, а у пракси код нас можда није ни примењен, ма да у извесним случајевима даје задовољавајуће резултате.

О барицентричном калкилу, некадашњи начелник мађарског тригонометријског отсека у Будимпешти, Јохан Марек у својој књизи „Technische Anleitung zur Ausführung der Trigonometrischen Operationen des Katasters — Budapest 1875." која је у своје доба служила као званични правилник за извођење тријангулационих радова у Мађарској, износи у § 167* следеће:

„Мебиус у своме одличном делу > барицентрични калкил, Лајпциг 1827 г. < развио је теорију, по којој се могу трима тачкама једне равни увек доделити такве тежине, да би једна четврта тачка исте равни могла бити сматрана центром тежишта датих тачака. У следећем доказаћемо како се може та теорија практично применити у области геодезије. Ако на више тачака A, B, C, D . . . . у једној равни, делују паралелне силе, P_1, P_2, P_3 . . . . те ако из њихових нападних тачака подигнемо управне p_1, p_2, p_3 . . . . на једну произвољну равну линију, онда између резултанте R тих сила и отстојања r њене тачке напада — од исте произвољне линије — постоји следећи однос:

$$1.)\quad R\,r = P_1\,p_1 + P_2\,p_2 + P_3\,p_3 + \;.\;.\;.\;.$$

Ако једном заменимо отстојања нападних тачака A, B, C, D, ... од произвољно изабране линије, са управним y_1, y_2, y_3 . . . подигнутим на апсисну осу x, а други пут са управним x_1, x_2, x_3 . . . подигнуте на ординатну ос y, те ако су a, b, c, d . . . . оне тежине које делују у тачкама A, B, C, D . . . . онда по једначини један имамо:

$$2.\;\left\{\begin{array}{l}(a + b + c\;.\;.\;.)\;x = a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + \;.\;.\;.\\ (a + b + c\;.\;.\;.)\;y = a\,y_1 + b\,y_2 + c\,y_3 + \;.\;.\;.\end{array}\right.$$

из чега следују координате тежишта M:

$$3.\;\left\{\begin{array}{l}x = \dfrac{a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_2 + \;.\;.\;.}{a + b + c + \;.\;.\;.}\\[2ex] y = \dfrac{a\,y_1 + b\,y_2 + c\,y_3 + \;.\;.\;.}{a + b + c + \;.\;.\;.}\end{array}\right.$$

Сличне једначине добијамо — за највероватнију вредност аритметичке средине са разним тежинама — по методи најмањи квадрата,

*** Делимично овај параграф доносимо у слободном преводу.**

када заменимо збир $[vv]$ са збиром $[pvv]$ при образовању минимума. Ако желимо у геодезији применути једначине 3 да би добили координате једне тачке M, на коју је визирано са тачака A, B, C, D . . . . онда се у првом реду ради о изналажењу тежина a, b, c, d . . . . које припадају тачкама A, B, C, D . . . . . Ако су те тежине познате, онда је рачунање координата тачке M из једначине 3 врло просто.

Узмимо најједноставнији случај, када се тачка M (x, y) има одредити из тачака:

A (x_1, y_1); B (x_2, y_2); C (x_3, y_3).

Ако треба M да буде тежиште овога система од три тачке, онда по једначини 3 биће:

$$4. \begin{cases} a(x-x_1) + b(x-x_2) + c(x-x_3) = 0 \\ a(y-y_1) + b(y-y_2) + c(y-y_3) = 0 \end{cases}$$

Елиминисањем C добијамо:

$$5. \quad a\{(x-x_1)(y-y_3) - (x-x_3)(y-y_1)\} = \\ = b\{(x-x_3)(y-y_2) - (x-x_2)(y-y_3)\}.$$

а ако елиминишемо из једначине 4 и a онда следује:

$$6. \quad b\{(x-x_2)(y-y_1) - (x-x_1)(y-y_2)\} = \\ = - c\{(x-x_1)(y-y_3)\ (x-x_3)(y-y_1)\}.$$

Фактори од a и c могу се преиначити

на $y(x_3-x_1) + y_3(x_1-x) + y_1(x-x_3)$ исто тако од

b у 5. једначини на $y(x_2-x_3) + y_2(x_3-x) + y_3(x-x_2)$

a у 6. једначини на $y(x_1-x_2) + y_1(x_2-x) + y_2(x\ \ x_1)$.

Ако се ово упоређује са једначинама рачунања површина полигона, на име са:

$$2\,F = y_1(x_2-x_4) + y_2(x_3-x_1) + y_3(x_4-x_2) + y\ .\ .\ .\ . + y_{n-1}(x_n-x_{n-2}) + y_n\ (x_1-x_{n-1})$$

онда видимо, да су то двогубе површине троугла, и то троуглова, чије периферијалне тачке имају координате:

x y,	$x_3\ y_3$,	$x_1\ y_1$,	за троугао	MCA
x y,	$x_2\ y_2$,	$x_3\ y_3$	„ „	MBC
x y,	$x_1\ y_1$,	$x_2\ y_2$	„ „	MAB

Из једначине 5 следују пропорције:

a : b = MBC : MCA

а из једначине 6.

b : c = MCA : MAB

које се дају спојити, и дају однос тежина

a : b : c; на име:

7. a : b : c = MBC : MCA : MAB.

Уваћајући ове површине троуглова у место тежина у једначине 2 а имајући у виду, да је збир истих једнак површини троугла ABC, онда имамо за координате тачке M:

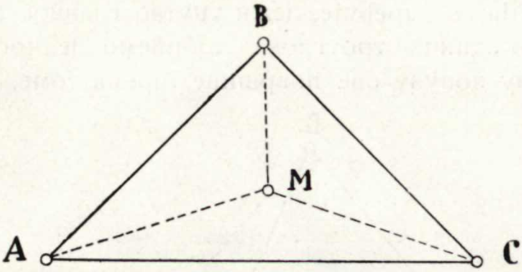
$$8. \begin{cases} x = \dfrac{MBC.\ x_1 + MCA.\ x_2 + MAB.\ x_3}{ABC} \\ y = \dfrac{MBC.\ y_1 + MCA.\ v_2 + MAB.\ y_3}{ABC} \end{cases}$$

За даље упрошћавање узимамо:

$$9.\quad \frac{MBC}{ABC} = p_1,\quad \frac{MCA}{ABC} = p_2,\quad \frac{MAB}{ABC} = p_3$$

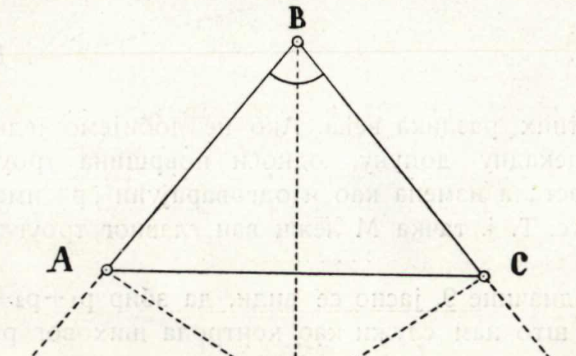
те добијамо једноставне једначине:

$$10.\quad \begin{aligned} x &= p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + p_3\, x_3 \\ y &= p_1\, y_1 + p_2\, y_2 + p_3\, y_3\text{“} \end{aligned}$$



Сл. 1

Према томе, при трансформацији координата једне тачке М из једног система у други, имаћемо да одредимо — по горе изложеном — положај те тачке у односу према датим тачкама у једном систему, а добијеним тежинама p_1,



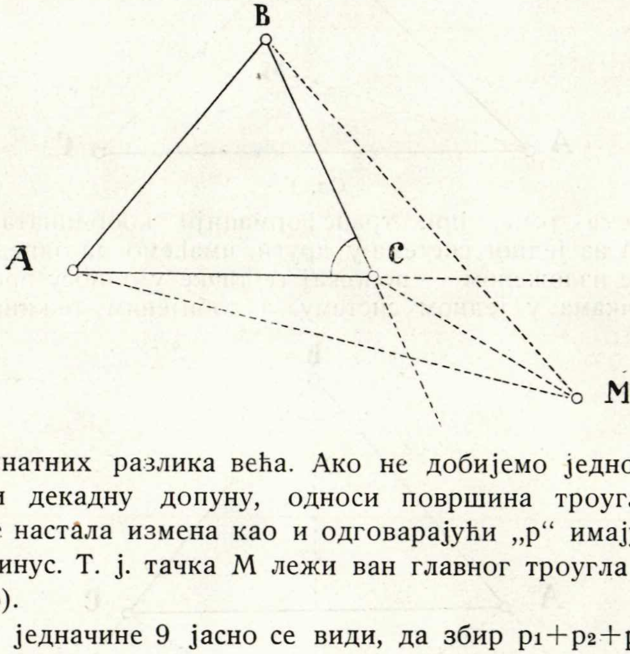
Сл. 2

p_2, p_3 . . . рачунати координате тачке М у другом систему.

Код образовања једначине 10 претпоставили смо да се тачка М — чије координате одређујемо — налази у троуглу АВС. (Сл. 1).

У случају, ако тачка М лежи ван троугла ABC и то у простору између продужених страница једног од захватних углова, спољни троугао, односно одговарајући „p" има предзнак минус. (Сл. 2); ако пак тачка М лежи у простору једног од унакрсних углова троугла ABC, онда површине спољних троуглова, којих у овом случају имамо два — односно одговарајући „p" — имају предзнаке минус. (Сл. 3)

Код употребе приложеног обрасца — а придржавајући се стриктно означеног реда обележавања тачака (циклуса) — нема бојазни да ћемо у одређивању предзнака код појединих површина троуглова погрешити, јер у случају, када тачка М која се одређује, лежи унутар главног троугла (сл. 1), код појединих троуглова добићемо једнообразно 2F или декадну допуну ове површине, према томе, која је од



Сл. 4

координатних разлика већа. Ако не добијемо једнобразно 2F или декадну допуну, односи површина троугла код кога је настала измена као и одговарајући „p" имају предзнак минус. Т. ј. тачка М лежи ван главног троугла (сл. 2 и сл. 3).

Из једначине 9 јасно се види, да збир $p_1+p_2+p_3$ мора бити $=1$, што нам служи као контрола њиховог рачунања. Већу тачност постижемо ако поједине тежине „p" рачунамо са што више децимала (и то барем шест децимала).

Практичну примену барицентричног калкила, при трансформацији координата тачака приказујемо прерачунавањем координата једне тачке Иванићког система у државни (Гаус-Кригеров) систем.

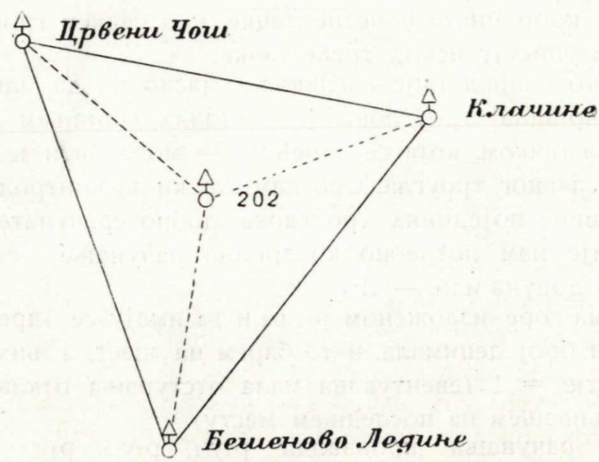
Дате су нам координате следећих тачака:

У државном систему (Гаус-Кригеров):

	Y	X
△ ○ Црвени Чот	*73* 99 105, 40	*5* 001 517, 68
△ ○ Клачине	*73* 97 945, 03	*4* 992 802, 91
△ ○ Бешеново Ледине	*74* 02 735, 60	*4* 997 426, 10
△ ○ 202	———	———

У Иванићком систему:

	Y	X
△ ○ Црвени Чот	+ 139 478, 540	— 31 641, 678
△ ○ Клачине	+ 136 128, 561	— 36 264, 956
△ ○ Бешеново Ледиее	+ 138 512, 435	— 33 686, 861
△ ○ 202	+ 137 171, 35	— 33 105, 53



Траже се координате △ ○ 202 у државном систему (Гаус-Кригеровом).

Рачунске радње сврстали смо у следећем обрасцу:

(Види прилог)

У узглављу приказаног обрасца отштампане су једначине, по којима се врши прерачунавање (трансформација)

Тачке главног троугла, означене су са T_1, T_2, T_3 а тачка чије се координате одређују у другом систему са T_0. Њихове познате координате означене су са yn и xn у једном систему, а са y'n и x'n у другом систему. Према томе, тражене координате јесу y'_0 и x'_0.

При уношењу датих координата у образац, не треба апсолутно водити рачуна јесу ли координате изражене у метрима или хватима, нити треба водити рачуна о положају координатних система, јер су p_1, p_2 и p_3 фактори.

Да би се избегао велики број цифара, рачунајући површине троуглова помоћу машине, а по Елинговом поступку, координате yn и xn редуковане су на најмањи могући заједнички однос за све троугле, и то, у рубрикама које су у обрасцу означене са yn ред и xn ред. У смислу поступка рачунања површина по Елингу чију су теорију и практичну примену изнели доцент Београдског универзитета г. инж. Дражић Милан, у своме чланку отштампанм у Геометарском и Геодетском гласнику од год. 1937, св. 2, на страни 89 и геод. г. Никола Нећошев, у своме чланку отштампаном у Геометарском и Геодетском гласнику год. 1935, св. 5, на стр. 340, координате почетне тачке код сваког троугла поновно се уписују испод треће тачке.

И ако напред није наглашено, јасно је, да алгебарски збир површина троуглова — насталих спајањем главних тачака са тачком, која се одређује — мора бити једнак површини главног троугла. Ово нам служи за контролу, да ли су површине појединих троуглова добро срачунате. Према томе, није нам потребно контролно рачунање површина (декадна допуна или — 2F).

Према горе изложеном p_1, p_2 и p_3 имају се одредити на што већи број децимала, и то барем на шест, а њихов збир мора бити = 1 (евентуална мала отступања отклањају се заокругљивањем на последњем месту).

Код рачунања производа $p_1y'_1$, $p_2y'_2$, $p_3y'_3$ и $p_1x'_1$, $p_2x'_2$, $p_3x'_3$ чији збирови дају ординату y'_0 и апсцису x'_0, посебног контролног рачунања нема, не преостаје друго него контроле ради да се рачунају поновно са промењеним факторима, и то на тај начин што ћемо наизменично стављати у поставни фактор машине или p'n и Y'n.

Напомиње се, да координате главног троугла у своме пуном износу треба уписати само код главног троугла. За остале троугле довољно је, да се преузму вредности и то редуковане из рубрика Yn ред и Xn ред. Координате тачке T_0 у пуном износу уписујемо само код другог троугла тј. код првог парцијалног троугла. Јасно је да координате тачке T_0 морамо редуковати за исти износ, као што су редуковане координате главних тачака.

Показаним примером рачунања, добили смо за $\overset{\triangle}{\bigcirc}$ 202 координате у државном систему (Гаус-Кригеровом) следеће вредности:

y = *74* 00259, 35   x = *4* 998671, 54

Директним одређивањем координата за ову тачку, које је извршило Одељење катастра и државних добара, помоћу опажаних праваца, добивене су следеће вредности:

y = *74* 00259, 31   x = *4* 998671, 30

Упоређујући ова два резултата, добијамо разлику (апсолутну вредност):

$\triangle y = 0{,}04$; $\triangle x = 0{,}24$.

Да би добили јасну слику тачности овога начина трансформације, у тригонометријском обрасцу 8 срачунали смо нагибе од $\overset{\triangle}{\bigcirc}$ 202 на основне тачке — помоћу којих смо трансформацију вршили — $\overset{\triangle}{\bigcirc}$ Црвени Чот, $\overset{\triangle}{\bigcirc}$ Клачине и $\overset{\triangle}{\bigcirc}$ Бешенове Ледине, и то у обадва система, тј. у државном и Иванићком. Код овога рачунања узете су у државном систему координате $\overset{\triangle}{\bigcirc}$ 202 са вредностима добијеним трансформацијом, а у Иванићком систему узете су вредности координата помоћу којих смо трансформацију извршили.

(Види триг. образац бр. 8 на страни 152)

Нагибе добивене у Иванићком систему сматрамо за коначне, пошто су срачунати из датих координата тачака. Нагибе пак добивене у државном систему тј. срачунате помоћу трансформисаних координата $\overset{\triangle}{\bigcirc}$ 202 и координата основних тачака узимамо за посматране правце.

Триг образац бр. 8

Рачунање азимута из правоуглих координата

Tb Ta	±	Yb Ya $\triangle У = Yb - Ya$ $\triangle X + \triangle У$	девет. остатак	±	Xb Xa $\triangle X = Xb - Xa$ $\triangle X - \triangle У$	девет. остатак	log $(\triangle X + \triangle У)$ log $(\triangle X - \triangle У)$ log tg $(1/4\pi + \nu_a^b)$ $1/4\pi + \nu_a^b$	log $\triangle y$ log $\triangle x$ log tg ν_a^b ν_a^b
				Државни систем (Гаус—Кригеров)				
△ ◎ Црв.Чот	+	9 105,40	1	+	11 517,68	2		
△ ○ 202	+	10 259,35	7	+	8 671,54	4		
	−	1 153,95	6	+	2 846,14	7	0, 42 304	0, 40 546
	+	1 692,19	1	+	4 000,09	4	22°55'49"	337°55'50"
△ ◎ Клачине	+	12 735,60	6	+	7 426,10	2		
△ ○ 202	+	10 259,35	7	+	8 671,54	4		
	+	2 476,25	8	-	1 245,44	2	0, 33 071	1, 89 825
	+	1 230,81	6	−	3 721,69	1	161°42'02"	116°42'01"
△ ◎ Беш. Л.	+	7 945,03	1	+	2 802,91	4		
△ ○ 202	+	10 259,35	7	+	8 671,54	4		
	−	2 314,32	6	−	5 868,63	0	2, 30 226	0, 39 435
	−	8 182,95	6	−	3 554,31	3	246°31'19"	201°31'18"
				Иванићки систем				
△ ◎ Црв.Чот	−	136 478,54	2	+	31 641,68	2		
△ ○ 202	−	137 171,35	1	+	33 105,53	2		
	+	692,81	8	−	1 463,85	0	0, 35 752	0, 47 328
	−	771,04	1	−	2 156,66	8	199°40'22"	154°40'22"
△ ◎ Клачина	-	138 512,44	1	+	33 686,86	4		
△ ○ 202	−	137 171,35	1	+	33 105,53	2		
	−	1 341,09	0	+	581,33	2	0, 39 521	2, 30 693
	−	759,76	7	+	1 922,42	2	338°26'09"	293°26'09"
△ ◎ Беш. Л.	−	136 128,56	5	+	36 264,96	0		
△ ○ 202	−	137 171,35	1	+	33 105,53	2		
	+	1 042,79	5	+	3 159,43	7	1, 98 532	0, 33 006
	+	4 202,22	3	+	2 116,64	2	63°15'57"	18°15'58"

Ове коначне нагибе и посматране правце уносимо у тригонометријски образац 5.

Визурна тачка	Коначни нагиби ν			Посматрани правци α			Разлика α — ν оријентац угао $O = \frac{[\nu - \alpha]}{m}$			Коначно оријентисани правци $\varphi = \alpha + o$			Поправка $V = \nu - \varphi$	
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	+ ″	— ″
№ 1 Станица △◎ 202														
у = 10259,35 x = 8671,54														
△◎ Црв Чот	*337*	*55*	*50*	154	40	22	*183*	*15*	*28*	*337*	*55*	*56*		*6*
△◎ Клачине	*116*	*42*	*01*	293	26	08		*15*	*53*	*116*	*42*	*42*	*19*	
△◎ Беш. Л.	*201*	*31*	*18*	18	15	58		*15*	*20*	*201*	*31*	*32*		*14*
					22	28			*101*		24	10	*19*	*20*
					01	42	*183*	*15*	*34*					
					24	10								

Из горњег обрасца видимо, да разлике између коначних нагиба и коначно оријентисаних праваца не прелазе границу дозвољеног отступања, коју предвиђа кат. правилник I део, за тригонометријске тачке IV реда.

Овај начин трансформирања координата може се врло згодно применити при упоређивању општинских граница, које су снимљене у два разна система. У сврху упоређивања потребно нам је само извршити трансформацију темена детаљних листова једног система у други систем, да би та темена а самим тим и границу могли нанети на одговарајући детаљни лист другог система.

Овај начин трансформације има исти недостатак — као и све остале приближне методе (методе уметања) — да задржава све грешке које је та тачка добила код свог одређивања у првом сестему.

За трансформацију појединих тачака, овај начин не захтева много времена, а задовољава одговарајућу тачност. Ова метода није нашла ширу примену, вероватно, што се појавила у времену, када машине за рачунање нису биле у општој употреби. Сваки други начин тачног рачунања површина троуглова не би био економичан, а тачне површине троуглова и јесу један од битних услова ове методе.

UTISCI O KATASTARSKIM RADOVIMA U ŠVAJCARSKOJ, FRANCUSKOJ I ITALIJI I PRIMENA FOTOGRAMETRIJE ZA KATASTARSKA SNIMANJA

Predavanje inž. ALEKSANDRA KOSTIĆA

(Nastavak)

Primena fotogrametrije u katastru

Pre nego što bi prešao na izlaganje o praktičnoj primeni fotogrametrije u katastru — dozvolite mi da u nekoliko reči izložim definiciju i osnovne principe fotogrametrije.

Fotogrametrija je danas jedna primenjena nauka, koja proučava, na koji se način mogu vršiti merenja na osnovi fotografskih snimaka; drugim rečima, da se na osnovi fotografskih snimaka izrađuju situacioni planovi ili karte. Ona se naslanja na zakone geometrije, fizike, hemije i mehanike.

Njeni počeci se javljaju još u prošlom veku a nagli preokret i napredak u fotogrametriji se ispoljava pojavom aviona, koji je bio naročito iskorišćen za fotografisanje terena i objekata u prošlom svetskom ratu. Posle toga se iz dana u dan sve više razvija i napreduje tako, da je danas njena primena gotovo opšta i tako raznolika da se ona ne može i ne sme mimoići ni kod nas. Ova primena je toliko razgranata, da nije moguće u jednom ovakvom predavanju dati detaljni opis. Napomenuću samo, da pored izrade situacionih planova i karata sa prestavom terena u horizontalnoj i vertikalnoj projekcije — bilo za privredne ciljeve, katastarske, vojne, ili za projektovanje puteva, železnica, kanala, vodojaža, regulisanje