$$\Sigma_o = \pm \sqrt{\frac{216}{3}} = \pm\ 8,''5$$

$$\Sigma_{\prime} = \pm\ \frac{8,''5}{\sqrt{4}} = \pm\ 4,''2$$

Ako ćemo uzeti u obzir da su sva ova određivanja bila načinjena od strane đaka, koji su prvi put u životu vršili astronomska opažanja, moramo priznati, da i pomoću sunca pri pažljivom radu, može se dobiti potpuno zadovoljavajuće rezultate.

Ing. Аркадије Сиркс

Мађијски ред Торопова

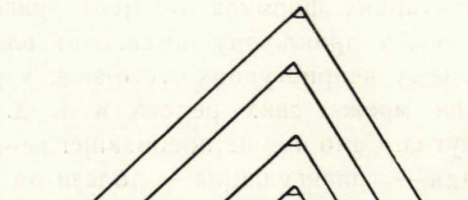
У нижој геодезији, а и у вишој, решавамо проблеме помоћу елементарних формула линијске тригонометрије. У полигоној мрежи, у прикључку полигоног влака на високе тачке, у рачунању неприступних отстојања. у рачунању тригонометријских мрежа свих редова и т. д. служимо се теоријом троугла. Само име најпрецизнијег геодетско — геометарског рада — триангулација — долази од латинске речи „trianguli,“ што значи трокут, а тај се рад састоји у развијању и решавању система троуглова. Према томе теорија троугла, или, како се обично каже, линијска тригонометрија основ је скоро сваком геодетском рачунању.

Међутим класична тригонометрија пружа читав низ неповезаних формула за решавање троуглова (ово решавање троуглова и јесте наиме њен коначни циљ), а ова неповезаност оптерећује меморију и захтева од рачунџије који примењује тригонометријске формуле вештину, која се стиче само дугом вежбом, а да крај тога ипак нисмо никад сигурни да нисмо погрешили, ако немамо при руци обиман потсетник са исписаним формулама. Међутим рационализација захтева строги систематски поступак, смањење основних Формула, лако памћење констаната и могућност брзе оријентације и сналажења у тим формулама.

Све ово класична тригонометрија не даје нама.

Томе је доскочио професор Торопов, који је пронашао један ред тригонометријских релација, повезаних међусобно једнакошћу, а које омогућују брзо и лако решавање свих могућих случајева за решавање троуглова, потпуно оправдавајући име мађијског реда, како га је назвао сам проналазач. Торопов је дакле дао једну нову методу за решавање троуглова, а која се састоји у томе, да све формуле за све комбинације свих случајева за решавање троуглова узимамо из споменутог реда од девет тригонометриских релација, повезаних знаком једнакости.

Решити троугао значи по даним његовим елементима одредити остале његове елементе. Као и код графичког начина решавање троуглова, тако и код тригонометријског начина морамо имати бар три задане величине да би задаћа била одређена, и то бар једна од задатих величина мора бити линијска, јер у противном случају задатак постаје неодређен (тако, например, постоји безброј троуглова са даним димензијама трију углова A, B и C. Види сл. 1.).



Слика 1.

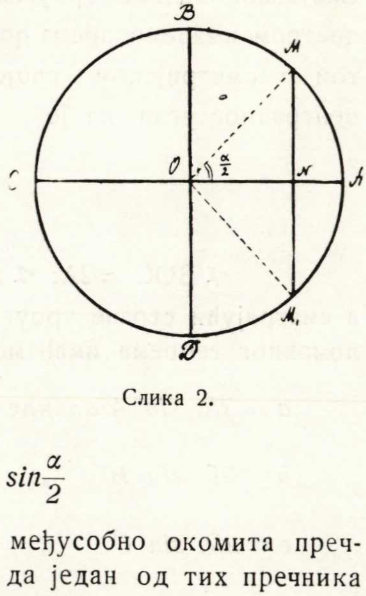
Углавном за решавање троуглова имамо следеће основне комбинације: 1) задане су две стране и један угао; 2) задана је једна страна и два угла, и 3) задане су три стране. Прве две скупине распадају се даље на потскупине (например прва скупина респада се на случај када су задане две стране и угао међу њима, и на случај када су задане две стране и један наспрамни угао), а број комбинација да се математски одредити. Тај број брзо расте ако уваћамо као елементе троугла осим страна и углова још полупречнике описаног и уписаног кругова, висину, суму и разлику страна, периметар, површину, симетралу угла, трансверзалу и т. д. Међутим у геодезији ређе требамо ове остале случајеве, а у геодетско-геометарској пракси редовно долазе до примене само случајеви из три поменуте основне скупине. Употребом Тороповљеве методе све конбинације решавамо помоћу једног реда тригонометријских релација.

У следећим разлагањима приказаћемо теорију и примену реда Тороповљевих релација.

У изводима биће употребљене следеће уобичајене ознаке:

Углове троугла означићемо са A, B и C.
Наспрамне стране са a, b и c
Полупречник описаног круга са R.
Полупречник уписаног круга са r.
Висине троугла за базе a, b и c са h_a, h_b и h_c.
Периметар као суму свију страна са $2p = a + b + c$
Површину троугла са Q
Симетрале (располовнице) углова A, B и C са S_a, S_b и S_c.
Трансверзале страна a, b и c са t_a, t_b и t_c

Пре прелаза на извод Тороповљевог реда доказаћемо један помоћни теорем, који гласи: тетива једнака је пречнику круга пута Sinus половине одговарајућег њој лука, т. ј. пута Sinus половине средишњег (централног) угла, који одговара даном луку.



Слика 2.

Нека је задан круг радија R и лук MM_1 који одговара углу α. Треба доказати да је

$$MM_1 = 2\,R.\,\sin\frac{\alpha}{2}$$

Ради доказа замислимо два међусобно окомита пречника AC и BD (види сл. 2) тако, да један од тих пречника буде уједно окомит на MM_1.

$$AC \perp MM_1.$$

Онда је $MM_1 = 2\ MN$, јер сваки окомити пречник дели тетиву (MM_1) и одговарајући лук (MM_1) на два равна дела.

Луку $\smile MM_1$ одговара централни угао α

Луку $\smile AM$, где $AM = {}^1/_2 \smile MM_1$ одговара централни угао $\dfrac{\alpha}{2}$

Отсечак MN је линија синуса за угао $\frac{\alpha}{2}$

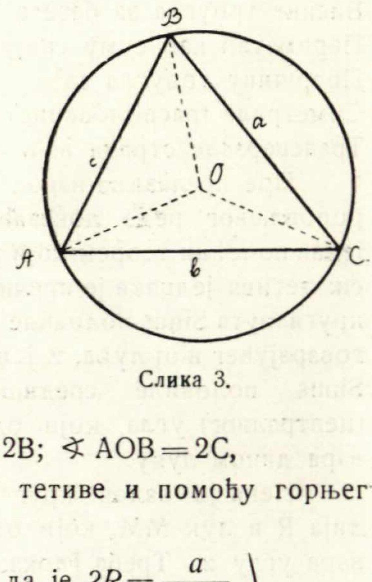
Дакле $\frac{MM_1}{R} = \frac{2\ MN}{R} = 2\frac{MN}{R} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$,

или $\frac{MM_1}{R} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$, а коначно

$MM_1 = R.\ 2\sin\frac{\alpha}{2}$, односно

$MM_1 = 2\ R\ \sin\frac{\alpha}{2}$, а тиме је горњи помоћни теорем доказан.

Проматраћемо сада уписани троугао ABC на слици 3. Спојивши врхове троугла са центром имаћемо према познатом геометријском својству централног угла, да је



Слика 3.

$$\sphericalangle BOC = 2A;\ \sphericalangle AOC = 2B;\ \sphericalangle AOB = 2C,$$

а сматрајући стране троугла као тетиве и помоћу горњег помоћног теорема имаћемо:

$$\left.\begin{array}{ll} a = 2R.\ \sin A \text{ одакле излази да је } & 2R = \dfrac{a}{\sin A} \\ b = 2R.\ \sin B \quad \text{„ \quad „ \quad „ \quad „} & 2R = \dfrac{b}{\sin B} \\ c = 2R.\ \sin C \quad \text{„ \quad „ \quad „ \quad „} & 2R = \dfrac{c}{\sin C} \end{array}\right\} \text{(I).}$$

Ово су основне карике ланца Тороповљевих једнаџаба и изражавају основно својство троуглова: релација стране троугла и sinus'a наспрамног угла је константна величина за дани троугао и једнака је пречнику описаног круга.

Међутим нећемо писати у нашем основном реду све ове релације, већ само оне за страну „a“ и угао „A“, јер отпуна симетричност релација реда. Торопова с обзиром на улазеће у ове тригонометријске релације елементе троугла дозвољава без даљнега исписивати аналогне формуле за стране „b“ и „c“, односно за углове „B“ и „C“.

Из (I) изводимо даље како следи збрајањем и одбијањем бројитеља и именитеља наших изведених релација.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$$

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a-b}{\sin A+\sin B}=2R \quad (1)$$

Пошто је $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

а $\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$, (2),

надаље пошто је $A+B+C=180^0$,

а $A+B=180^0-C$ и $\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{C}{2}$ (3),

имамо уврстити (3) у (2)

$$\left.\begin{aligned}\sin A+\sin B&=2\sin\left(90^0-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \sin A-\sin B&=2\cos\left(90^0-\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\end{aligned}\right\}(4).$$

Коначно уврстивши (4) у (1) имамо релације:

$$\frac{a+b}{2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{a-b}{2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}}=2R \quad (II).$$

У овом облику релације су згодне и за логаритмирање. На исти начин можемо извести или написати по аналогији

$$\frac{a+c}{2\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{a-c}{2\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B}{2}}=$$

$$=\frac{b+c}{2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{b-c}{2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}}=2R$$

Ради извода следећих тригонометријских релација реда Торопова опет ћемо узети једнаџбу (I) и извршићемо следеће математске операције:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{b+c-a}{\sin B+\sin C-\sin A}=\frac{a}{\sin A}=2R \quad (5).$$

знамо да је у троуглу $A+B+C=180^0$,

$$\text{дакле } B+C=180^0-A$$

$$\text{и } \frac{B+C}{2}=90^0-\frac{A}{2},$$

$$\text{односно } \frac{A}{2}=90^0-\frac{B+C}{2}$$

Уз то $\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=$

$$=\sin A+2\sin\left(90^0-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}=\sin A+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\left[\sin\left(90^0-\frac{B+C}{2}\right)+\cos\frac{B-C}{2}\right]=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{B-C}{2}\right)=2\cos\frac{A}{2}\,2\cos\frac{\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2}}{2}\cos\frac{\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}}{2}=$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\,2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\quad(6).$$

На исти начин наћићемо да је

$$\sin B+\sin C-\sin A=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\sin A=2\sin$$

$$\left(90^0-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}-\sin A=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\sin A=2\cos$$

$$\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-\sin\left(90^0-\frac{B+C}{2}\right)\right]=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{B+C}{2}\right)=2\cos\frac{A}{2}\,2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad(7).$$

Рекли смо већ да ћемо означити

$$a+b+c=2p\quad(8),$$

а одбивши лево и десно од (8) 2a имаћемо:

$$a+b+c-2a=2p-2a,$$

односно $b+c-a=2(p-a)$ (9).

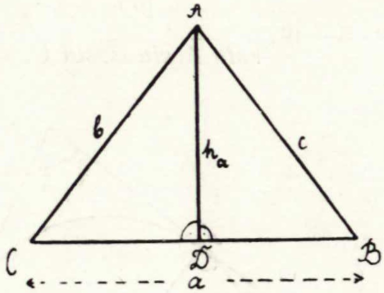
Ако сада уврстимо (6), (7) и (9) у (5) добићемо

$$\frac{2p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{2(p-a)}{4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{a}{\sin A}=2R \text{ или надаље}$$

$$\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{p-a}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{a}{\sin A}=2R \quad (III).$$

Исто тако можемо извести или написати по аналогији:

$$\frac{p-b}{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{p-c}{2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=\frac{a}{\sin A}=2R.$$



Слика 4.

Надаље на слици 4 из $\triangleleft$ ADB, где је $\sphericalangle$ ADC $= 90^0$ пошто је AD $=$ ha, тј. висина троугла, видимо да је

$$\frac{h_a}{\sin B}=\frac{C}{\sin 90^0}$$

Пошто је $\sin 90^0 = 1$, то $\frac{ha}{\sin B}=\frac{C}{1}$, а поделивши леву и десну страну ове једнаџбе са sin C имаћемо

$$\frac{h_a}{\sin B \sin C}=\frac{c}{\sin C}=2R \quad (10).$$

На исти начин можемо извести или написати по аналогији:

$$\frac{h_b}{\sin A \sin C}=\frac{hc}{\sin A \sin B}=2R.$$

Надаље на слици 4 видимо да је

$$Q=\frac{a.\ ha}{2},$$

$$\text{или } 2Q = a.\ ha \quad (11).$$

Знамо већ да је
$$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{\sin A}=2R \\ \text{и } &\frac{ha}{\sin B \sin C}=2R \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

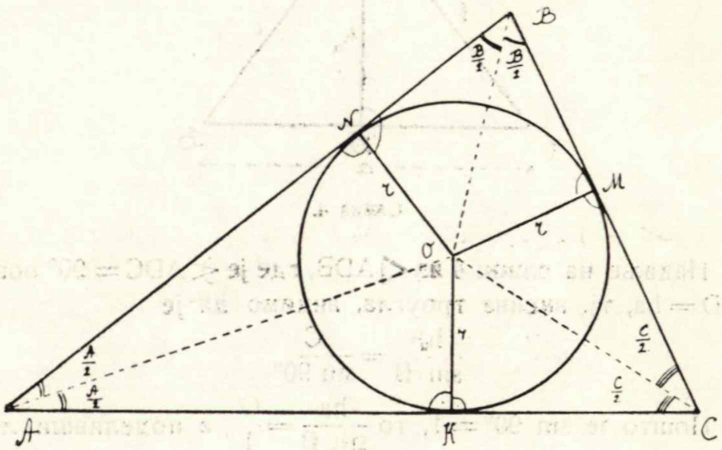
измножимо леве и десне стране једнаџаба (12):

$$\frac{a.\ ha}{\sin A.\sin B.\sin C.}=(2R)^2 \quad (12\text{-a}),$$

а уврстивши (11) у (12-а) имаћемо:

$$\frac{2Q}{\sin A.\sin B.\sin C.}=(2R)^2,$$

одакле добијамо да је $\dfrac{\sqrt{2Q}}{\sqrt{\sin A.\sin B.\sin C.}}=2R \quad (IV).$



Слика 5.

Прелазећи надаље на извод формуле са полупречником уписаног круга на слици 5 из правоуглих троуглова $\triangleleft$ AOK и $\triangleleft$ KOC имаћемо:

$$AK=r\ \mathrm{ctg}\frac{A}{2}$$

$$KC=r\ \mathrm{ctg}\frac{C}{2}$$

а њихов зброј даје: $AK+KC=r\ \mathrm{ctg}\dfrac{A}{2}+r\ \mathrm{ctg}\dfrac{C}{2}$

Пошто је $AK+KC=b$ имамо да је

$$b=r\left(\mathrm{ctg}\frac{A}{2}+\mathrm{ctg}\frac{C}{2}\right) \quad (13).$$

Памтећи да је $A+B+C=180^0$

$$A+C=180^0-B$$

и $$\frac{A+C}{2}=90^0-\frac{B}{2},$$

трансформираћемо израз у заградама из (13).

$$\mathrm{ctg}\frac{A}{2}+\mathrm{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin\left(90^0-\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} \quad (14)$$

Уврстивши (14) у (13) имамо

$b=\dfrac{r\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}$, а поделивши леву и десну страну ове једнаџбе са sin B имаћемо релације

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{r\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\sin B}=\frac{r\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=2R.$$

или коначно $$\frac{b}{\sin B}=\frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=2R \quad (V).$$

Из једнакости десних страна једнаџаба I, II, III, IV и V закључујемо и о једнакости левих страна и скупивши уједно формуле (I), (II), (III), (IV) и (V) добићемо Торопљев ред од девет тригонометријских релација:

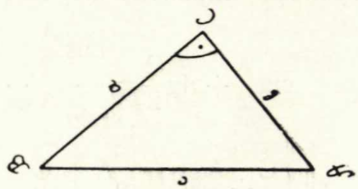
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b}{2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{a-b}{2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{p-a}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{ha}{\sin B\sin C}=\frac{\sqrt{2Q}}{\sqrt{\sin A\sin B\sin C}}=$$

$$=\frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=2R \quad (15).$$

Изведени ред тригонометријских релација применићемо на решавање троуглова. Претходно проматраћемо правоугли троугао, у којем ћемо хипотенузу означити са „c“, прави угао са $C = 90^0$, катете са „a“ и „b“, а оштре углове са „A“ и „B“.

1 случај. Задане су хипотенуза „C“ и један оштри угао „A“. Треба одредити стране „a“ и „b“ и угао „B“.



Слика 6.

Прве релације Тороповљевог реда дају:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Пошто је у овом случају угао $C = 90^0$, то и $\sin C = \sin 90^0 = 1$, одакле имамо $\frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\sin 90^0} = \frac{c}{1} = c$,

односно $\frac{a}{\sin A} = C$ и $\frac{b}{\sin B} = c$, а одавде добивамо познато својство правоуглих троуглова

$$a = c \sin A \quad (16) \qquad \text{и} \qquad b = c \sin B \quad (17),$$

које гласи да је катета једнака хипотенузи пута sinus насправмног угла.

Пошто је у правоуглом троуглу $A + B = 90^0$, или $A = 90^0 - B$, то и $\sin A = \sin (90^0 - B) = \cos B$ (18).

Уврстивши (18) у (16) имамо друго својство правоуглог троугла, које гласи

$$a = c \cos B \quad (19).$$

Аналогно добићемо $b = c \cos A$ (20), јер је $B = 90^0 - A$.

Поделићемо надаље (16) са (20), а онда (20) са (16).

$$\begin{array}{l} a = c \sin A \\ b = c \cos A \\ \hline \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tg} A \quad (21) \end{array} \qquad \begin{array}{l} b = c \cos A \\ a = c \sin A \\ \hline \frac{b}{a} = \frac{\cos A}{\sin A} = \operatorname{ctg} A \quad (22), \end{array}$$

одакле добићемо $a = b \; tgA$ (23)
и $b = a \; ctgA$ (24),

два даља позната својства правоуглог троугла, која гласе да је катета једнака другој катети пута tangens насправмног, односно cotangens другог оштрог угла.

Овим изводима показали смо да најобичнији случајеви решавања правоуглих троуглова, који се решавају на основу овде споменутих својстава правоуглог троугла, одговарају употреби прве релације Тороповљевог реда, што ће се исто тако видети и на *2-ом случају* решавања правоуглих троуглова, када су задане стране „a“, насправни угао „A“, а треба одредити стране „c“, „b“ и угао „B“.

Основна релација Тороповљевог реда гласи: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$.

Пошто је $C = 90^0$ и $\sin 90^0 = 1$, то имамо $\frac{a}{\sin A} = C$.

Надаље $A + B = 90^0$, или $B = 90^0 - A$,
а друга катета $b = a \operatorname{ctg} A$, како смо то већ добили у разлагању. За први *случај*. Задане су „c“ и „a“. Треба одредити „b“, „A“ и „B“, Употреба прве Тороповљеве релације даје: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ и пошто је опет $\sin C = 1$, имамо да је $\sin A = \frac{a}{c}$, одакле добивамо и угао A.

Непознати угао B добићемо из разлике $B = 90^0 - A$, јер $B + A = 90^0$, а онда из релације $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ имамо да је непознато $b = \frac{a}{\sin A} \sin B$.

Прећи ћемо на решавање косоуглих троуглова, и то на *4 случај*, када су задане све три стране „a“, „b“ и „c“, а треба одредити углове „A“, „B“ и „C“.

За овај случај узећемо Тороповљеве релације са периметром:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{p-a}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = 2R; & \dfrac{p-b}{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} = 2R \\ \dfrac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = 2R; & \dfrac{p-c}{2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} = 2R \end{array}\right\} \quad (25)$$

Сада измножимо две леве и две десне једнаџбе из (25)

$$\frac{p(p-a)}{4\cos^2\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = (2R)^2$$

$$\frac{(p-b)(p-c)}{4\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = (2R)^2$$

Пошто су десне стране горњих једнаџаба једнаке — једнаке су и леве стране, т. ј.

$$\frac{p(p-a)}{4\cos^2\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{(p-b)(p-c)}{4\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} \qquad (26),$$

а из (26) трансформацијом имамо

$$\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2=\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}, \text{ или}$$

$$tg^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} \text{ и на крају добићемо}$$

$$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad (27).$$

Аналогно можемо извести формуле

$$tg\frac{B}{2}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \quad \text{и} \quad tg\frac{C}{2}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

а као контрола мора бити $A+B+C=180^0$.

Ако бисмо хтели за овај случај одредити још и површину Q, морали бисмо измножити четири једнаџбе (25) Тороповљевог реда, а онда квадрирати релацију која садржи површину Q.

Тако би се добило да је

$$\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{16\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=(2R)^4 \qquad (28)$$

и
$$\frac{2Q}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\,2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\,2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=(2R)^2 \qquad (29)$$

Други корен из (28) даје:

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=(2R)^2 \qquad (30).$$

Једнаџбе (29) и (30) имају једнаке десне стране, а одавде закључујемо о једнакости и левих страна, што даје уз деобу са 2 бројитеља и именитеља једнаџбе (29):

$$\frac{Q}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

и коначно $Q=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (31)

имамо познату једнаџбу за површину троугла, ако су задане три стране.

5 случај. Задане су „a“, „b“ и „C“. Треба одредити „c“, „A“ и „B“ уз претпоставку да је $a>b$.

Узећемо из Тороповљевог реда релације у које улазе задане величине, а то су ове: $\frac{a+b}{2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{a-b}{2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}}$.

Трансформираћемо ову једнаџбу:

$$\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{a-b}{a+b}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

или $$tg\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot ctg\frac{C}{2} \quad (32),$$

а ово је позната формула Симпсона. Као што видимо из Тороповљевог реда можемо добити лако све познате формуле линијске тригонометрије на сасвим једноставан начин.

Из (32) одредићемо сада $\frac{A-B}{2}=n^0$, дакле $=A-B=2n^0$

а пошто знамо да је $\left.\begin{array}{l}A-B=2n^0\\ A+B=180^0-C\end{array}\right\}$ (33)

имамо збрајањем горње и доње једнаџбе (33)

$$2A=180^0-C+2n^0$$

или $$A=90^0-\frac{C}{2}+n^0,$$

а одбијањем горње једнаџбине од доње у (33) имамо:

$$2B=180^0-C-2n^0,$$

или $$B=90^0-\frac{C}{2}-n^0.$$

Коначно требамо одредити још страну „с“ а ово чинимо употребом већ познате основне Тороповљеве релације $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$, одакле имамо да је $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

Досада смо одређивали само основне елементе троугла, т.ј. стране и углове, али и сада је већ јасно да се одређивање свих осталих елемената троугла чини на потпуно исти начин: треба употребити одговарајућу тригонометријску релацију Тороповљевог реда, у коју улази тражени елеменат. Ово смо већ показали у 4 случаја изводом формуле за површину а сада показаћемо у *6 случају* решење троугла по заданим „А“, „В“ и „ha„. Овде дакле треба одредити „С“, „а“, „b“, „с“ и “Q“. Трећи угао троугла имаћемо као $C = 180^0 - (A + B)$, а стране одредићемо употрабом релација

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{ha}{\sin B \quad \sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Према томе:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{ha \quad \sin A}{\sin B \quad \sin C} \\ b &= \frac{ha \quad \sin B}{\sin B \quad \sin C} = \frac{ha}{\sin C} \\ c &= \frac{ha. \quad \sin C}{\sin B. \quad \sin C} = \frac{ha}{\sin B} \end{aligned}\right\} \quad (34).$$

Површину Q добићемо употребом одговарајућих релација.

$$\frac{\sqrt{2\ Q}}{\sqrt{\sin A \ \sin B \ \sin C}} = \frac{ha}{\sin B. \quad \sin C} \quad \text{, одакле имамо}$$

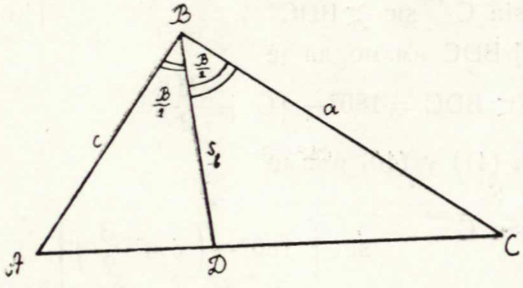
$$\frac{2Q}{\sin A \ \sin B \ \sin C} = \frac{h_a^2}{\sin^2 B. \quad \sin^2 C} \quad \text{, и}$$

$$2Q = \frac{h_a^2. \ \sin A. \ \sin B. \ \sin C}{\sin^2 B. \quad \sin^2 C} \quad \text{, а коначно}$$

$$Q = \frac{h_a^2. \quad \sin A}{2 \sin B. \quad \sin C} \quad (35).$$

Да смо требали још који елеменат троугла, морали бисмо на исти начин увести још коју Тороповљеву релацију.

Ред Торопова према потреби може се надопунити са даљим једнаџбама, ако специални радови захтевају увођење још неких елемената троугла (например код рачунања елемената за исколчивање кривина код геодетско-геометарских радова на трасирању путева и жељезница). Ради примера навешћемо свој извод десете и једанајсте тригонометријске релације, којима смо надопунили мађијски ред Торопова, а које смо извели за даље елементе троугла, којих нема у проналазачевом реду, т.ј. за симетралу (располовницу) угла и за трансверзалу.



Слика 7.

На сл. 7 повукли смо симетралу угла ABC.

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle B,$$

дакле $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = \frac{B}{2}$

Из $\triangle$ ABD имамо да је

$$\frac{BD}{\sin A} = \frac{S_b}{\sin A} = \frac{c}{\sin \sphericalangle ADB} \qquad (36)$$

Пошто из $\triangle$ ABD видимо да је

$$\sphericalangle ADB = 180^0 - \left(A + \frac{B}{2}\right) \qquad (37),$$

то уврстивши (37) у (36) имамо:

$$\frac{S_b}{\sin A} = \frac{c}{\sin\left[180^0 - \left(A + \frac{B}{2}\right)\right]},$$

надаље $\frac{S_b}{\sin A} = \frac{c}{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}$,

или $$\frac{S_b \cdot \sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin A} = C \qquad (38),$$

А да бисмо ову формулу довели у везу са редом Торопова поделићемо леву и десну стране (38)-е једнаџбе са sin C и имаћемо:

$$\frac{S_b . \sin \left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin A . \sin C} = \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad (39).$$

Из $\triangleleft$BCD добићемо на сличан иачин:

$$\frac{S_b}{\sin C} = \frac{a}{\sin \sphericalangle BDC} \qquad (40).$$

Из $\triangleleft$ BDC имамо да је

$$\sphericalangle BDC = 180^0 - \left(C + \frac{B}{2}\right) \qquad (41)$$

и уврстити (41) у (40) имамо:

$$\frac{S_b}{\sin C} = \frac{a}{\sin \left[180^0 - \left(c + \frac{B}{2}\right)\right]}$$

$$\frac{S_b}{\sin C} = \frac{a}{\sin \left(c + \frac{B}{2}\right)}$$

$$\frac{S_b . \sin \left(C + \frac{B}{2}\right)}{\sin C} = a \qquad (42),$$

А да се доведе ова формула у везу са редом Торопова поделићемо обе стране (42)-е једнаџбм са sin A и добићемо:

$$\frac{S_b . \sin \left(C + \frac{B}{2}\right)}{\sin C . \sin A} = \frac{a}{\sin A} = 2R \qquad (43),$$

Дакле за симетралу угла „Sb“ добили смо две релације, које коначно изгледају овако:

$$\frac{S_b . \sin \left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin A . \sin C} = \frac{S_b . \sin \left(C + \frac{B}{2}\right)}{\sin C . \sin A} = 2R \qquad (44).$$

Можемо извести аналогно релације за друге две симетрале углова „A“ и „C“:

$$\frac{Sa. \sin \left(B + \frac{A}{2}\right)}{\sin B . \sin C} = \frac{Sa. \sin \left(C + \frac{A}{2}\right)}{\sin C . \sin B} = 2R$$

и $$\frac{Sc.\ \sin\left(B+\frac{C}{2}\right)}{\sin B.\ \sin A}=\frac{Sc.\ \sin\left(A+\frac{C}{2}\right)}{\sin A.\ \sin B}=2R$$

Употребљаваћемо или обадве формуле, у коју улази иста симетрала (ради контроле), или само једну, већ према томи какве су нам елементе троугла задане. Међутим у основни ред уписаћемо само једну, и те прву релацију са истом симетралом угла (S_a), јер су друге, парне релације са истом симетралом симетричне с обзиром на улазеће у њих величине.

У прву релацију са симетралом [рецимо да се ради о симетрали S_b, дакле види (44) једнаџбу] улази у бројитељ $\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)$, а у другу $\sin\left(C+\frac{B}{2}\right)$, дочим су све остале величине у бројитељу и именитељу остале непромењене у првој и другој релацији, а само ради симетрије и задовољења мнемотехничких правила у именитељу друге парне релације промениле су место sin A и sin C. Међутим ово међусобно замењивање у изведеним релацијама $\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)$ са $\sin\left(C+\frac{B}{2}\right)$ уз непромењене остале величине само је на први поглед контрадикторно, а теоретски је потпуно оправдано, јер из слике 7. видимо да је

$$\sphericalangle\left(A+\frac{B}{2}\right)=180^0-\sphericalangle BDA$$

$$\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)=\sin\ [180^0-\sphericalangle BDA]=\sin BDA,$$

а пошто је $\sphericalangle BDA$ спољни угао троугла BCD, то

$$\sphericalangle BDA=\frac{B}{2}+C$$

и $$\sin BDA=\sin\left(C+\frac{B}{2}\right),$$

а дакле и $$\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)\quad \sin\left(C+\frac{B}{2}\right) \qquad (45).$$

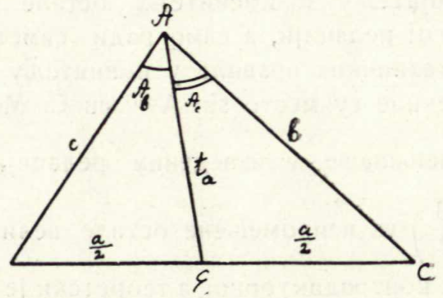
Пошто је $A+B+C=180^0$,

онда $$A+\frac{B}{2}=180^0-\left(C+\frac{B}{2}\right),$$

или су другим речима углови $A+\frac{B}{2}$ и $C+\frac{B}{2}$ суплементни.

На слици 8 повукли смо трансверзалу $ta = A\Sigma$.

A_b и A_c су налегли углови са трансверзалом која спаја врх A са средином наспрамне стране „a“ као заједничким краком. Стране „a“, „b“ и „c“ и индекси код углова a, b, c (A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b.) мењају се у цикличном реду. Тако, за трансверзалу ta, страну „a“ и другу страну дотичног троугла „b“ индекс је „c“, за страну „a“ и другу страну „c“ индекс је „b“ ит.д. Овај индекс код угла доле десно показује која је страна троугла ABC други крак дотичног угла код трансверзале (тако, за случај ако се ради о трансверзали ta, а индекс код угла је „c“, онда други крак угла је „b“ ит.д.).



Слика 8.

$$\sphericalangle Ab + \sphericalangle Ac = \sphericalangle A$$

Из $\triangleleft$ AEC имаћемо употребом основне Торповљеве релације за троуглове да је

$$\frac{ta}{\sin C} = \frac{\frac{A}{2}}{\sin Ac}$$

одакле $\quad ta.\ \sin Ac = \frac{a}{2} \sin C$

и $\quad \frac{2ta.\ \sin Ac}{\sin C} = a \qquad (46).$

Да бисмо довели ову једнаџбу у везу са релацијом реда Торопова поделићемо леву и десну стране ове релације са sin A и добићемо:

$$\frac{2ta.\ sin\ Ac}{sin\ A\ sin\ C} = \frac{a}{sin\ A} = 2R \qquad (48).$$

На исти начи из $\triangleleft$ ABE имамо:

$$\frac{ta}{\sin B} = \frac{\frac{a}{2}}{\sin Ab},$$

дакле $\quad ta. \sin Ab = \frac{a}{2} \sin B$

и даље $\quad \frac{2ta. \sin Ab}{\sin B} = a \qquad (48).$

И овде да бисмо довели ову (48) једнаџбу у везу се релацијама реда Торопова поделићемо леву и десну стране једнаџбе са sin A и имаћемо

$$\frac{2ta.\ sin\ Ab}{sin\ A.\ sin\ B} = \frac{a}{sin\ A} = 2R \qquad (49).$$

Коначно релације које садрже трансверзалу ta изгледаће из (47) и (49) овако:

$$\frac{2ta.\ sin\ Ac}{sin\ A.\ sin\ C} = \frac{2ta.\ sin\ Ab}{sin\ A.\ sin\ B} = \frac{a}{sin\ A} = 2R \qquad (50)\cdot$$

Аналогне релације за друге две трансверзале изгледају овако;

$$\frac{2tb.\ \sin Ba}{\sin B.\ \sin A} = \frac{2tb.\ \sin Bc}{\sin B.\ \sin C} = \frac{2tc.\ \sin Ca}{\sin C.\ \sin A} = \frac{2tc.\ \sin C_b}{\sin C.\ \sin B} = 2R$$

И овде смо према томе добили по две релације које садрже једну те исту твансверзалу, а ушле су и нове величине, и то налегли углови Ab и Ac, Ba и Bc, Ca и Cb.

На крају надопунићемо Тороновљев ред тригонометријских релација са нашим релацијама за симетралу угла и трансверзтлу, који ће према томе сада изгледати овако:

$$\frac{a}{sin\ A} = \frac{a+b}{2cos\frac{A-B}{2}\ cos\frac{c}{2}} = \frac{a-b}{2sin\frac{A-B}{2}\ sin\frac{c}{2}} =$$

$$= \frac{p}{2cos\frac{A}{2}\ cos\frac{B}{2}\ cos\frac{c}{2}} = \frac{p-a}{2cos\frac{A}{2}\ sin\frac{B}{2}\ sin\frac{c}{2}} = \frac{ha}{sin\ B.\ sin\ C}$$

$$= \frac{\sqrt{2Q}}{\sqrt{sin\ A.\ sin\ B.\ sin\ C}} = \frac{r}{2sin\frac{A}{2}\ sin\frac{B}{2}\ sin\frac{c}{2}} = 2R =$$

$$= \frac{Sa. \sin\left(B + \frac{A}{2}\right)}{\sin B. \sin C} = \frac{2ta. \sin Ab}{\sin A. \sin B}$$

Дакле и у основни ред релација увели смо само по једну релацију за симетралу и трансверзалу, јер су друге, парне релације симетричне с обзиром на улазеће у једнацбе елементе троугла и могу се написати по аналогији. Исто тако могу се добити по аналогији и формуле за другу и трећу симетрале S_b и Sc и за другу и трећу трансверзале t_b и tc.

Као што се види скоро сва линијска тригонометрија и сви случајеви за решавање троуглова сконцентрисани су у једном елегантном реду симетричних тригонометријских релација. Саме формуле реда Торопова заузимају једва један исписани ред на обичном канцеларијском арку хартије. Једном изведене формуле памте се лако, манипулација је са формулама једноставна, прегледност је обезбеђена већ и стога што су све формуле симетричне и све повезане међусобном једнакошћу. Рационализацијом и систематизацијом ослобађамо се сувишних замора и психичког лутања по несређеној гомили формула и констаната, које морамо памтити и држати у глави пре него што приступамо решавању тригонометријског проблема. Генијално решење је увек нај простије и најприродније и стога чак и у најмањим свакодневним ситницама морамо тежити упрошћавању, ослобађајући се сувишних напора, и чувајући енергију за племенитије напоре. Проматрајући проблем са овог гледишта морамо признати методи Торопова предност пред класичном методом решавања тригонометријских задаћа, код које смо мање више остављени случајном надахнућу које мора изазвати у нашој меморији праву и најзгоднију формулу, која ће се моћи користити у сваком конкретном случају. Улога тог надахнућа и памћења сведена је код Тороповљеве методе на минидум, јер ред из којег ће се вадити потребна формула, увек је ту, на нашем минималном потсетнику.

Систематизација формула и рачунских операција има нарочиту улогу у геодезији и у астрономији, где се скоро сва научна сазнања темеље на математским израчунавањима, а пошто код данашњег стања математско рачунских помагала још увек смо и превише упућени на спори рачунски рад човека, који тек делимично замењује рачунска машина. Рационалном систематизацијом формула, метода и поступака рачунски се рад убрзава. Ред Торопова са својим сређеним повезаним низом међусобно једнаких тригонометријских релација олакшава рачунски рад већ у првој, најсуптилнијој фази рачунања — код избора тригонометријских формула потребних за сваки задани конкретни случај.

Hadžiabdić Muhamed, geom.

Evolucija baštinskog vlasništva i ustrojstvo tapijskog sistema u Srbiji.

II. Evolucija baštinskog vlasništva u novoj srpskoj državi

Zaista je teško raspravljati o stvarima, koje su davninom posvećene. One, kao da su ušle u samu prirodu, u krv i duša naraštaja, kao da su postale dijelom samih individualnosti. Te stare socijalne vrednote prate nas skoro na svakom koraku i čini se, kao da su nam sasvim poznate i bliske, a nijesu rijetki slučajevi, da je baš sasvim obrnuto. Često prolazimo pored neke stvari ili osobe i mislimo, da nam je skroz poznata. A kada je nestane i treba da se sjetimo svih njenih pojedinosti, tada tekar vidimo, da ju baš nikako nismo poznali.

Oko starih socijalnih vrednota ispleo se nimbus svetosti i neoborive vrijednosti, da je često o tim stvarima moguće samo dobro i pohvalno govoriti. Ove su nam stvari katkada toliko bliske, da je radi njihova upoznavanja potrebno, da se od njih malo odmaknemo, da nam pogled ne zaklanja njihova sjenka.

Gledamo li stare naše ustanove očima zamagljenim od nasljeđenog ushićenja, mi od svega nećemo baš ništa vidjeti. Da saznamo pravu njihovu bit i sadržinu, treba da s njih skinemo ovječeni aureol davnine o svetosti. Kada se pred nama ukažu razgolićeni i prosti od predanja, onda ćemo sagledati istinu u njima.

Time ne ćemo oskvrnuti svetinje naše, jer istina je prva i najveća svetinja. A istina se nikada ne nalazi na površini stvari. Često treba dugo i muke i pregaranja, pa da se do nje dođe.

Pa i kada bi koja od starih socijalnih vrednota tim ispitivanjem izgubila što od svoje vrijednosti, kada bi istina o njima