Поштарина плаћена у готову.

Год. 16. Београд, јануар и фебруар 1935. Св. 1.

ГЕОМЕТАРСКИ И ГЕОДЕТСКИ ГЛАСНИК

Орган Удружења Геометара и Геодета Краљевине Југославије

Адмирала Гепрата 68 БЕОГРАД Адмирала Гепрата 68

Уредништво и администрација Гепратова ул. 68	Власник за Гл. управу **Милан Мравље** нар. посланик. Уредник **Димитрије Милачић**, геометар	Излази у два месеца једанпут. Поједини број 10 дин.

Geod. **Stjepan Horvat**

Neke napomone kod računanja geodetskih koordinata po Clark-ovim formulama

I.

Clark-ove formule za rješavanje gornje zadaće bezuvjetno predstavljaju najpovoljnije riješenje — doduše samo aproksimativno, ali za običajne dimenzije dovoljno tačno — te je zato i upotrebljeno kod našeg državnog premjera. Kako je poznato, ova, inače dosta slojena, zadaća rješava se kod Clark-ovih formula upotrebom Legendre-ovog pravila po zakonima ravne trigonometrije, pri čemu se iskorišćuju dva pravokutna sferna trokuta, a njihovi se ekscesi računaju iz ravne površine trokuteva. Riješenje je izvedeno za plohu kugle, a pri prelazu na elipsoid nadomješteni su sferni lukovi sa sferoidnom upotrebom meridijanskog, normalnog i srednjeg radija krivine.

U glavnom aproksimacija je toliko tačna, da zadovoljava i najtačnije praktične račune Da ipak znademo, do kojih se dimenzija mogu još dobiti dovoljno tačne praktične vrijednosti za pojedine veličine, pokušaću, da ispitam tačnost aproksimacije u pojedinim izrazima. Ujedno navođam i praktički povoljne oblike za tačnije izraze, koje poznate formule ne sadrže.

Odmah ću navesti, da kod primjene Legendre-ovog pravila valja razlikovati dva slučaja. Prvi — ujedno tačniji — slučaj nastaje onda, kada odgovarajuće sferne ekscese računamo ne iz ravne, nego iz zakrivljene površine trokuteva U drugom slučaju zadovoljavamo se sa manje tačnom aproksimacijom t. j. sferne ekscese određujemo iz ravne površine trokuteva. Kako ćemo viditi između oba načina razlika je u tome, što kod prvog uzimamo kod pojedinih dimenzija i veći dio članova pete potencije, koji su kod drugog gotovo napušteni Odatle će slijediti nužan zaključak, da se uopće područje Legendre-ovog pravila dade nešto povećati, ako se upotrebi ovakovo, prvo navedeno, tačnije riješenje

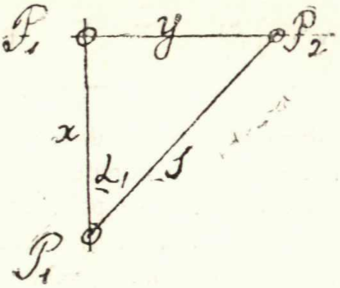
Da razgledanje bude jasnije, navešću glavne misli kod Clark-ovih formula.

Zadatak je: Iz dužine geodetske linije između dviju tačaka, njezinog azimuta u jednoj tački i geodetskih koordinata ove tačke izračunati geodetske koordinate druge tačke.

Pomoću analogija na sferi Clark rješava gornju zadaću tako, da se kroz nepoznatu tačku položi geodetska linija okomito na meridijan zadane tačke. Na taj način dobijamo pravokutni sferoidni trokut, u kojem je zadana jedna stranica (s) i jedan azimut (α_1). Ovaj trokut rješava se pomoću Legendre-ovog pravila tako, da se is stranice s i kuta α_1 izračuna sferni eksces ε za kuglu sa srednjim radijem zakrivljenosti za srednju širinu trokuta. Ovakovo zamjenjivanje sferoidnog sa sfernim trokutom daje praktički stroge vrijednosti, je se srednji radij zakrivljenosti relativno polagano mijenja (t, j. sferni eksces praktički ostaje nepromjenjen, ako upotrebimo srednji radij zakrivljenosti i za koju drugu tačku trokuta). Stranice — katete trokuta — izražavaju se odmah u sekundnoj mjeri i to: x se predstavlja odmah kao razlika širina na odgovarajućem merdijanskom luku množenjem sa $\frac{\rho''}{\mu}$, a y kao luk okomite krivine množenjem sa $\frac{\rho''}{N}$. M i N su meridijansk i normalni radij zakrivljenosti elipsoida i to M za srednju širinu $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_1')$, a N za širinu φ_1'. Tačnije bi bilo, da se N odredi za srednju širinu linije $P_1' P_2$, ali jer je razlika između Širina obih točaka uvijek vrlo mala, ostaje u upotrebi gore spomenuta aproksimacija.

Prema tome gore opisani posao izveđen je po ovim formulama:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\rho''}{2\sqrt{M_m N_m}} s^2 \sin \sigma_1 \operatorname{cis} \alpha_1 \\ x &= \frac{\rho''}{M_m} s \cos (\alpha_1 - \frac{2}{3} \varepsilon) \\ y &= \frac{\rho''}{N'} s \sin (\alpha_1 - \frac{1}{3} \varepsilon) \\ \varphi_1' &= \varphi_1 + x \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$



Слика 1.

Srednja širina φ_m računa se aproksimativno pomoću izraza:

$$\varphi_m = \varphi_1 + \frac{1}{2} \frac{\rho''}{\mu_1} s \cos \alpha_1$$

U jednadžbama pod (1) imademo više aproksimacija. U prvom redu predstavlja jednadžba za sferni — odnosno sfervidni — eksces samo približnu vrijednost. Zatim i same formule za x i y nisu drugo nego apoksimativne vrijednosti. Napokon odnos između x — t. j. dužine meridijanskog luka — i razlike odgovarajućih širina nije potpuno tačno izražen po zadnjoj jednadžbi*) vrlo važno, da se ispita, kolika je tačnost ovih aprokirmacija. Drugim riječima treba ispitati, do kojih maksimalnih dimenzija daju ove jednadžbe još praktički prihvatljivu tačnost.

U daljem toku rješavanja zadaće treba odrediti odnos između geografske širine tačaka P_1' i P_2, te odrediti razliku dužina l, koja odgovara okomitom lnku y i meridijansku konvcrzenciju $\alpha_2 - \alpha_1$. I ovdje je Clark upotrebio sferne analogije, te je iskoristio radi što jednostavnijeg praktičnog računa t. zv. suplementarni trokut, koji nastaje produženjem odnosnih lukova do pola i ekvatora kugle.

*) Pod (A). Svakako je interesantno i za praktičnu primjenu gornji jednadžbi.

Na taj način dobijamo, da je:

$$\varphi_2 = \varphi_1' + \vartheta$$

gdje je ϑ sfern, eksces ovoga suplementarnoga trokuta, a određuje se u prvoj aproksimaciji ovako:

$$\vartheta = \frac{1}{2\rho''} \cdot \frac{M'}{N'} y^2 \operatorname{tg} (\varphi_1 + x) \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Upotrenimo li i u ovom trokuiu Legendre-ovo pravilo, dobijamo da je:

$$\left.\begin{array}{ll} l = y \sec (\varphi_2 + \frac{1}{3} \vartheta) & \gamma = l \sin (\varphi_2 + \frac{2}{3} \vartheta) \\ \alpha_2 - \alpha_1 = \gamma - \varepsilon & \end{array}\right\} \; . \; . \quad (3)$$

Tačnost aproksimacija u ovom drugom dijelu zadatka možemo lako ispitati djelomice ispoređenjem sa tačnosti formula u prvom djelu zadatka, a djelomice pomoću činjenice, da y i x nisu drugo nego sferoidne Soldnerove koordinate tačke P_2 sa ishodišnim meridijanom kroz tačku P_1. Odnos pak između geografskih — ili geodetskih — i Soldner-ovih koordinata je u literaturi poznat tačno, te je prema tome tačnost riješenja u drugom dijelu zadatka lako ispitati.

Da dobijemo jasnu sliku o tačnosti pojedinih formula, ispitaćemo ih podrobnije.

1. Sferni — ili sferoidni — eksces trokuta $P_1\ P_1'\ P$.

Već smo ranije rekli, da radi iskorišćavanja sfernih formula nadomještavamo sferoidni trokut sa sfernim na taj način, da uzmemo srednji radij zakrivljenosti za srednju širinu trokuta: $\varphi = \frac{1}{3} (\varphi_1 + \varphi_1' + \varphi_2)$. Da ovakovo rtješenje možemo smatvati praktički posve strogim, može se dokazati podrobnijim ispitivanjem područja projiciranja Gauss-ove kugle, jer gore spomenutom postupku ne činimo ništo drugo, nego na području našeg trokuta nadomještavamo elipsoid Gauss-ovom konformnom kuglom. A za ovakav slučaj možemo nadomjestiti i vrlo velike sferoidne likove sa sfernim, a da deformacije ipak ostanu u nezamjetljivo malenim granicama. Iz ove konstatacije slijedi, da ćemo ostati u granicama i najtačnijeg praktičnog računanja, ako u mjesto srednje širine trokuta uzmemo — kake se to vidi iz prve jednadžbe pod (1) — srednju širinu između tačaka P_1 i P_1'.

U prvoj formuli pod (1) računali sme sferni eksces iz ravne površine trokuta, a to već nije ni izdaleka tako tačna aproksimacija kao gore spomenute. Kako možemo smatrati sferne i sferoide dimenzije trokuta $P_1\ P_1'\ P_2$ potpuno indentičnima, to se možemo ograničiti samo na sferna ispitivanja. Za eksces jednog sfernog pravokutnog trokuta imademo, ovakovu strogu vrijednost:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} s \sin 2\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} s \cos 2\alpha_1}$$

Ovdje je s izraženo u analitičkoj mjeri.

Razvijemo li gornju jednadžbu u red po potencijama od s i to do članova za 4. potencijom, to ćemo dobiti, da je:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} s^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 \left[1 + \frac{1}{12} s^2 (2 - 3\cos^2\alpha_1 + 3\sin^2\alpha_1\right]$$

ili
$$\varepsilon = \frac{1}{2} s^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 \left[1 + \frac{1}{12} s^2 (5\sin^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_1)\right] \quad . \quad . \quad (4)$$

Označimo li približnu vrijednost ekscesa — računatu iz ravne površine trokuta — : $(\varepsilon) = \frac{1}{2} s^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1$, to će biti:

$$\varepsilon - (\varepsilon) = \triangle\varepsilon = \frac{s^4}{24} \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 (5\sin^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_1) \quad . \quad . \quad (5)$$

upravo ona veličina, koju smo zanemarili računajući eksces po prvoj aproksimaciji : $(\varepsilon) = \frac{1}{2} s^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1$. Da ispitamo, kolika je maksimalna vrijednost ovoga zanemarenja, moramo ustanoviti, kada će kod izvjesne stranice s biti $\triangle\varepsilon$ maksimalna bilo pozitivna bilo negativna veličina. Drugim riječima valja da ustanovimo, kada će izraz :

$$\sin\alpha_1 \cos\alpha_1 (5\sin^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_1) = f(\alpha)$$

biti maksimum ili minimum. Za oba slučaja mora biti prva derivacija funkcije f (α) jednaka mili. Dakle:

$$\frac{d f(\alpha)}{d\alpha} = 15\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_1 - 5\sin^4\alpha_1 - \cos^4\alpha_1 + 3\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_1 = 0$$

ili
$$= 18\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_1 - 5\sin^4\alpha_1 - \cos^4\alpha_1 = 0$$

ili
$$= \operatorname{tg}^4\alpha_1 - \frac{18}{5}\operatorname{tg}^2\alpha_1 + \frac{1}{5} = 0$$

Odavde slijodi, da će gornja funkcija imati maksimalnu apsolutnu vrijednost za slučaj, da bude:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_1 = \frac{9}{5} \pm \frac{1}{5} \sqrt{76} \qquad \text{ili} \qquad \alpha_1' = \pm 62^\circ 01'$$
$$\alpha_1'' = \pm 13^\circ 20'$$

Prema tome maksimalni uticaj zanemarenja sfernih članova kod računanja sfernog ekscesa može biti:

$$\text{kod stanice } s = 100 \text{ km} : \triangle\, \varepsilon = \pm\, 0''.00079$$
$$s = 200 \text{ km} : \triangle\, \varepsilon = \pm\, 0''.0126$$

Dakle vidimo, da se pri redovitim dimenzijama i kod trigonometričke mreže prvog reda može sferni eksces računati po skraćenoj formuli:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\, s^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1$$

Greška zanemarenja članova sa višom potencijom i kod maksimalnih stranica I. reda jedva da uopće dolazi do praktičkog izražaja čak i onda, ako se radi o najtačnijem računanju.

Za slučaj, da ipak želimo odrediti i ovaj uticaj, to možemo jednadžbu (4) svesti na takav oblik, koji će praktično računanje u velikoj mjeri uprostiti.

Kod izraza u zagradi uvrstićemo: $s^2 = \dfrac{2\,(\varepsilon)}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}$

pa ćemo dobiti, da je:

$$\varepsilon = (\varepsilon) \left[1 + \frac{5}{6} \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot (\varepsilon) - \frac{1}{6} \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot (\varepsilon) \right]$$

ili, ako ovaj izraz razvijemo u logaritmički oblik:

$$\log \varepsilon = \log (\varepsilon) + \frac{5}{6} \mu \operatorname{tg} \alpha_1 = g\, \alpha_1 - (\varepsilon) - \frac{1}{6} \mu \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot (\varepsilon)$$

Obzirom na to, da je $\mu \operatorname{tg} \alpha^1 = \triangle_c$ promjena logaritma $\cos \alpha_1$ za jedinicu u apsolutnom iznosu, a $\mu \operatorname{tg} \alpha_1 = \triangle_s$ promjena $\log \sin \alpha_1$, to možemo pisati konačno, da je:

$$\log \varepsilon = \log (\varepsilon) + \left(\frac{5}{6} \triangle_c - \frac{1}{6} \triangle_s \right) (\varepsilon) \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Ovdje je izraženo u sekundama:

$$(\varepsilon) = \frac{\rho''}{2 \sqrt{M_m N_m}}\, s^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1$$

Gornja jednadžba omogućava računanje tačne vrijednosti za (ε) bez većih poteškoća, pošto pri određenju $\log \sin \alpha_1$ i $\log \cos \alpha_1$ lako iz tablica ispišemo promjene njihove za $1''$. Pri tome ne smijemo zaboraviti, da se korekcija u jednadžbi (5) uvijek dodaje log (ε).

2. Određivanje veličina x i y.

Kako se dade razabrati iz ranijeg razlaganja ove veličine možemo određivati iz dvije vrste aproksimacija. Iz jedne, koja će biti tačnija, i kod koje računamo ove veličine pomoću Legendre-ovog pravila tako, da upotrebimo tačniju vrijednost ekscesa, i iz druge, kod koje zanemarujemo pri računanju ekscesa sferne članove.

Računamo li x i y na prvi način i uzmemo li samo sferni slučaj, to ćemo imati ovakove formule:

$$\left.\begin{aligned} x &= s \sec \frac{1}{3} \varepsilon \cos \left(\alpha_1 - \frac{2}{3} \varepsilon\right); \\ y &= s \sec \frac{1}{3} \varepsilon \sin \left(\alpha_1 - \frac{1}{3} \varepsilon\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (6)$$

Na drugi način računamo ih ovako:

$$x = s \cos \left[\alpha_1 - \frac{2}{3} (\varepsilon)\right]; \qquad y = s \sin \left[\alpha_1 - \frac{1}{3} (\varepsilon)\right] \quad (7)$$

I u jednom i u drugom slučaju promatramo ove veličine kao sferne veličine, što možemo obzirom na ranije spomenuto svakako učiniti. Isto tako x, y, s uzimamo za sada u analističkoj mjeri.

Stroge pak sferne formule glase:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} s \cos \alpha_1; \qquad \sin y = \sin s \sin \alpha_1 \quad . \; . \; (8)$$

Sada lako možemo ispoređenjem jednadžbi (6) i (7) sa (8) ustanoviti tačnost citiranih aproksimativnih riješenja. U tu svrhu razvićemo sve tri grupe jednadžbi u redove sa potencijama od s, pa ćemo dobiti:

Stroge vrijednosti do inkluzive 5. reda:

$$\left.\begin{aligned} x &= s \cos \alpha_1 + \frac{1}{3} s^3 \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 + \\ &+ \frac{1}{15} s^5 \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 (2 \sin^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_1) \\ y &= s \sin \alpha_1 - \frac{1}{6} s^3 \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 - \\ &- \frac{1}{120} s^5 \sin^2 \alpha_1 \operatorname{soc} \alpha_1 (\gamma \sin^2 \alpha_1 - \operatorname{soc}^2 \alpha_1) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (8a)$$

Tačnija aproksimacija sa ε:

$$\left.\begin{aligned} (x)_1 &= s\cos\alpha_1 + \frac{1}{3}s^3\sin^2\alpha_1\,\mathrm{soc}\,\alpha_1 + \\ &+ \frac{5}{72}s^5\sin^2\alpha_1\,\mathrm{soc}\,\alpha_1\,(2\sin^2\alpha_1 - \mathrm{soc}^2\alpha_1) \\ (y)_1 &= s\sin\alpha_1 - \frac{1}{6}s^3\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1 - \\ &- \frac{1}{72}s^5\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1\,(5\sin^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_1) \end{aligned}\right\} \ldots (6a)$$

Druga aproklimacija sa (ε):

$$\left.\begin{aligned} (x)_2 &= s\cos\alpha_1 + \frac{1}{3}s^3\sin^2\alpha_1\cos\alpha_1 - \frac{1}{18}s^5\sin^2\alpha_1\cos^3\alpha_1 \\ (y)_2 &= s\sin\alpha_1 - \frac{1}{6}s^3\sin\alpha_1\cos^3\alpha_1 - \frac{1}{72}s^5\sin^3\alpha_1\cos^2\alpha_1 \end{aligned}\right\} \ldots (7a$$

Diferencijama odgovarajućih veličina između jednadžbi (8a) i (6a) dobijamo razlike između strogih vrijednosti i tačnije aproksimacije:

$$\left.\begin{aligned} x - (x)_1 &= -\frac{1}{360}s^5\sin^2\alpha_1\cos\alpha_1\,(2\sin^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_1) \\ y - (y)_1 &= +\frac{1}{360}s^5\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1\,(\sin^2\alpha_1 - 2\cos^2\alpha_1) \end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

Na isti način dobijamo analognim postupkom između jednadžbi (8a) i (7a), da je:

$$\left.\begin{aligned} x - (x)_2 &= \frac{1}{360}s^5\sin^2\alpha_1\cos_1\,(48\sin^2\alpha_1 - 4\cos^2\alpha_1) \\ y - (y)_2 &= -\frac{1}{360}s^5\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1\,(19\sin^2\alpha_1 - 3\cos^2\alpha_1) \end{aligned}\right\} .. (10)$$

Kako vidimo, i jedno i drugo riješenje pokazuje otklon u članovima sa 5. potencijom od s. Tada se radi o tome da ustanovimo, kolika maksimalna pogreška može nastati u veličinama x i y usljed jedne i druge aproksimacije. U tu svrhu moramo ispitati, koje maksimalne pozitivne i negativne vrijednosti mogu imati funkcije kuta α u jednadžbama (9) i (10). Prvo ćemo to odrediti za jednadžbe pod (9). Imamo naime:

$$\left.\begin{aligned} f_1(\alpha) &= 2\sin^4\alpha_1\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos^3\alpha \\ f_2(\alpha) &= \sin^3\alpha_1\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos^4\alpha \end{aligned}\right\} = \begin{matrix}\max.\\ \min.\end{matrix}$$

Odmah možemo zaključiti, da je druga jednadžba po formi identična sa prvom, ako uzmemo u obzir u drugoj umjesto $\alpha : 90 - \beta$. Stoga će biti dosta da odredimo pozitivni i negativni maksimum za prvu jednadžbu. Ovo će bi, ako bude zadovoljen uslov:

$$\gamma \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha - 2 \sin^5 \alpha - 2 \sin \alpha \cos^4 \alpha + 3 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha = 0$$

ili

$$\cos^4 \alpha - \frac{11}{2} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha = 0$$

ili

$$\mathrm{tg}^4 \alpha - \frac{11}{2} \mathrm{tg}^2 \alpha + 1 = 0$$

Odavde slijedi, da je:

$$\mathrm{tg}^2 \alpha = \frac{11}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{105} \quad \text{ili} \quad \mathrm{tg}\, \alpha' = \pm 2.304$$

$$\mathrm{tg}\, \alpha'' = \pm 0.440$$

Dakle imademo konačno ove vrijednosti azinuta, za koje ćemo imati najveće apsolutne vrijednosti gornjih funkcija:

$$\alpha' = \pm 66^\circ 34' \qquad \alpha'' = \pm 23^\circ 26'$$

Za gornje vrijednosti dobijamo kod stranica $s_{max} = 200$ km, da je

$$| x - (x) |_{max} = | y - (y) |_{max} = \pm 0.''000009$$

Vidimo dakle, da i kod ovako velikih stranica od 200 km aproksimacija pod (6) daje potpuno tačne vrijednosti. Drugim rečima to znači, da za praktične ciljeve možemo ove aproksimacije unutar dimenzija od 200 km smatrati potpuno strogima.

Za slučaj, da i ovakove kolekcije uzimamo u račun, možemo to učiniti na ovaj način:

$$\left.\begin{aligned} x &= (x)_1 \left[1 - \frac{1}{720} y^2 s^2 (1 - 3 \cos 2 \alpha_1)\right] \\ y &= (y)_1 \left[1 + \frac{1}{720} x^2 s^2 (1 + 3 \cos 2 \alpha^1)\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

gde označava:

$$(x)_1 = s \sec \frac{1}{3} \varepsilon \cos \left(\alpha_1 - \frac{2}{3} \varepsilon\right) \quad ; \quad (y)_1 = s \sec \frac{1}{3} \varepsilon \sin \left(\alpha_1 - \frac{1}{3} \varepsilon\right)$$

Eksces ε računat je u ovom slučaju po tačnijoj formuli.

U logaritničkom obliku izgledaće jednadžbe (11) ovako:

$$\left.\begin{aligned} \log x &= \log (x)_1 - \frac{\mu}{720} (1 - 3 \cos 2 \alpha_1)\, s^2 y^2 \\ \log y &= \log (y)_1 - \frac{\mu}{720} (1 + 3 \cos 2 \alpha_1)\, s^2 x^2 \end{aligned}\right\} \quad (11a)$$

U tom slučaju određuju se veličine $\frac{\mu}{720} (1 - 3 \cos 2 \alpha_1)$; $\frac{\mu}{720} (1 + 3 \cos 2 \alpha_1)$ iz posebnih — u tu svrhu priređenih — tablica.

Sada ćemo ispitati maksimalne vrijednosti u jednadžbama (10). Tamo smo imali:

$$\left.\begin{aligned} f_3 (\alpha) &= 48 \sin^4 \alpha \cos \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha \\ f_4 (\alpha) &= 19 \sin^3 \alpha \cos \alpha^2 - 3 \sin \alpha \cos^4 \alpha \end{aligned}\right\} = \begin{matrix} \text{max.} \\ \text{min.} \end{matrix}$$

Na poznati način možemo dobiti ovakove vrijednosti za prvu jednadžbu:

$$\alpha' = 64^\circ\, 00' \quad \alpha'' = 11^\circ\, 15'$$

Ako uvrstimo maksimalnu vrijednost $\alpha = 64^\circ$, to će korekcioni član iznašati $\mp 0{,}''00005$ istom kod stranice $s = 147$ km. To dakle znači, da i druga manje tačna aproksimacija za x daje dovoljno tačne vrijednosti i kod dužina od 140 km. Dotle prva tačnija aproksimacija dozvoljava istu tačnost na $\mp 0{,}''00005$ i kod dužine stranica od 280 km.

Na isti način možemo ispitati i formulu za y, pa ćemo dobiti, da će maksimalni uticaj kod korekcionog člana biti za slučaj, da bude:

$$\alpha' = 53^\circ\, 05' \text{ ili } \alpha'' = 11^\circ\, 55'.$$

Uprostimo li vrijednost za $\alpha = 53^\circ\, 05'$, to dobijamo da će korekcioni član ovđe iznosi $\mp 0{,}''00005$ istom kod stranice od 192 km. Tako vidimo i ovđe, da obična aproksimacija, koja se kod Clark-ovih formula upotrebljava daje za sve triangulacione strane dovoljno tačne rezultate. Dakle i kod stranica preko 100 km možemo smatrati kao potpuno tačne ove formule:

$$x = s \cos \left(\alpha_1 - \frac{2}{3} \varepsilon\right) \qquad y = s \sin \left(\alpha_1 - \frac{1}{3} \varepsilon\right)$$

$$\text{gđe je } \varepsilon = \frac{1}{2} s^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1$$

Za slučaj da Legendre-ovo pravilo želimo primeniti na vrlo druge stranice (kod rješavanja raznih sfernih odnosno sferoidnih zadaća), možemo iskoristiti jednadžbe (11 a) sa ili bez korekcionih članova već prema tome, da li se radi o većim ili manjim stranicama od 280 km.

Ostaje nam još, da ispitamo, kolika je tačnost prelaza od dužine meridijanskog luka x na razliku geodetskih širina $\varphi'-\varphi$. U tu svrhu uzećemo privremeno, da je x izraženo u linearnoj — metarskoj — mjeri. Za odnos između dužine meridijanskog luka i razlike širina imademo ovakovu jednadžbu:

$$x = \frac{M}{\rho''}(\varphi' - \varphi_1) + \frac{M}{\gamma V^4 \rho^3}\eta^2(1-t^2+\eta^2+4\eta^2 t^2)(\varphi'-\varphi_1)^3$$

Ovde označavaju M, η, V, t funkcije srednje širine φ_m i to: M meridijanski radij krivine, $\eta^2 = \eta_2 \cos^2\varphi$, $V^2 = 1+\eta^2$, $t = \operatorname{tg}\varphi$.

Iz gornje jednadžbe doda se $(\varphi'-\varphi_1)$ izrazit sa x ovako:

$$(\varphi'-\varphi_1) = \frac{\rho''}{M}x - \frac{\rho''}{\gamma M^3 V^4}\eta^2(1-t^2+\eta^2+4\eta^2 t^2)x^3 \ldots (12)$$

Kod formula, koje se upotrebljavaju u Clarh-ovom riješenju, upotrebljen je samo prvi član gornje jednadžbe, dok je drugi član zanemaren. Greška ovog zanemarenja ovisi ne samo od veličine x, nego i od širine φ. Za naš teritorij može kolekcioni član iznositi najviše kod φ—40'. Odredimo li funkciju širine kod drugog člana za ovu vrijednost, to lako možemo zaključiti, da drugi član jednadžbe (13) ne dolazi do izražaja ($\pm$ 0,″00005) za slučaj, da je $x_{mak} = 74$ km.

Dakle kod uobičajene tačnosti računa mora se ovaj član uzeti uobzir kod stranica preko 70 km, ako se svodi o azimutima geodetske linije blizu O° ili 180°. Iz dosadanjeg ispitivanja ujedno zaključujemo, da Clark-ove formule zadovoljavaju po ovoj tačnosti za sve triangulacione strove ispod 70 km, a to znači da praktički uopće zadovoljavaju, jer se rijetko kada radi o dužim stranicama.

3. *Sferni eksces suplementarnog trokuta* ϑ.

Stroga formula za ovaj eksces glasi:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{1}\vartheta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}y \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$$

Razvijemo li ovu formulu u red, pri čemu ostajemo kod 4. potencije, dobićemo, da je:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \gamma\, y \left[1 + \frac{1}{12} y^2\right] \left[1 + \frac{1}{12} \gamma^2\right] \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Kako je $\gamma = y \dfrac{\sin (\varphi^2 + \frac{2}{3} \vartheta)}{\cos (\varphi_2 + \frac{1}{3} \vartheta)}$, a $\varphi_2 = \varphi_1 + x - \vartheta$

biće $\gamma = y \dfrac{\sin (\varphi_1 + x = \frac{1}{3} \vartheta)}{\cos (\varphi_1 + x - \frac{2}{3} \vartheta)}$

ili $\gamma = y \operatorname{tg} (\varphi_1 + x) \dfrac{1 - \frac{1}{3} \operatorname{ctg} (\varphi_1 + x)\, \vartheta}{1 + \frac{2}{3} t_g (\varphi_1 + x).\, \vartheta}$

Koristimo li u ovu jednadžbu približnu vrijednost

$$\vartheta = \frac{1}{2} y^2 \operatorname{tg} (\varphi_1 + x), \text{ biće:}$$

$$\gamma = y \operatorname{tg} (\varphi_1 + x) \left[1 - \frac{1}{6} y^2 - \frac{1}{3} y^2 \operatorname{tg}^2 (\varphi_1 + x)\right]$$

Ako sada ovakovu vrijednost uvrstimo u jednadžbu, (13), dobićemo za sferi eksces ϑ ovakovu formulu:

$$\vartheta = \frac{1}{2} y^2 \operatorname{tg} (\varphi, + x) \left[1 - \frac{1}{12} y^2 - \frac{1}{4} y^2 \operatorname{tg}^2 (\varphi_1 + x)\right] . \quad (14)$$

Za praktično računanje biće povoljnije, ako u ovu jednadžbu uvrstimo približno vrijednost $(\vartheta, = \frac{1}{2} y^2 \operatorname{tg} (\varphi_1 + x)$.
Možemo u tom slučaju pisati, da je:

$$y^2 = 2\, (\vartheta,)\, \operatorname{ctg} (\varphi_1 + x)$$
$$y^2 \operatorname{tg}^2 (\varphi_1 + x) = 2\, (\vartheta)\, \operatorname{tg} (\varphi_1 + x)$$

dakle:

$$\vartheta = (\vartheta) \left[1 - \frac{1}{6} \operatorname{ctg} (\varphi_1 + x)\, (\vartheta) - \frac{1}{2} \operatorname{tg} (\varphi_1 + x).\, (\vartheta)\right]$$

ili:

$$\log \vartheta = \log (\vartheta) - \frac{\mu}{6} \operatorname{ctg} (\varphi_1 + x)\, (\vartheta) - \frac{\mu}{2} \operatorname{tg} (\varphi_1 + x).\, (\vartheta) \ldots . (15)$$

Pomotrimo li bolje funkcije $(\varphi_1 + x)$, vidimo odmah da je:

$$\left.\begin{aligned}\Delta s &= \mu \operatorname{ctg}(\varphi_1 + x) = \text{promjena logaritma sinusa} \\ \Delta c &= \mu \operatorname{tg}(\varphi_1 + x) = \text{promjena logaritma cosinnsa}\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{u apsolutnoj} \\ \text{vrijednosti za}\end{array}$$

izvjesnu kutnu jedinicu.

Prema tome imademo konačno:

$$\log \vartheta = \log (\vartheta) - \left(\frac{1}{6} \triangle_s + \frac{1}{2} \triangle_c\right) (\vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Kod praktičnog računanja $\triangle_s$ i $\triangle_c$ uzimamo iz logaritničkih tablica odmah za $1''$ (i uvijek u apsolutnoj vrijednosti), a (ϑ) iz približnog delogaritmiranja. Produkt: $(\vartheta) \left(\frac{1}{6} \triangle_s + \frac{1}{2} \triangle_c\right)$ uvijek odbijamo od $\log (\vartheta)$.

Sada nastaje pitanje, do koje veličine od γ — je od ove veličine i ovisi pretežno veličina sfernog eksasa ϑ — možemo dobiti dovoljnu tačnost iz proste aproksimacije:

$$\vartheta = \frac{1}{2} y^2 \operatorname{tg} (\varphi_1 + \vartheta)$$

Ispoređenjem sa jednadžbom (14) odmah vidimo, da smo kod gornje aproksimacije zanemarili član sa četvrtom potencijom

$$\triangle \vartheta = - \frac{1}{24} y^4 \operatorname{tg} (\varphi_1 + x) \left[1 + 3 \operatorname{tg}^2 (\varphi_1 + x)\right]$$

Očito je, da faktor, koji ovisi o geografskoj širini, imade veću vrijednost čim je širina veća. Dakle za naše prilike imaće najveću vrijednost pri širini $\varphi = 46° 30'$. Kad ove pak širine iznašaće $\triangle \vartheta$ maksimalno $0,''00005$ za slučaj da je:

$$y_{max} = 1230''$$

a tu vrijednost može y maksimalno postići kod stranice:

$$s_{max} = 38 \text{ km}$$

Iz ovoga ispitivanja slijedi, da se kod triangulacije I. reda — ako se račun želi obaviti na tačnost od $0,''0001$ — mora kod određivanja ekscesa ϑ uzeti u obzir i koreksioni član $\triangle\vartheta$ počam od stranica s = 40 km.

Radi ilustracije navodimo:

s = 40 km;	$\triangle \vartheta_{max} = -0,''00006$
50	0,00015
60	0,00030
70	0,00056
80	0,00096
90	0,00157
100	$-0,''00230$

Dosada smo dakle ustanovili, da kod Klark-ovih formula ne daje dovoljnu tačnost jedino formula za računanje sfernog ekscesa ϑ, kako je to predviđeno t. j. u prvoj aproksimaciji, te da se ova formula mora korigirati i kod normalnih stranica I. reda,

Do inkluzive 4. potencije možemo eksces ϑ računati i ovako (isporedi formulu 14):

$$\log \vartheta = \log (\vartheta) - \frac{\mu}{12\,\rho^2}\left[1 + 3\,\mathrm{tg}^2\,(\varphi_1 + x)\right] y^2 \;.\;.\; (16)$$

Korekcioni se član ovđe može olakšano računati upotrebom specijalnih tablica za $\log \frac{\mu}{12\,\rho^2}\left[1 + 3\,\mathrm{tg}^2\,(\varphi_1 + x)\right]$ za argumenat $(\varphi_1 + x)$. Ovakove tablice prilažem.

φ	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°	47°
	— 20	— 20	— 20	— 20	— 20	— 20	— 20	— 20
00′	8.4228	8.4439	8.4653	8.4871	8.5093	8.5318	8.5548	8.5781
10	8.4263	8.4474	8.4689	8.4908	8.5130	8.5356	8.5586	8.5820
20	8.4298	8.4510	$\overset{+}{8.4725}$	$\overset{-}{8.4945}$	$\underset{-}{8.5167}$	8.5394	8.5625	8.5860
30	8.4333	8.4546	8.4762	8.4981	8.5205	8.5432	8.5664	8.5899
40	8.4368	8.4581	8.4798	8.5018	8.5242	8.5471	8.5703	8.5939
50	8.4404	8.4617	$\overset{-}{8.4835}$	$\overset{+}{8.5055}$	8.5280	8.5509	8.5742	8.5979
60′	8.4439	8.4653	8.4871	8.5093	8.5318	8.5548	8.5781	8.6019

Sa ovim bi direktni dio zadatka bio prikazan. Ostale su doduše još neke formule, koje nismo ispitivali, ali da ove daju u obliku u kom su prikazane potpuno tačne vrijednosti, biće jasno, ako uzmemo u obzir ono, što je rečeno kod određivanja veličina x i y.