Ing. Рудл Фрањо

Уплив грешке мерене стране у рачунским троугловима

Служећи се диференцијалима и облицима тригонометрије, доћи ћемо до тражених резултата.

Узмимо синусну теорему $a. \sin \beta = b. \sin \alpha$ . . 1.)

Углови и стране мерене су са извесном грешком, циљ нам је да нађемо г колико упливише грешка мерене стране на страну добивену рачунским путем.

Диференцирамо једначину 1.) Добићемо:

$$\triangle a. \sin \beta + a. \cos \beta. \triangle \frac{\beta''}{\rho''} = \triangle b \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\triangle \alpha''}{\rho''} \quad 2.)$$

да дођемо до згоднијег облика једначине, поделимо једначину 2.) са $a \cdot \sin \beta$ добићемо:

$$\frac{\triangle a}{a} + \operatorname{cotg} \beta. \frac{\triangle \beta''}{\rho''} = \frac{\triangle b}{a} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{b}{a} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{\triangle \alpha''}{\rho''}$$

пошто је $a. \sin \beta = b. \sin \alpha$ можемо писати

$$\frac{\triangle a}{a} + \operatorname{cotg} \beta. \frac{\triangle \beta''}{\rho''} = \frac{\triangle b}{b} + \operatorname{cotg} \alpha. \frac{\triangle \alpha''}{\rho''} \quad \text{односно}$$

$$\frac{\triangle a}{a} - \operatorname{sotg} \alpha. \frac{\triangle \alpha''}{\rho''} = \frac{\triangle b}{b} - \operatorname{sotg} \beta. \frac{\triangle \beta''}{\rho''} \quad . \ . \ 3.)$$

то ће нам бити основна формула за коси троугао.

Можемо се користити и једном другом формулом ако употребимо косинусну једначину:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c. \cos \alpha \ 4), \text{ диференцирајмо!}$$

добијемо: $2\ a. \triangle a = 2\ b. \triangle b + 2\ c. \triangle c + 2\ b. c. \sin \alpha, \frac{\triangle \alpha''}{\rho''} - 2 \triangle b. \cos \alpha - 2 \triangle c. b. \cos \alpha !$

$$a. \triangle a = b \triangle b + c. \triangle c - c. \cos \alpha. \triangle b - b. \cos \alpha. \triangle c + \underbrace{b. c. \sin \alpha.}_{a. \sin \gamma} \frac{\triangle \alpha''}{\rho''}$$

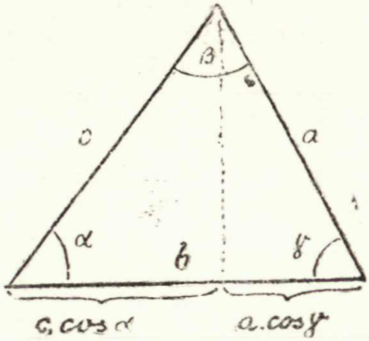
$$= (b - c. \cos \alpha) \triangle b + (c - b. \cos \alpha) \triangle c + a\, b. \sin. \gamma. \frac{\triangle \alpha''}{\rho''}$$

Из слике бр. 1 видимо да је $(b - c \cos \alpha) = a. \cos \gamma$ и $(c - b. \cos \alpha) = a. \cos \beta$

те ћемо добити:

$$a.\,\triangle a = a.\cos\gamma.\,\triangle b + a.\cos\beta.\,\triangle c + ab.\sin\gamma.\,\frac{\triangle\alpha''}{\rho''}\Big/ : a$$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle a = \cos\gamma.\,\triangle b + \cos\beta.\,\triangle c + b\sin\gamma.\,\frac{\triangle\alpha''}{\rho''} \\ \triangle b = \cos\alpha\,\triangle c + \cos\gamma.\,\triangle a + c\sin\alpha.\,\frac{\triangle\beta''}{\rho''} \\ \triangle c = \cos\beta.\,\triangle a + \cos\alpha.\,\triangle b + a\sin\beta.\,\frac{\triangle\gamma''}{\rho''} \end{array}\right\}\text{аналогно} \quad . \; . \quad 5.)$$



Сл. 1

Применимо формулу број 3 на истокрачни троугао.

Задатоt: $a = 85,00$ m, $\beta = \gamma$,

$\triangle a$ = грешка у мерењу стране $a = 0,15$ m, 0,30 m i 0,45 m a угао $\alpha = 15°, 20°, 30°, 40°, 50°$ и $60°$, који је уједно и најповољнији случај:

$$\triangle\alpha = \triangle\beta = \triangle\gamma = 20''.$$

Код истокрачног троугла бит ће $\triangle b = \triangle c$.

Формулу бр. 3 можемо писати у следећем облику:

$$\triangle b = \underbrace{\frac{b}{a}.\,\triangle a}_{1.\ \text{члан}} - \underbrace{b.\,\mathrm{cotg}\,\alpha.\,\frac{\triangle\alpha''}{\rho''}}_{2.\ \text{члан}} + \underbrace{b.\,\mathrm{cotg}\,\beta.\,\frac{\triangle\beta''}{\rho''}}_{3.\ \text{члан}}$$

1. **случај**: $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$

$$\triangle b = \triangle a = 0,15\ \text{m},\ 0,30\ \text{m},\ 0,45\ \text{m}.$$

2. **случај**: $\alpha = 50^0$, $\beta = 65^0$, $b = a.\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

a . . .	1.92942	2. члан b . . .	2.00245	3. члан b . . .	2.00245
sin β . . .	9.95728	cotg α . . .	9.92381	cotg β . . .	9.66867
cpl. sin α . . .	0.11575	△ α'' . . .	1.30103	△ α . . .	1.30103

b ... 2.00245 cpl. ρ'' ... 4.68557 — 10 cpl. ρ'' ... 4 68557 — 10

7.91286 — 10   7.65.772 — 10

$$2.\ \text{član} = -\ \underbrace{0{,}008\quad 3.\ \text{član} = +\ 0{,}005}_{-\ 0{,}003}$$

2. и 3 члан стални су за исти угао α, у нашем случају $\alpha = 50^0$.

Сада срачунамо величину 1. члана када је

1.) $\triangle$ a = 0,15	2.) $\triangle$ a = 0,30	3.) $\triangle$ a = 0,45
b ... 2.00245	b ... 2.00245	b ... 2.00245
cpl. a... 8.07058 — 10	cpl. ... 8.07058 — 10	cpl. a... 8.07058 — 10
$\triangle$ a... 0.17609 — 1	$\triangle$ a ... 0.47712 — 1	$\triangle$ a ... 0 65321 — 1
0.24912 — 1	0.55015 — 1	0.72624 — 1

$\frac{b}{a} \triangle a = 0{\cdot}177 \quad \frac{b}{a} \triangle a = 0.355 \quad \frac{b}{a} \triangle a = 0{\cdot}532$

А пошто је $\triangle b = 1. + 2 + 3.$ члан то је за

$\triangle a = 0{\cdot}15, \quad \triangle b = 0\ 174$
$\triangle a = 0{\cdot}30, \quad \triangle b = 0{\cdot}352$
$\triangle a = 0{\cdot}45, \quad \triangle b = 0{\cdot}529$

Аналогно поступамо код

3. **случаја**, када је $\alpha = 40^0$ $\beta = 70^0$ те добијемо за

$\triangle a = 0\ 15, \quad \triangle b = 0{\cdot}209$
$\triangle a = 0{\cdot}30, \quad \triangle b = 0{\cdot}429$
$\triangle a = 0{\cdot}45, \quad \triangle b = 0\ 648$

код 4. **случаја**, када је $\alpha = 30^0$, $\beta = 75^0$

за $\triangle a = 0{\cdot}15, \quad \triangle b = 0{\cdot}266$
$\triangle a = 0{\cdot}30, \quad \triangle b = 0{\cdot}556$
$\triangle a = 0\ 45, \quad \triangle b = 0\ 845$

код 5. **случаја**, када је $\alpha = 20^0$, $\beta = 80^0$

за $\triangle a = 0\ 15, \quad \triangle b = 0\ 371$
$\triangle a = 0\ 30, \quad \triangle b = 0{\cdot}803$
$\triangle a = 0{\cdot}45, \quad \triangle b = 1{\cdot}235$

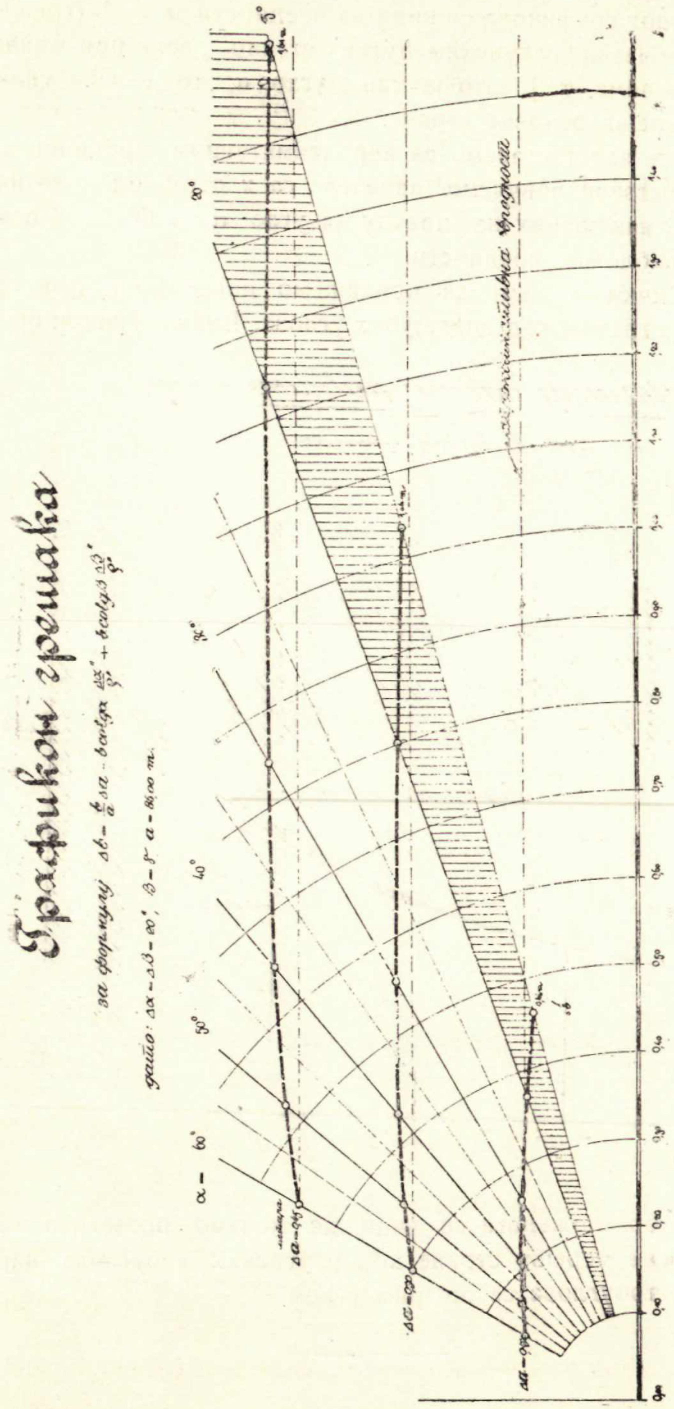
код 6. **случаја**, када је $\alpha = 15^0$, $\beta = 82^0\ 30'$

за $\triangle a = 0{\cdot}15, \quad \triangle b = 0.461$
$\triangle a = 0{\cdot}30, \quad \triangle b = 1{\cdot}035$
$\triangle a = 0{\cdot}45$ m. $\quad \triangle b = 1{\cdot}610$ m!!

Све ове податке можемо јасно илустровати у следећем графикону.

Графикон

Када се ово нацрта добија се следећи графикон:



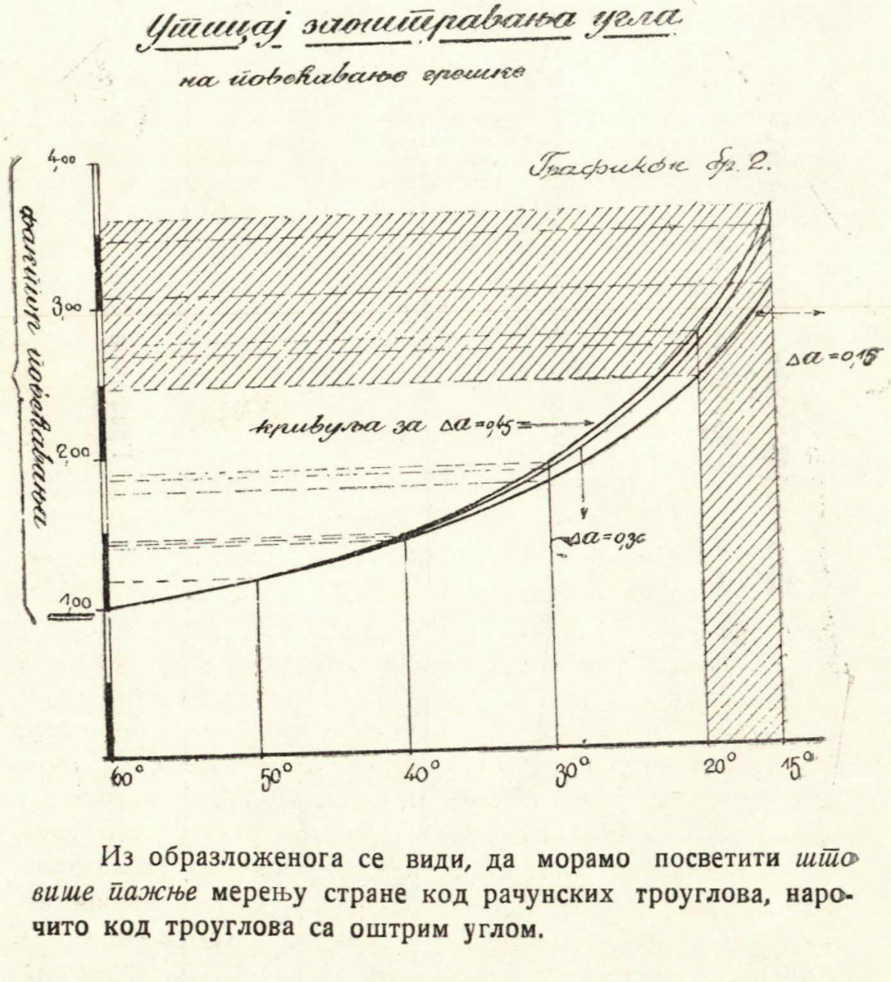
Графикон број 1

Објашњење графикона.

Из овог графикона се види да вредности за $\triangle$ b (грешка стране, добивена рачунским путем) стално расту при опадајућим угловима, т. ј. што је мањи угао α, то је већи утицај грешке мерења основне стране.

Ако се задовољавамо са апроксимативним вредностима, онда једноставно повучемо паралеле са x осом, од полазних вредности нанешених на правцу за угао $\alpha = 60^0$, те ћемо добити приближне вредности.

Графички можемо да прикажемо повећавање фактора пренашања грешке код опадајућих углова. Види гравикон бр. 2.



Из образложенога се види, да морамо посветити *што више пажње* мерењу стране код рачунских троуглова, нарочито код троуглова са оштрим углом.