Иван Свишчов
проф. Универзитета

Рачунање координата чворних тачака у полигоној мрежи

Ако се три или више полигоних влакова, који полазе од тригонометријских тачака, састају у једној полигоној тачки, онда се ова тачка зове *чворна тачка*. Такав се случај појављује у пракси, ако се на месту чворне тачке није могла одредити накнадна тригонометријска тачка, или ако је тригонометријска мрежа веома ретка а полигони влаци дугачки и недовољно развучени.

Координате чворне тачке одређују се на специјалан начин, искоришћујући све влакове који се у њој састају.

Начин рачунања координата чворних тачака обично је објашњен у уџбеницима геодезије. У сада отштампаној веома корисној и лепо обрађеној књизи: „Геодезија-тригонометријска, полигона и линијска мрежа“ од инж. Александра Костића и инж. Николе Свечникова детаљно је објашњено рачунање координата једне чворне тачке и рачунање координата двеју чворних тачака на начин, који се обично налази у уџбеницима геодезије.

Ми ћемо овде предложити други начин рачунања координата чворних тачака или други начин изравнавања при рачунању координата чворних тачака. Обрадићемо два случаја: 1) рачунање координата једне чворне тачке и 2) рачунање координата двеју чворних тачака.

1) Рачунање координата једне чворне тачке у којој се састају три полигона влака.

а) Одређивање поправака за везне и преломне углове.

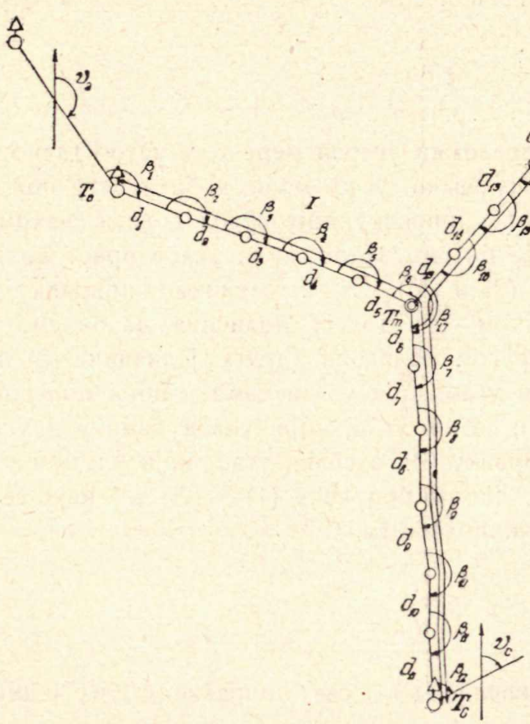
Претпоставимо, да имамо три тригонометријске тачке T_a, T_b и T_c (сл. 1) од којих иду три полигона влака, који се састају у једној чворној тачки T_m.

За сваку тригонометријску тачку дате су координате и сем тога и нагиби V_a, V_b и V_c од датих тригонометријских тачака на суседне или обрнуто.

У полигоним влацима измерене су све полигоне стране $d_1\ d_2\ d_3\ d_4 ...... d_{15}$ и сви везни и преломни углови $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 ...... \beta_{17}$. За везне и преломне углове овог примера постоје два независна услова:

$$\left.\begin{aligned}(\nu_c + n_1\pi) - (\nu_a + [\beta]_1) = 0\\(\nu_c + n_2\pi) - (\nu_b + [\beta]_2) = 0\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

где су: n_1 — број свих везних и преломних углова у првом полигоном влаку од тригонометријске тачке T_a преко чворне тачке T_m до тригонометријске тачке T_c ; n_2 — број свих везних и преломних углова у другом полигоном влаку од тригонометријске тачке T_b преко чворне тачке T_m до тригонометријске тачке T_c ; $[\beta]_1$ и $[\beta]_2$ јесу збирови везних и преломних углова у истим влацима.



Слика 1.

Стварно, кад у једначине (1) уврстимо дате нагибе V_a, V_b и V_c и измерене везне и преломне углове онда с десне стране једначина увек добијемо одступање $f'\beta$ и $f''\beta$ т. ј.

$$\left.\begin{aligned}(\nu_c + n_1\pi) - (\nu_a + [\beta]_1) = f'\beta\\(\nu_c + n_2\pi) - (\nu_b + [\beta]_2) = f''\beta\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

У последњим једначинама само углови β су измерене количине, а остале количине су фиксне; а зато да би смо поништили отступања $f'\beta$ и $f''\beta$ и задовољили и једначине (1) тражимо поправке за углове $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4 \ldots \beta_{17}$

У првој једначини (2) према слици 1 је

$$[\beta]_1 = \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6+\beta_7+\beta_8+\beta_9+\beta_{10}+\beta_{11}+\beta_{12}$$

а у другој . . (3)

$$[\beta]_2 = \beta_{13}+\beta_{14}+\beta_{15}+\beta_{16}+\beta_{17}+\beta_7+\beta_8+\beta_9+\beta_{10}+\beta_{11}+\beta_{12}$$

Од једначина (2), по којима одређујемо одступања $f'\beta$ и $f''\beta$, прелазимо преко једначниа (3) на следеће условне једначине

$$\begin{aligned} &+(\beta_7)+(\beta_8)+(\beta_9)+(\beta_{10})+(\beta_{11})+(\beta_{12})+ \\ &\quad (\beta_{13})+(\beta_{14})+(\beta_{15})+(\beta_{16})+(\beta_{17}) = f''\beta \\ &+(\beta_1)+(\beta_2)+(\beta_3)+(\beta_4)+(\beta_5)+\beta_6)+(\beta_7)+ \\ &\quad (\beta_8)+(\beta_9)+(\beta_{10})+(\beta_{11})+(\beta_{12}) = f'\beta \end{aligned} \quad \ldots\ldots (4)$$

Сви су везни и преломни углови мерени са истом тачношћу и зато у истом влаку сваки угао мора добити исту поправку.

Означимо са (1) поправку, коју треба додати сваком углу првог полигона да би смо задовољили услов првог полигона (прва једначина (2) и (4)). Са (2) означимо поправку, коју треба додати сваком углу другог полигона, да би смо задовољили услов другог полигона (друга једначина (2) и (4)).

Значи, сваки угао, који улази само у први полигон добија поправку (1); сваки угао, који улази само у други полигон добија поправку (2); а сваки угао, који улази и у први и други полигон, добија поправку (1) + (2); т. ј. како се види из једначина (4), поправке су

$$\begin{aligned} &(\beta_1)=(\beta_2)=(\beta_3)=(\beta_4)=(\beta_5)=(\beta_6) = (1) \\ &(\beta_{13})=(\beta_{14})=(\beta_{15})=(\beta_{16})=(\beta_{17}) = (2) \\ &(\beta_7)=(\beta_8)=(\beta_9)=(\beta_{10})=(\beta_{11})=(\beta_{12}) = (1) = (2) \end{aligned} \quad \ldots\ldots (5)$$

Заменивши у једначинама (4) све поправке (β) из једначина (5) добијемо

$$\begin{aligned} 12\,(1) + \ 6\,(2) &= f'\beta \\ 6\,(1) + 11\,(2) &= f''\beta \end{aligned} \quad \ldots\ldots (6)$$

или ако представимо исте једначине (6) у општем облику

$$\begin{aligned} A_1\,(1) + B_1\,(2) &= f'\beta \\ B_1\,(1) + B_2\,(2) &= f''\beta \end{aligned} \quad \ldots\ldots (7)$$

где су: A_1 — број свих везних и преломних углова који улазе у први полигон; B_1 — број везних и преломних углова које истовремено улазе и у први и у други полигон; B_2 — број свих везних и преломних углова, који улазе у други полигон.

Решивши једначине (7) добијемо

$$\left.\begin{aligned}(1) &= \frac{B_2\, f'\beta - B_1\, f''\beta}{A_1 B_2 - B_1\, B_1} \\ (2) &= \frac{A_1\, f''\beta - B_1\, f'\beta}{A_1\, B_2 - B_1\, B_1}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

По овим обрасцима и рачунају се поправке (1) и (2), а поправке за углове одређују се по формулама (5).[1])

Значи за одређивање поправака везним и преломним угловима поступамо на следећи начин:

1) Бирамо полигоне влакове од сваке тригонометријске тачке преко чворне ка једној тригонометријској тачки.

2) У овим влацима по формулама (2) одређујемо отступања f'_β и β''_β

3) Стварамо нормалне једначине (7) где је

A_1 — број свих везник и преломних углова, који улазе у први полигон;

B_1 — број свих везних и преломних углова, који улазе истовремено у први и други полигон;

B_2 — број свих везних и преломних углова, који улазе у други полигон;

4) Одређујемо поправке (1) и (2) по обрасцима (8)

---

[1]) Интересантно је, да ако условне једначине (4) решимо методом најмањих квадрата, т. ј при услову да

$$[(\beta)^2] = \text{minimum}$$

добијамо за поправке потпуно исте вредности, које смо добили на горе-описани начин.

За две условне једначине (4) добијемо две нормалне једначине корелата

$$\left.\begin{aligned}[aa]\, k_1 + [ab]\, k_2 &= f'\,\beta \\ [ab]\, k_1 + [bb]\, k_2 &= f''\beta\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

где су

$$[aa] = A_1 \quad [ab] = B_1 \quad [bb] = B_2 \quad \ldots \quad (10)$$

Уврстивши ово у једначине (9) добијемо следеће нормалне једначине корелата

$$\left.\begin{aligned}A_1\; k_1 + B_1\; k_2 &= f'\,\beta \\ B_1\; k_2 + B_2\; k_2 &= f''\beta\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Упоредивши нормалне једначине (11) са једначинамд (7) видимо да је

$$k_1 = (1) \text{ и } k_2 = (2) \quad \ldots\ldots \quad (11)^1$$

5) Поправку (1) уносимо у везне и преломне углове, који улазе само у први полигон, поправку (2) уносимо у углове, који улазе само у други полигон; у углове, који улазе и у први и у други полигон, уносимо поправку (1) + (2).

6) Са поправљеним (изравнатим) везним и преломним угловима рачунамо нагибе свих полигоних страна.

б) Одређивање поправака за координатне разлике

Кад израчунамо помоћу поправљених везних и преломних углова нагибе полигоних страна у првом и другом влаку, онда на основу ових нагиба и дужика полигоних страна рачунамо координатне разлике $\triangle x'$ и $\triangle y'$ за ове влакове.

За кординатне разлике у сваком полигону постоје следећи услови:

за апсцисне разлике:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{у првом полигону} & (X_c - X_a) - [\triangle x']_1 = 0 \\ \text{у другом полигону} & (X_c - X_b) - [\triangle x']_2 = 0\end{array}\right\} \quad .\ .\ (13)$$

за ординатне разлике:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{у првом полигону} & (Y_c - Y_a) - [\triangle y']_1 = 0 \\ \text{у другом полигону} & (Y_c - Y_b) - [\triangle y']_2 = 0\end{array}\right\} \quad .\ .\ (14)$$

Рачунање поправака после одређивања корелата вршимо по следећим формулама, које напишемо у општем облику

$$\begin{array}{l}(\beta_1) = a_1\, k_1 + b_1\, k_2 \\ (\beta_2) = a_2\, k_1 + b_2\, k_2 \\ (\beta_3) = a_3\, k_1 + b_3\, k_2 \\ — \ — \ — \ — \ — \ — \\ — \ — \ — \ — \ — \ — \\ (\beta_{17}) = a_{17}\, k_1 + b_{17}\, k_2\end{array} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (12)$$

где је свако $a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_{17}$ и $b_1\ b_2\ b_3 \ldots\ldots b_{17}$ једнако или плус један или нули.

За углове, који улазе само у први полигон, сваки одговарајући коефицијенат a једнак је плус један и сваки b једнак је нули, што значи да је према (11) и (12) поправка за сваки од ових углова једнака k_1 или (1).

За углове, који улазе само у други полигон, сваки одговарајући коефицијенат a једнак је нули и сваки b једнак је плус један, што значи да је према (11) и (12) поправка за сваки од ових углова једнака k_2 или (2).

За углове, који улазе и у први и у други полигон, сваки одговарајући коефицијенат a и b једнак је плус један, што значи да је према (11) и (12) поправка за сваки од ових углова једнака

$$k_1 + k_2 \text{ или } (1) + (2).$$

Стварно, ако у једначине (13) и (14) уврстимо израчунате координатне разлике $\triangle x'$ и $\triangle y'$ онда добијемо одступање за апсцисне разлике:

$$\left.\begin{aligned}(X_c - X_a) - [\triangle x']_1 &= f'_x \\ (X_c - X_b) - [\triangle x']_2 &= f''_x\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

за ординатне разлике

$$\left.\begin{aligned}(Y_c - Y_a) - [\triangle y']_1 &= f'_y \\ (Y_c - Y_b) - [\triangle y']_2 &= f''_y\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

По обрасцима (15) и (16) рачунамо одступање f_x и f_y у полигоним влацима.

Сада тражимо за сваку координатну разлику $\triangle x'$ и $\triangle y$ поправку помоћу којих отклањамо одступања f_x и f_y и задовољавамо услове (13) и (14).

Изравнавање или тражење поправака можемо вршити засебно за апсцисне разлике $\triangle x'$ и засебно али слично за ординанатне разлике $\triangle y'$.

За поништавање у једначинама (15) одступања f'_x и f''_x одредимо поправку за сваку апсцисну разлику $\triangle x'$.

У једначинама (15) $[\triangle x']_1$ је збир апсцисних разлика у првом полигону, а $[\triangle x]_2$ је збир апсцисних разлика у другом полигону, т. ј. у првој једначини је

$$[\triangle x']_1 = \triangle x'_1 + \triangle x'_2 + \triangle x'_3 + \triangle x'_4 + \triangle x'_5 + \triangle x'_6 + \triangle x'_7 + \triangle x'_8 + \triangle x'_9 + \triangle x'_{10} + \triangle x'_{11}$$

у другој једначини . . (17)

$$[\triangle x']_2 = \triangle x'_{12} + \triangle x'_{13} + \triangle x'_{14} + \triangle x'_{15} + \triangle x'_6 + \triangle x'_7 + \triangle x'_8 + \triangle x'_9 + \triangle x'_{10} + \triangle x'_{11}$$

Од једначина одступања (15) прелазимо преко једначине (17) на следеће условне једначине

$$\left.\begin{aligned}v^1_x + v^2_x + v^3_x + v^4_x + v^5_x + v^6_x + v^7_x + v^8_x + v^9_x + v^{10}_x + v^{11}_x &= f'_x \\ v^{12}_x + v^{13}_x + v^{14}_x + v^{15}_x + v^6_x + v^7_x + v^8_x + v^9_x + v^{10}_x + v^{11}_x &= f''_x\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

где су $v^1_x\ v^2_x\ v^4_x \ldots v^{15}_x$ поправке одговарајућим апсцисним разликама $\triangle x'_1\ \triangle x'_2\ \triangle x'_3 \ldots \triangle x'_{15}$.

У сваком полигону величина поправке v_x зависи од дужине одговарајуће стране полигоног влака.

Означимо са $(1)x$ поправку, коју треба додати свакој апсцисној разлици првог полигона на јединицу дужине полигоне стране, да би смо задовољили услов првог полигона т. ј. прву једначину (13) или (18). Са (2)x означимо поправку, коју треба додати свакој апцисној разлици другог полигона на јединицу дужине полигоне стране, да би смо задовољили услов другог полигона, т. ј. другу једначину (13) или (18).

У овом случају свака поправка Vx за апсцисну разлику $\triangle x'$, која улази само у први полигон, једнака је

$$v_x = d_n\,(1)_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

где је d_n дужина одговарајуће полигоне стране.

Свака поправка v_x за апсцисну разлику $\triangle x'$ која улази само у други полигон једнака је

$$v_x = d_n\,(2)_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Свака поправка v_x за апцисну разлику $\triangle x'$ која улази и у први и у други полигон једнака је

$$v_x = d_n\,(1)_x + d_n\,(2)_x \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Значи за поправке, које улазе у једначине (18) имамо

$$\begin{array}{lll}
v_x^1 = d_1\,(1) & v_x^{12} = d_{12}\,(2)_x & v_x^6 = d_6\,(1)_x + d_6\,(2)_x \\
v_x^2 = d_2\,(1) & v_x^{13} = d_{13}\,(2)_x & v_x^7 = d_7\,(1)_x + d_7\,(2)_x \\
v_x^3 = d_3\,(1) & v_x^{14} = d_{14}\,(2)_x & v_x^8 = d_8\,(1)_x + d_8\,(2)_x \\
v_x^4 = d_4\,(1) & v_y^{15} = d_{15}\,(2)_x & v_x^9 = d_9\,(1)_x + d_9\,(2)_x \\
v_x^5 = d_5\,(1) & & v_x^{10} = d_{10}\,(1)_x + d_{10}\,(2)_x \\
 & & v_x^{11} = d_{11}\,(1)_x + d_{11}\,(2)_x
\end{array} \quad \ldots \quad (22)$$

Ако у једначине (18) за поправке v_x уврстимо величине из једначина (22) онда добијемо

$$\left.\begin{array}{r}
(d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6+d_7+d_8+d_9+d_{10}+d_{11})\,(1)_x + \\
(d_6+d_7+d_8+d_9+d_{10}+d_{11})\,(2)_x = f'_x \\
(d_6+d_7+d_8+d_9+d_{10}+d_{11})\,(1)_x + \\
(d_{12}+d_{13}+d_{14}+d_{15}+d_6+d_7+d_8+d_9+d_{10}+d_{11})(2)_x = f''_x
\end{array}\right\} \ldots (23)$$

Означивши у последњим једначинама коефицијенте при $(1)_x$ и $(2)_x$ са

$$\begin{aligned}
& d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6+d_7+d_8+d_9+d_{10}+d_{11} = A_1 \\
& d_6+d_7+d_8+d_9+d_{10}+d_{11} = B_1 \\
& d_{12}+d_{13}+d_{14}+d_{15}+d_6+d_7+d_8+d_9+d_{10}+d_{11} = B_2
\end{aligned}$$

добијемо за једначине (23)

$$\left.\begin{array}{l}
A_1\,(1)_x + B_1\,(2)_x = f'_x \\
B_1\,(1)_x + B_2\,(2)_x = f''_x
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

где су: A_1 — збир дужина свих полигоних страна, које улазе у први полигон; B_1 — збир дужина свих полигонских страна, које улазе истовремено и у први и у други полигон; B_2 — збир дужина свих полигонских страна, које улазе у други полигон.

Из решења једначина (24) за рачунање поправака $(1)_x$ и $(2)_x$ добијамо следеће формуле:

$$(1)_x = \frac{B_2 f'_x - B_1 f''_x}{A_1 B_2 - B_1 B_1}$$

$$(2)_x = \frac{A_1 f''_x - B_1 f'_x}{A_1 B_2 - B_1 B_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Знајући величине $(1)_x$ и $(2)_x$ поправке за сваку апсцисну разлику рачунамо по формулама (22).[1])

[1]) Интересантно је, да, ако условне једначине (18) решимо методом најмањих квадрата, т. ј. при услову да

$$[p(v_x)^2) = \text{minimum}$$

где су $p_1\ p_2 \ldots p_n$ тежине одговарајућих апсисних разлика $\triangle x'_1\ \triangle x'_2\ \triangle x'_3 \ldots \triangle x'_n$ онда за поправке v_x добијамо потпуно исте вредности, које смо добили на горе описани начин.

$$p_1 = \frac{1}{d_1};\ p_2 = \frac{1}{d_2};\ p_3 = \frac{1}{d_3}, \ldots\ p_n = \frac{1}{d_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

За две условне једначине (18) добијемо две нормалне једначине корелата

$$\left[\frac{aa}{p}\right] k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] k_2 = f'_x$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] k_2 = f''_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

које се претварају у следеће једначине, ако уврстимо тежине из (28)

$$[d\,aa]\ k_1 + [d\,ab]\ k_2 = f'_x$$
$$[d\,ab]\ k_1 + [d\,bb]\ k_2 = f''_x$$

где је свака од количина $a_1\ p_2\ a_3 \ldots a_n\ b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_n$ једнака или један или нули.

Означивши

$$[d\,aa] = A_1\ [d\,ab] = B_1;\ [d\,bb] = B_2$$

и уврстивши последње количине у једначине (30) добијамо

$$A_1\, k_1 + B_1\, k_2 = f'_x$$
$$B_1\, k_1 + B_2\, k_2 = f''_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Упоредивши нормалне једначине да је (31) са једначинама (24) видимо да је

$$k_1 = (1)_x \text{ и } k_2 = (2)_x.$$

Значи при одређивању поправака поједининим апсцисним разликама $\Delta x'$ поступамо на следећи начин:

1) Помоћу израчунатих, са поправљеним везним и преломним угловима, нагиба и дужина полигоних страна рачунамо координатне разлике, у првом и другом полигоном влаку.

2) По формулама (15) одређујемо у првом и другом влаку одступања f'_x и f''_x.

3) Стварамо нормалне једначине (24) где је:

При одређивању поправака за апсцисне разлике методом најмањих квадрата, после одређивања корелата, поправке рачунају се по следећим формулама, које напишимо у општем облику.

$$
\begin{aligned}
v_x^1 &= \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 \\
v_x^2 &= \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 \\
v_x^3 &= \frac{a_3}{p_3} k_1 + \frac{b_3}{p_3} k_2 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (32) \\
&- - - - - \\
&- - - - - \\
v_x^{12} &= \frac{a_{12}}{a_{12}} k_1 + \frac{b_{12}}{p_{12}} k_2
\end{aligned}
$$

Ако у ове једначине уврстимо вредности за p из једначине (28) добијемо

$$
\begin{aligned}
v_x^1 &= a_1\ d_1\ k_1 + b_1\ d_1\ k_2 \\
v_x^2 &= a_2\ d_2\ k_1 + b_2\ d_2\ k_2 \\
v_x^3 &= a_3\ d_3\ k_1 + b_3\ d_3\ k_2 \qquad \ldots\ldots \quad (33) \\
&- - - - - - - \\
v_x^n &= a_n\ d_n\ k_1 + b_n\ d_n\ k_2
\end{aligned}
$$

где свако $a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ a_n\ \ b_1\ b_2\ b_3 \ldots\ b_n$ једнако један или нули.

За апсцисне разлике, које улазе само у први полигон, одговарајући коефицијенти а сваки је једнак један а b сваки је једнак нули, што значи да је поправка за сваку од ових апсцисних разлика једнака $d_n\ k_1$ или $d_n\ k_2\ (1)_x$.

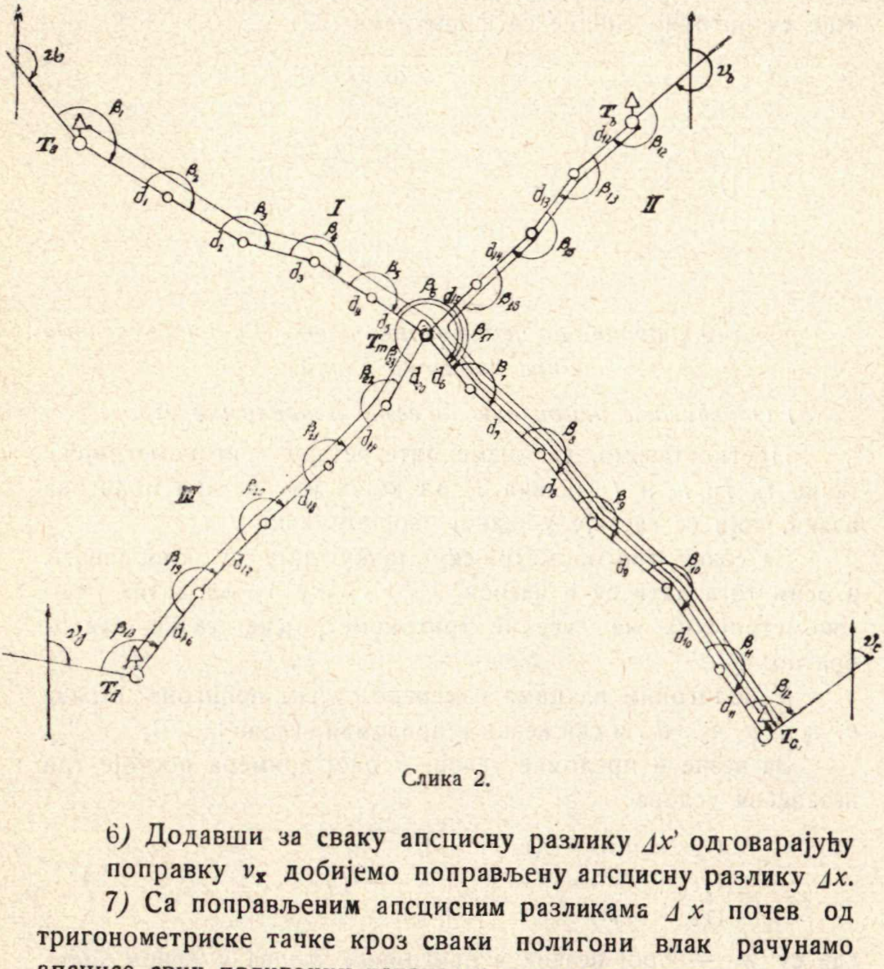
За апсцисне разлике, које улазе само у други полигон, одговарајући коефицијенти а сваки је једнак нули а b сваки је једнак један, што значи да је поправка за сваку од ових апсцисних разлика једнака $[d_n\ \ k_2]$ или $(d_n\ \ (2)_x$.

За апсцисне разлике, које улазе и у први и у други полигон, коефициенти а и b сваки је једнак један, што значи да је поправка за сваку од ових апсцисних разлика једнака $d_n\ k_1 + d_n\ k_2$ или $d_n\ (1)_x + d_n\ (2)_x$.

A_1 — збир дужина свих полигоних страна, које улазе у први полигон; B_1 — збир дужина свих полигоних страна, које улазе истовремено и у први и у други полигон; B_2 — збир дужина свих полигоних страна, које улазе у други полигон.

4) Одређујемо поправке $(1)_x$ и $(2)_x$ по обрасцима (25)

5) Одређујемо поправке V_x за сваку апсцисну разлику по обрасцима (22).



Слика 2.

6) Додавши за сваку апсцисну разлику $\Delta x'$ одговарајућу поправку v_x добијемо поправљену апсцисну разлику Δx.

7) Са поправљеним апсцисним разликама Δx почев од тригонометриске тачке кроз сваки полигони влак рачунамо апсцисе свих полигоних тачака па и чворне и завршавамо рачунање на другој тригонометриској тачки.

Поправке за ординатне разлике и ординате за све полигоне тачке па и за чворну рачунамо потпуно на сличан начин, као и поправке за апсцисне разлике и апсцисе.

Отступања f'_y и f''_y у првом и другом полигоном влаку одређују се по формулама (16)

Нормалне једначине за поправке ординатним разликама $\Delta y'$ на јединицу дужине полигоне стране биће:

$$\begin{aligned} A_1\,(1)_y + B_1\,(2)_y &= f'_y \\ B_1\,(1)_y + B_2\,(2)_y &= f''_y \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

т. ј. потпуно сличне једначинима (25) и где су A_1 B_1 и B_2 потпуно исте количине, које улазе и у једначине (25). Поправке за ординатне разлике $\triangle y'$ рачунају се по следећим формулама, које су потпуно сличне са формулама (22)

$$\begin{array}{lll} v_y^1 = d_1\,(1)_y & v_y^{12} = d_{12}\,(2)_y & v_y^6 = d_6\,(1)_y + d_6\,(2)_y \\ v_y^2 = d_2\,(1)_y & v_y^{13} = d_{13}\,(2)_y & v_y^7 = d_7\,(1)_y + d_7\,(2)_y \\ v_y^3 = d_3\,(1)_y & v_y^{14} = d_{14}\,(2)_y & v_y^8 = d_8\,(1)_y + d_8\,(2)_y \\ v_y^4 = d_4\,(1)_y & v_y^{15} = d_{15}\,(2)_y & v_y^9 = d_9\,(1)_y + d_9\,(2)_y \\ v_y^5 = d_5\,(1)_y & & v_y^{10} = d_{10}\,(1)_y + d_{10}\,(2)_y \\ & & v_y^{11} = d_{11}\,(1)_y + d_{11}\,(2)_y \end{array} \quad (27)$$

2. Рачунање координата једне чворне тачке у којој се састају четири полигона влака.

а) Одређивање поправака за везне и преломне углове.

Претпоставимо, да имамо дате четири тригонометријске тачке T_a, T_b, T_c и T_d (слика 2) од којих иду четири полигона влака, који се састају у једној чворној тачки T_m.

За сваку тригонометријску тачку дате су координате, а осим тога дати су и нагиби V_a V_b V_c и V_d од датих тригонометријских на суседне тригонометријске тачке или обратно.

У полигоним влацима измерене су све полигоне стране d_1 d_2 d_3 d_4 d_5... d_{21} и сви везни и преломаи углови β_1 β_2 β_3 β_4....β_{24}.

За везне и преломне углове β овог примера постоје три независна услова

$$\begin{aligned} (v_c + n_1\pi) - (v_a + [\beta]_1) &= 0 \\ (v_c + n_2\pi) - (v_b + [\beta]_2) &= 0 \\ (v_c + n_3\pi) - (v_d + [\beta]_3) &= 0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

где су: n_1 — број везних и преломних углова у првом полигоном влаку од тригонометријске тачке T_2 преко чворне тачке T_m да тригонометријске тачке T_c; n_2 — број везних и преломних углова у другом полигоном влаку од тригонометриј ске тачке T_b преко тачке T_m до тригонометријске тачке T_c ; n_3 — број везних и преломних углова у трећем полигоном влаку, од тригонометријске тачке T_d преко чворне тачке T_m до тригонометријске тачке T_c.

Ако у једначине (34) уврстимо дате нагибе v_a v_b v_c v_d и измерене везне и преломне углове увек с десне стране једначина добијемо одступања $f'\beta$ $f''\beta$ $f'''\beta$ т. ј.

$$\begin{aligned} (v_c + n_1 \pi) - (v_a + [\beta]) &= f'\beta \\ (v_c + n_2 \pi) - (v_b + [\beta]) &= f''\beta \quad \ldots\ldots \quad (35) \\ (v_c + n_3 \pi) - (v_d = [\beta]) &= f'''\beta \end{aligned}$$

У последњим једначинама само углови β су измерене количине; а остале количине су фиксне, и зато, да би смо поништили одступања $f'\beta$ $f''\beta$ $f'''\beta$ и задовољили једначине (34), тражимо поправке за везне и преломне углове β_1 β_2 β_3 ....β_{24}.

У првој једначини (35) је

$$[\beta]_1 = \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6+\beta_7+\beta_8+\beta_9+\beta_{10}+\beta_{11}+\beta_{12}$$

у другој

$$[\beta]_2 = \beta_{13}+\beta_{14}+\beta_{15}+\beta_{16}+\beta_{17}+\beta_7+\beta_8+\beta_9+\beta_{10}+\beta_{11}+\beta_{12} \quad . \quad (36)$$

у трећој

$$[\beta]_3 = \beta_{18}+\beta_{19}+\beta_{20}+\beta_{21}+\beta_{22}+\beta_{23}+\beta_{24}+\beta_7+\beta_8+\beta_9+ \\ \beta_{10}+\beta_{11}+\beta_{12}$$

Од једначина (35), по којима се одређују одступања прелазимо преко једначине (36) на следеће условне једначине

За I полигон $(\beta_1)+(\beta_2)+(\beta_3)+(\beta_4)+(\beta_5)+(\beta_6)+(\beta_7)+(\beta_8)+(\beta_9)+(\beta_{10})+(\beta_{11})+(\beta_{12})=f'\beta$

За II полигон $(\beta_{13})+(\beta_{14})+(\beta_{15})+(\beta_{16})+(\beta_{17})+(\beta_7)+(\beta_8)+(\beta_9)+(\beta_{10})+(\beta_{11})+(\beta_{12})=f''\beta$. (37)

За III полигон $(\beta_{18})+(\beta_{19})+(\beta_{20})+(\beta_{21})+(\beta_{22})+(\beta_{23})+(\beta_{24})+(\beta_7)+(\beta_8)+(\beta_9)+(\beta_{10})+(\beta_{11})+(\beta_{12})=f'''\beta$

где су $\beta_1\beta_2\beta_3...\beta_{24}$ поправке ка одговарајућим везним и преломним угловима.

Сви су везни и преломни углови мерени са истом тачношћу, и зато у истом влаку сваки угао мора добити исту поправку. Означимо са (1) поправку, коју треба додави сваком углу првог полигона да би смо задовољили услов првог полигона (прва једначина (34) и (37)). Са (2) означимо поправку, коју треба додати сваком углу другог полигона, да би смо задовољили услов другог полигона (друга једначина (34) и (37)). Са (3) означимо поправку, коју треба додати сваком углу трећег полигона да би смо задовољили услов трећег полигона (трећа једначина (34) и (37)).

Значи, сваки угао, који улази само у први полигон, добије поправку (1); сваки угао, који улази само у други полигон, добија поправку (2); сваки угао који улази само у трећи полигон, доби е поправку (3); а сваки угао, који улази и у први и у други и у трећи полигон, добије поправку (1) + (2) + (3), т. ј. за наш пример је

$$\begin{aligned}
&(\beta_1)=(\beta_2)=(\beta_3)=(\beta_4)=(\beta_5)=(\beta_6)=(1)\\
&(\beta_{13})=(\beta_{14})=(\beta_{15})+(\beta_{16})=(\beta_{17})=(2)\\
&(\beta_{18})=(\beta_{19})=(\beta_{20})=(\beta_{21})=(\beta_{22})=(\beta_{23})=(\beta_{24})=(3)\\
&(\beta_7)=(\beta_8)=(\beta_9)=(\beta_{10})=(\beta_{11})=(\beta_{12})=(1)+(2)+(3)
\end{aligned} \quad . \quad (38)$$

Заменивши у једначинама (37) све поправке (β) на једначине (38) добијемо

$$\begin{aligned}
12\,(1) + 6\,(2) + 6\,(3) &= f'\beta\\
6\,(1) + 11\,(2) + 6\,(3) &= f''\beta \quad . \; . \; . \quad (40)\\
6\,(1) + 6\,(2) + 13\,(3) &= f'''\beta
\end{aligned}$$

Ако последње једначине напишемо у општем облику, добијемо

$$\begin{aligned}
A_1\,(1) + B_1\,(2) + B_1\,(3) &= f'\beta\\
B_1\,(1) + B_2\,(2) + B_1\,(3) &= f''\beta \quad . \; . \; . \quad (41)\\
B_1\,)1) + B_1\,(2) + C_3\,(3) &= f'''\beta
\end{aligned}$$

где су: A_1 — број свих везних и преломних углова, који улазе у први полигон; B_2 — број свих везних и преломних углова, који улазе у други полигон; C_3 — број свих везних н преломних углова, који улазе у трећи полигон; B_2 — број везних и преломних углова, који истовремено улазе у први, други и трећи полигон. Решивши једначине (41) за рачунање поправака (1) (2) и (3) добијемо следеће формуле:

$$\begin{aligned}
(1) &= \frac{f'\beta\,(B_2\,C_3 - B_1^2) + f''\beta\,(B_1 - C_3)\,B_1 + f'''\beta\,(B_1 - B_2)\,B_1}{A_1\,B_2\,C_3 - B_1^3\,(A_1 + B_2 + C_3 - 2\,B_1)}\\
(2) &= \frac{f'\beta\,(B_1 - C_3)\,B_1 + f''\beta\,(A_1\,C_3 - B_1^2) + f'''\beta\,(B_1 - A_1)\,B_1}{A_1\,B_2\,C_3 - B_1^2\,(A_1 + B_2 + C_3 - 2\,B_1)} \quad (42)\\
(3) &= \frac{f'\beta\,(B_1 - B_2)\,B_1 + f''\beta\,(B_1 - A_1)\,B_1 + f'''\beta\,(A_1\,B_2 - B_1^2)}{A_1\,B_2\,C_3 - B^2{}_1\,(A_1 + B_2 + C_3 - 2\,B_1)}
\end{aligned}$$

Дефинитивну поправку за сваки везни и пр ломни угао израчунамо по формулама (38).

б) Одређивање поправака за координатне разлике $\triangle$ x' и $\triangle$ y'. Кад помоћу поправљених везних и преломних углова израчунамо нагибе полигоних страна у свима влацима, онда на основу ових нагиба и дужина полигоних страна рачунамо координатне разлике $\triangle x'$ и $\triangle y'$ у сваком влаку.

За координантне разлике у сваком полигону постоје следећи услови:

У првом полигону:

$$(X_c - X_a) - [\triangle x']_1 = 0$$
$$(Y_c - Y_a) - [\triangle y']_1 = 0$$

У другом полигону:

$$(X_c - X_b) - [\triangle x']_2 = 0$$
$$(Y_c - Y_b) - [\triangle y']_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

У трећем полигону:

$$(X_c - X_d) - [\triangle x']_3 = 0$$
$$(Y_c - Y_d) - [\triangle y']_3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

Стварно, кад у једначине (43) уврстимо израчунате координатне разлике $\triangle x'$ и $\triangle y'$, онда добијемо следеће једначине по којима рачунамо одступања $f'_x\, f''_x\, f'''_x$ и $f'_y\, f''_y\, f'''_y$.

У првом полигону:

$$(X_c - X_a) - [\triangle x']_1 = f'_x$$
$$(Y_c - Y_a) - [\triangle y']_1 = f'_y \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

У другом полигону:

$$(X_c - X_b) - [\triangle x']_2 = f''_x$$
$$(Y_c - Y_b) - [\triangle y']_2 = f''_x \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

У трећем полигону:

$$(X_c - X_d) - [\triangle x']_3 = f'''_x$$
$$(Y_c - Y_d) - [\triangle y']_3 = f'''_y \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

Сада за сваку координатну разлику $\triangle x'$ и $\triangle y'$ тражимо поправку помоћу којих отклањамо одступања $f'_x f''_x f'''_x\, f'_y f''_y f'''_y$ и задовољавамо услове (43).

Ако применимо исте принципе као и за чворну тачку, у којој се састају три полигона влака, онда добијемо за наш случај следеће три условне једначине:

$$v_x^1 + v_x^2 + v_x^3 + v_x^4 + v_x^5 + v_x^6 + v_x^7 + v_x^8 + v_x^9 + v_x^{10} + v_x^{11} = f'_x$$
$$v_x^{12} + v_x^{13} + v_x^{14} + v_x^{15} + v_x^6 + v_x^7 + v_x^8 + v_x^9 + v_x^{10} + v_x^{11} = f''_x \quad (45)$$
$$v_x^{16} + v_x^{17} + v_x^{18} + v_x^{19} + v_x^{20} + v_x^{21} + v_x^6 + v_x^7 + v_x^8 + v_x^9 + v_x^{10} + v_x^{11} = f'''_x$$

где су v_x^1 v_x^2 v_x^{21} поправке одговарајућим апсцисним разликама $\Delta x'_1$ $\Delta x'_2 \dots \Delta x'_{21}$.

Ако означимо са (1)x) поправку, коју треба додати свакој апсцисној разлици првог полигона на јединицу дужине полигоне стране; са (2)x и са (3)x поправке, које треба додати свакој апсцисној разлици на јединицу дужине другог и трећег полигона онда према слици 2 добијемо

$$
\begin{array}{lll}
v_x^1 = d_1 (1)_x & v_x^{12} = d_{12} (2)_x & v_x^{16} = d_{16} (3)_x \\
v_x^2 = d_2 (1)_x & v_x^{13} = d_{13} (2)_x & v_x^{17} = d_{17} (3)_x \\
v_x^3 = d_3 (1)_x & v_x^{14} = d_{14} (2)_x & v_x^{18} = d_{18} (3)_x \\
v_x^4 = d_4 (1)_x & v_x^{15} = d_{15} (2)_x & v_x^{19} = d_{19} (3)_x \\
v_x^5 = d_5 (1)_x & & v_x^{20} = d_{20} (3)_x \\
 & & v_x^{21} = d_{21} (3)_x
\end{array}
\quad \dots \quad (46)
$$

$$
\begin{aligned}
v_x^6 &= d_6 (1)_x + d_6 (2)_x + d_6 (3)_x \\
v_x^7 &= d_7 (1)_x + d_7 (2)_x + d_7 (3)_x \\
v_x^8 &= d_8 (1)_x + d_8 (2)_x + d_8 (3)_x \\
v_x^9 &= d_9 (1)_x + d_9 (2)_x + d_9 (3)_x \\
v_x^{10} &= d_{10}(1)_x + d_{10}(2)_x + d_{10}(3)_x \\
v_x^{11} &= d_{11}(1)_x + d_{11}(2)_x + d_{11}(3)_x
\end{aligned}
$$

Ако у једначине (45) уврстимо вредности за поједине V из једначина (46) онда добијемо следеће нормалне једначине:

$$
\begin{aligned}
A_1 (1)_x + B_1 (2)_x + B_1 (3)_x &= f'_x \\
B_1 (1)_x + B_2 (2)_x + B_1 (3)_x &= f''_x \quad . \quad . \quad (47) \\
A_1 (1)_x + B_1 (2)_x + C_3 (3)_x &= f'''_x
\end{aligned}
$$

где су A_1 збир дужина свих полигонских страна, које улазе у први полигон; B_2 — збир дужина свих полигоних страна, које улазе у други полигон; C_3 — збир дужина свих полигоних страна, које улазе у трећи полигон; B_1 — збир дужиа полигоних страна које истовремено улазе у први, други и трећи полигон;

Значи да је за слику 2

$$
\begin{aligned}
A_1 &= d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 + d_8 + d_9 + d_{10} + d_{11} \\
B_2 &= d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{15} + d_6 + d_7 + d_8 + d_9 + d_{10} + d_{11} \qquad (48) \\
C_3 &= d_{16} + d_{17} + d_{18} + d_{19} + d_{20} + d_{21} + d_6 + d_7 + d_3 + d_9 + d_{10} + d_{11} \\
B_1 &= d_6 + d_7 + d_8 + d_9 + d_{10} + d_{11}
\end{aligned}
$$

Из решења једначина (47), за рачунање поправака $(1)_x$, $(2)_x$ ии $(3)_x$ добијемо следеће једначине

$$(1)_x = \frac{f'_x (B_2C_3 - B_1^2) + f''_x (B_1 - C_3) B_1 + f'''_x (B_1 - B_2) B_1}{A_1B_2C_3 - B_1^2 (A_1 + B_2 + C_3 - 2B_1)}$$

$$(2)_x = \frac{f'_x (B_1 - C_3) B_1 + f''_x (A_1C_3 - B_1^2) + f'''_x (B_1 - A_1) B_1}{A_1B_2C_3 - B_1^2 (A_1 + B_2 + C_3 - 2B_1)}$$

$$(3)_x = \frac{f'_x (B_1 - B_2) B_1 + f''_x (B_1 - A_1) B_1 + f'''_x (A_1B_2 - B_1^2)}{A_1B_2C_3 - B_1^2 (A_1 + B_2 + C_3 - 2B_1)}$$

Знајући величине $(1)_x$ $(2)_x$ и $(3)_x$ поправке V_x за ординатне разлике добијемо по формулама (46)

Значи при одређивању поправака за поједине апсцисне разлике поступамо на следећи начин:

1) Помоћу израчунатих, са поправљеним везним и преломним угловима нагиба и дужина полигоних страна рачунамо координатне разлике у сваком полигону

2) По формулама (44) одређујемо у сваком полигону одступања $f'_x f''_x$ и f'''_x

3) Стварамо нормалне једначине (47)

4) Одређујемо поправке $(1)_x$ $(2)_x$ и $(3)_x$ по обрасцима (48)

5) Рачунамо поправке V_x по обрасцима (46)

6) Додавши за сваку специсну разлику $\triangle x'$ одговарајућу поправку Vx добијемо поправљену апсцисну разлику $\triangle x$

7) Са поправљеним апсцисним разликама $\triangle x'$, почев од тригонометријске тачке кроз сваки полигони влак рачунамо апсцисе свих полигоних тачака па и чворне и завршавамо рачунање на другој тригонометријској тачци.

Поправке за ординатне разлике одређују се потпуно на сличан начин и потпуно по сличним формулама.

— Наставиће се —

Geom. **Bruno Ungarov**

Katastar u ranijoj pokrajini Dalmaciji

Katastar koji je osnova za tačno i pravedno razrezivanje poreza nije staroga datuma; njegovi prvi počeci datiraju iz 17. stoljeća. U to vrijeme glasoviti engleski naučenjak Locke (1632—1704) govori o zemljarini kao glavnom i osnovnom porezu, te engleski imperij već god. 1692 zavodi na svojoj teritoriji katastar