Поштарина плаћена у готову.

Год. 14. Београд, септембар и октобар 1933. Св. 5.

ГЕОМЕТАРСКИ И ГЕОДЕТСКИ ГЛАСНИК

Орган Удружења Геометара и Геодета Краљевине Југославије

Сарајевска ул. 5. БЕОГРАД. Сарајевска ул. 5.

Уредништво и администрација Сарајевска ул. 5	Власник за Гл. управу **Милан Мравље** нар. посланик. Уредник **Димитрије Милачић** геометар	Излази у два месеца једанпут. Поједини број 10 дин.

Ing. A. S. Milošević

Najcelishodnija razdeoba težina kuteva u bazisnoj mreži.

— Nastavak iz prošlog broja —

Zamenom odgovarajućih vrednosti iz form. 30 u 29 dobije se:

$$\varphi = -\left\{\frac{[aF]^2}{[aa]} + \frac{[bF.1]^2}{[bb\cdot 1]} + \frac{[cF\cdot 2]^2}{[cc.2]} + \ldots\right\} \quad 31$$

Zamenom form. 31 u 28″ dobije se:

$$[ff] = [FF] - \frac{[aF]^2}{[aa]} - \frac{[bF\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \frac{[cF.2]^2}{[cc.2]} - \ldots \quad 32$$

Ali je takodje i:

$$[FF\,3] = [FF\cdot 2] - \frac{[cF\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}$$

$$[FF\cdot 2] = [FF\cdot 1] - \frac{[bF.1]^2}{[bb\cdot 1]}$$

$[FF\cdot 1] = [FF] - \frac{[aF]^2}{[aa]}$, ili kada se supstituira:

$$[FF\cdot 3] = [FF] - \frac{[aF]^2}{[aa]} - \frac{[bF\cdot 1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cF\cdot 2]^2}{[cc.2]} \ldots \quad 33$$

Uporedjenjem form. 32 i 33 očigledno je:

$[ff] = [FF{\cdot}3]$ ili uopšte, ako ima n normalnih, odnosno uslovnih jednačina, biće:

$$[ff] = [FF{\cdot}n] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 34$$

Za form. 34 i 27 sračunava se težina logaritma strane triangulacije po Gauss-ovom načinu:

$$P_{loga} = \frac{1}{[FF{\cdot}n]} \quad \ldots\ldots \quad 35$$

Algoritam $[FF{\cdot}n]$ dobije se na taj naćin što se uz normalne jednačine korelata (ili prenosnih koeficienata) dopišu članovi $[aF]\,K$, $[bF]\,K$, $[cF]\,K$, ... a takodje i funkcija:

$[aF]\,k_1 + [bF]\,k_2 + [cF]\,k_3 + \ldots\ldots + [FF]\,K$, tj.:

$$n \left\{ \begin{array}{l|l|l} [aa]\,k_1 + [ab]\,k_2 + [ac]\,k_3 + \ldots + w_1 & + [aF]\,K & = 0 \\ [ab]\,k_1 + [bb]\,k_2 + [bc]\,k_3 + \ldots + w_2 & + [bF]\,K & = 0 \\ [ac]\,k_1 + [bc]\,k_2 + [cc]\,k_3 + \ldots + w_3 & + [cF]\,K & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \hline [aF]\,k_1 + [bF]\,k_2 + [cF]\,k_3 + \ldots + 0 & + [FF]\,K & \end{array} \right.$$

pa se redukcija obavlja kao da je dopisana funkcija jedna normalna jednačina. Algoritam poslednje redukcije uz fiktivnu korelatu K biće tražena veličina $[FF{\cdot}n]$.

4) Diferencija logaritma strane triangulacije $\triangle$ loga. Srednja ostupanja: logaritma strane, same strane i relativno srednje ostupanje strane.

A) Diferencija logaritma strane $\triangle$ loga

Bilo da se želi sračunati P_{loga} po form. 35, bilo pak da se hoće formirati funkcija 26, za obrazovanje suma $[aF]$, $[bF]$, $[cF]$ nije potrebno uzeti celu funkciju 13, već samo:

$$\triangle\, loga = F_1\,v_1 + F_2\,v_2 + F_3\,v_3 + \ldots\ldots \quad 36$$

Ovo je stoga što prilikom formiranja normalnih jednačina (korelata, odnosno pren. koef.) članovi:

Log b + [log sin. l] = log a_1 nisu potrebni. Zato se u šemu koeficienata uslovnih jednačina stavlja funkcija 36 i s njom postupa kao i sa uslovnim jednačinama.

Obzirom na to što se prirasti F sračunavaju po form. 12, diferencija $\triangle$ loga u form. 36 izražena je Brigg-ovim logaritmima, a popravke v lučnim sekundama. Medjutim u teoretskim razmatranjima mogu se upotrebiti i prirodni logaritmi, a popravke da budu izražene arcusom. Ovim veličinama izražena $\triangle$ loga može se i drukčije izvesti. Uzimimo u form. 7 da je strana sračunata iz tri trokuta:

$$a = b \frac{sin. X_1 \cdot sin. X_3 \cdot sin. X_5}{sin. X_2 \cdot sin. X_4 \cdot sin. X_6}$$

Formirajmo diferenciju a, smatrajući b = konst

$$\triangle a = b \left[\frac{sin. X_3 \cdot sin. X_5}{sin. X_2 \cdot sin. X_4 \cdot sin X_6} . cos. X_1 \cdot \triangle X_1 + \right.$$

$$+ \frac{sin. X_1 \cdot sin. X_5}{sin. X_2 \cdot sin. X_4 \cdot sin. X_6} . cos. X_3 \cdot \triangle X_3 + \ldots .$$

$$\left. - \frac{sin. X_1 \cdot sin. X_3 \cdot sin. X_5}{sin. X_2 \cdot sin. X_4} \cdot \frac{cos. X_6}{sin. X_6} \cdot \triangle X_6 \right] =$$

$$= a \; [ctg. X_1 \cdot \triangle X_1 + ctg. X_2 \cdot \triangle X_2 + ctg. X_3 \cdot \triangle X_3 +] \ldots \text{ ili}$$

$$\frac{\triangle a}{a} = ctg. X_1 . \triangle X_1 + ctg. X_2 \cdot \triangle X_2 + ctg. X_3 \cdot \triangle X_3 + \ldots$$

Stavljanjem :

$$\triangle X_1 = V_1$$
$$\triangle X_2 = V_2$$
$$\triangle X_3 = V_3$$
$$\ldots\ldots$$

. . . . . . i pošto je :

$$\frac{\triangle a}{a} = \triangle \operatorname{Log}_n a, \text{ dobije se}$$

$$\triangle \operatorname{Log}_n a = ctg\, x_1 V_1 + ctg\, x_2 V_2 + ctg\, x_3 V_3 + \ldots .$$

Pošto popravke u ovoj funkciji služe samo da pokažu indekse odgovarajućih koeficienata, to se može za istu svrhu upotrebiti i funkcija:

$$\left. \begin{array}{l} F = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \ldots \\ \text{gde je } F_i = ctg\, x_i \end{array} \right\} \ldots . 37$$

B) Srednja ostupanja

Pomoću srednjeg ostupanja jedinice težine m_o i težine logaritma strane (P_{loga}) sračunava se srednje ostupanje logaritma strane (M_{loga}), a iz ovog sleduje ostupanje same strane (M_a), odnosno relativno srednje ostupanje strane $\left(\frac{M_a}{a}\right)$

a) *Srednje ostupanje jedinice težine* sračunava se po form.

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 37'$$

gde je n broj prekobrojnih opažanja, odnosno broj uslovnih jednačina.

b) *Srednje ostupanje loga* dobije se po form.:

$$M_{loga} = \pm \frac{m}{\sqrt{P_{loga}}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 38'$$

Zamenom odgovarajuće vrednosti iz form. 35 u 38′ dobija se

$$M_{loga} = \pm\, m_0 \sqrt{[FF \cdot n]} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 38$$

c) *Srednje ostupanje strane* a izvodi se pomoću M_{loga} na sledeći način:

$a = 10^{loga}$. Diferenciranjem dobije se:

$da = 10^{loga} \,.\, \mathrm{Log}_n\, 10 \,.\, d\,(\mathrm{loga})$.

Pošto je $\mathrm{Log}_n\, 10 = \frac{1}{Mod}$, to supstitucijom imamo:

$$da = \frac{10^{loga} \,.\, d\,(\mathrm{loga})}{Mod} = \frac{a\, d\,(\mathrm{loga})}{Mod}$$

Stavljanjem:

$da = M_a$ i $d\,(\mathrm{loga}) = M_{loga}$ dobije se:

$M_a = \pm \frac{a\, M_{loga}}{Mod}$. Ako je M_{loga} izraženo logaritamskim jedinicama x = tog decimalnog mesta, onda je:

$$M_a = \pm \frac{a\, M_{loga}}{10^x\, Mod} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 39$$

d) *Relativno srednje ostupanje strane* a dobije se neposredo iz form. 39:

$$\frac{M}{a} = \frac{M_{loga}}{10^x\, Mod} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 40$$

B_1) Napomene:

a) Ako su prirasti F, odnosno $\triangle$ loga, podeljeni nekim brojem, upr. sa 100 (što se redovno čini kada se radi s logaritmima sa 7 decimala, a to radi toga da bi se izbegli veliki brojevi za sume $[aF]$, $[bF]$, $[cF]$, ... $[FF]$, — onda se dobije algoritam $[FF \cdot n]$ podeljen sa 100^2. Tada je form. 33 u stvari:

$$P_{loga} = \frac{1}{100^2\,[FF \cdot n]} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 41$$

Form. 38 odgovara sada:

$$M_{loga} = \pm\, 100 m_o \sqrt{[FF \cdot n]} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 42$$

b) Pri izvodjenju srednjih ostupanja zanemareno je *srednje ostupanje bazisa* M_b, odnosno *srednje ostupanje logaritma bazisa* M_{logb}. Ako se ovo ostupanje uzme u obzir, onda se radi po form.:

$$M'_{loga} = \pm \sqrt{M^2_{loga} + M^2_{logb}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 43$$

$$M'_a = \pm \sqrt{M^2_a + \frac{a^2}{d^2} M^2_b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 44$$

U modernoj geodetskoj praksi bazis se meri Jederinovim bazisnim instrumentom s invar žicom, koji daje vrlo veliku tačnost. Njime se postiže relativno srednje ostupanje najčešće oko: $\frac{M_b}{b} + \frac{1}{1,000.000}$ do $\frac{1}{3,000.000}$. Nap. za Paraćinski bazis je $\frac{M_b}{b} = \frac{1}{2,811.500}$

Stoga formule 43 i 44 nemaju značaja za bazisnu mrežu, jer su M_{logb} i M_b u odnosu na M_{loga} i M_a mnogo manje veličine, te bilo da se one uzmu u obzir ili ne dobiju se isti rezultat, t. j.:

$$M'_{loga} = M_{loga} \text{ i } M'_a = M_a$$

Medjutim ove formule 43 i 44 moraju se upotrebiti kada se u glavnoj trigonometriskoj mreži hoće da sračuna srednje ostupanje logaritma *neke strane*, odnosno srednje ostupanje same te strane. Tada se mora uzeti u obzir srednje ostupanje logaritma *osnovne* strane, odnosno srednje ostupane same osnovne strane.

II. Odredjivanje težine logaritma strane triangulacije kada su opažanja različitih težina

Ako su izmereni kutevi nejednakih težina (izmereni nejednak broj puta), rad na izjednačenju mreže po uslovnim opažanjima biće isti kao i da su težine kutova jednake, samo će izvesne formule biti drukčije.

Uslovne jednačine ostaju iste, form. 20 Ako težine pojedinih kuteva: l_1, l_2, l_3, ... označimo sa: p_1, p_2, p_3, ...

onda *normalne jednačine korelata* s dopisanom funkcijom za $\triangle$ loga u uslovnim jednačinama analogno formuli $35'$ glase:

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
A)\left\{\frac{aa}{p}\right\}k_1+\left\{\frac{ab}{p}\right\}k_2+\left\{\frac{ac}{p}\right\}k_3+\ldots+w_1 & +\left\{\frac{aF}{p}\right\}K & =0 \\
B)\left\{\frac{ab}{p}\right\}k_1+\left\{\frac{bb}{p}\right\}k_2+\left\{\frac{bc}{p}\right\}k_3+\ldots+w_2 & +\left\{\frac{bF}{p}\right\}K & =0 \\
C)\left\{\frac{ac}{p}\right\}k_1+\left\{\frac{bc}{p}\right\}k_2+\left\{\frac{cc}{p}\right\}k_3+\ldots+w_3 & +\left\{\frac{cF}{p}\right\}K & =0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
\hline
F)\left\{\frac{aF}{p}\right\}k_1+\left\{\frac{bF}{p}\right\}k_2+\left\{\frac{cF}{p}\right\}k_3+\ldots+0 & +\left\{\frac{FF}{p}\right\}K &
\end{array}\right\} \quad 45$$

Normalne jednačine pren. koef. analogno form. 17 sada imaju oblik:

$$\left.\begin{array}{l}
A)\left\{\frac{aa}{p}\right\}\pi_1+\left\{\frac{ab}{p}\right\}\pi_2+\left\{\frac{ac}{p}\right\}\pi_3+\ldots+\left\{\frac{aF}{p}\right\}=0 \\
B)\left\{\frac{ab}{p}\right\}\pi_1+\left\{\frac{bb}{p}\right\}\pi_2+\left\{\frac{bc}{p}\right\}\pi_3+\ldots+\left\{\frac{bF}{p}\right\}=0 \\
C)\left\{\frac{ac}{p}\right\}\pi_1+\left\{\frac{bc}{p}\right\}\pi_2+\left\{\frac{cc}{p}\right\}\pi_3+\ldots+\left\{\frac{cF}{p}\right\}=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\ldots 46$$

Iz form. 46 vidimo da prenosni koeficienti zavise i od težina $p_1, p_2, p_3 \ldots$, pored toga što zavise od oblika mreže i izbora nezavisnih uslova.

Korekcione jednačine analogno form. 14 sada imaju oblik:

$$\left.\begin{array}{l}
p_1 v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots \\
p_2 v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots \\
p_3 v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\ldots\ldots 47$$

Form. za *loga* 26 kao i form. za *njene koeficiente* 25 ostaju i ovde iste.

Za težinu loga po form. 5 dobijamo:

$$P_{\text{loga}} = \frac{1}{\left\{\frac{ff}{p}\right\}} \text{ gde je } \left\{\frac{ff}{p}\right\} = \frac{f_1^2}{(p_1} + \frac{f_2^2}{p_2} + \frac{f_3^2}{p_3)} + \ldots\ldots \quad 48$$

a po *Gauss-ovom načinu odredjivanja*, analogno form. 35:

$$P_{\text{loga}} = \frac{1}{\left\{\frac{FF}{p}.n\right\}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 49$$

Analogno form. 28 imamo sada:

$$\left\{\frac{ff}{p}\right\} = \left\{\frac{FF}{p}\right\} + \left\{\frac{aF}{p}\right\}\pi_1 + \left\{\frac{bF}{p}\right\}\pi_2 + \left\{\frac{cF}{p}\right\}\pi_3 \quad \ldots\ldots \quad 49'$$

a analogno form. 34 sada je:

$$\left\{\frac{ff}{p}\right\} = \left\{\frac{FF}{p}.n\right\} \quad \ldots\ldots \quad 49''$$

Srednje ostupanje jedinice težine sračunava se sada po form.:

$$m_o = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 50$$

gde je n, kao i kod 37′, broj prekobrojnih opažanja, t. j. broj nezavisnih uslovnih jednačina.

Ako je $\triangle$ *loga* podeljeno sa 100, dobijemo:

α) *težinu loga analogno form.* 41:

$$P_{\text{loga}} = \frac{1}{100^2 \left\{\frac{FF}{p}.n\right\}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 51$$

β) *Srednje ostupanje loga analogno form.* 42:

$$M_{\text{loga}} = \pm\ 100\ m_o \sqrt{\left\{\frac{FF}{p}.n\right\}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 52$$

Form. za *srednje ostupanje strane* 39 kao i za *relativno srednje ostupanje* 40 i ovde važe nepromenjene.

Ovde se još javljaju *srednja ostupanja kuteva nakon izjednačenja mreže* i računaju se po form.:

$$m_1 = \pm \frac{m_o}{\sqrt{p_1}};\ m_2 = \pm \frac{m_o}{\sqrt{p_2}};\ m_3 = \pm \frac{m_o}{\sqrt{p_3}}; \quad \ldots\ldots \quad 53$$

Napomena: b_1 od β) u I 4.) važi i ovde.

(Nastaviće se)

o