знавање ретких природних лепота овога краја и хисторијских знаменитости, али виђено се не заборавља.

Растанак. У вечер настаје опраштање — програм је свршен. Један део делегата враћа се у Рим, други остају, трећи путују директно кући. Делегати се растају као стари знанци, премда су се тек пред пет дана упознали. Од домаћих се опраштамо збуњено, задужени превеликом пажњом. На станици се у хитњи измењују адресе, одговара на питања, која су се накнадно појавила, воз полази и ми смо само путници у страној земљи.

Поговор. Била је то само одборска седница. По стварному раду међународних геометарских зборовања још увек припада прво место конгресу у Цириху. Али као манифестација и по свечаности приредаба надмашио је римски састанак све досадање.

Овде су описани догађаји, по могућству хронолошким редом, и у основним потезима. Званични извештај о седницама издаће претседништво Међународног Савеза Геометара

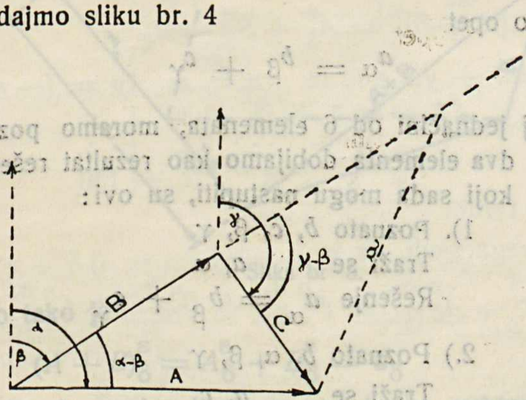
Geom. **Rudolf Mlinar**
Stara Pazova

Vektori i njihove komponente

(1 nastavak.)

I.

Pogledajmo sliku br. 4



Slika br. 4.

Ovde je $A = B + C$

B i C su komponente za A i mi možemo napisati:

$$B = A^{\gamma}_{\beta} \quad \text{i} \quad C = A^{\beta}_{\gamma}$$

te možemo reći, da je

B komponenta za *A* od γ na β i
C „ *A* „ β „ γ

Po svemu, što smo dosada rekli, mi možemo B i C izraziti sa:

$$B = b_{\beta} = A^{\gamma}_{\beta} = a^{\gamma}_{\alpha\beta} = a^{1\,\gamma}_{\alpha\beta} \quad \text{i}$$

$$C = c_{\gamma} = A^{\beta}_{\gamma} = a^{\beta}_{\alpha\gamma} = a^{1\,\beta}_{\alpha\gamma}$$

U običnoj analizi, mi ćemo za komponentu $a^{1\,\beta}_{\alpha\gamma}$ ako posmatramo gornju sliku, gde je

$$a : \sin(\gamma - \beta) = c : \sin(\alpha - \beta)$$

za c dobiti izraz

$$c = \frac{a \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\gamma - \beta)}$$

te pošto je, kao što smo već u prvom izlaganju videli

$$c_{\gamma} = c(\cos\gamma + i \sin\gamma) \text{ odnosno}$$

$$c_{\gamma} = c \cdot e^{i\gamma\frac{\pi}{180}}$$

$$c_{\gamma} = \frac{a \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\gamma - e)} \cdot e^{i\gamma\frac{\pi}{180}} = a^{\beta}_{\alpha\gamma}$$

II

Stavimo opet

$$a_{\alpha} = b_{\beta} + c_{\gamma}$$

U ovoj jednačini od 6 elemenata, moramo poznavati bar četiri, ostala dva elementa dobijamo kao rezultat rešenja.

Slučaji, koji sada mogu nastupiti, su ovi:

1). Poznato *b, c,* β, γ
Traži se *a,* α
Rešenje $a_{\alpha} = b_{\beta} + c_{\gamma}$

2.) Poznato *b,* α, β, γ
Traži se *a, c*
Rešenje $a_{\alpha} = b^{\gamma}_{\beta\alpha}$

$$c_{\gamma} = b^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

3.) Poznato a b, α, γ
Traži se c, β
Rešenje $b_{\beta} = a^{\gamma}_{\alpha b}$
$c_{\gamma} = a^{b}_{\alpha\gamma}$

4.) Poznato a, b, c, α
Traži se β, γ
Rešenje $b_{\beta} = a^{c}_{\alpha b}$
$c_{\gamma} = a^{b}_{\alpha c}$

III.

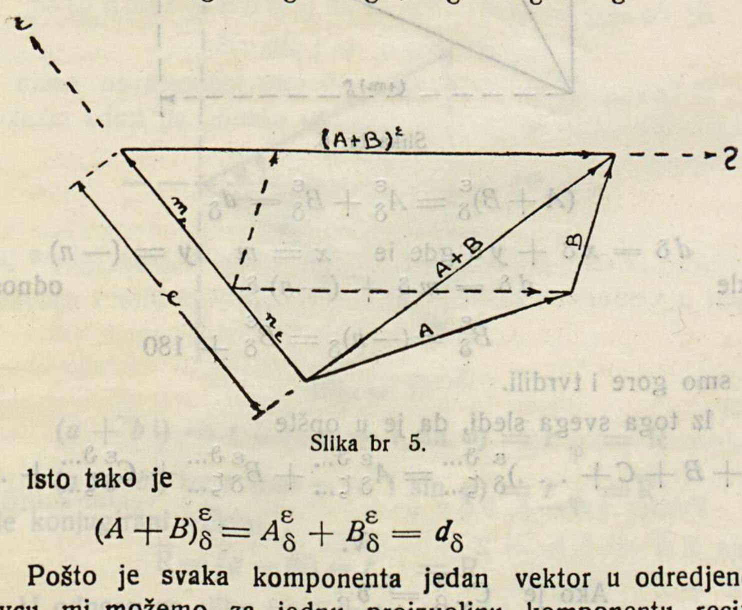
Svaki vektor može biti izraz više komponenata. Tako može biti

$$n_{\nu} = a_{\alpha}{}^{\beta\,\delta\,\mu}_{\gamma\,\varepsilon\,\nu}$$

IV.

Primena distributivnog zakona kod vektora — komponenata. Promatrajući sliku broj 5 mi vidimo, da je

$$(A+B)^{\delta}_{\varepsilon} = l_{\varepsilon} = n_{\varepsilon} + m_{\varepsilon} = A^{\delta}_{\varepsilon} + B^{\delta}_{\varepsilon}$$



Slika br 5.

Isto tako je

$$(A+B)^{\varepsilon}_{\delta} = A^{\varepsilon}_{\delta} + B^{\varepsilon}_{\delta} = d_{\delta}$$

Pošto je svaka komponenta jedan vektor u odredjenom pravcu, mi možemo za jednu proizvoljnu komponentu recimo

B^{γ}_{α} napisati sledeću jednačinu: $B^{\gamma}_{\alpha} = x_{\alpha}$ gde x može biti $x = (+a)$ ili $x = (-a)$ što svakako valja imati u vidu, jer u samom simbolu predznak za a još nije odredjen.

Iz toga sledi, da je

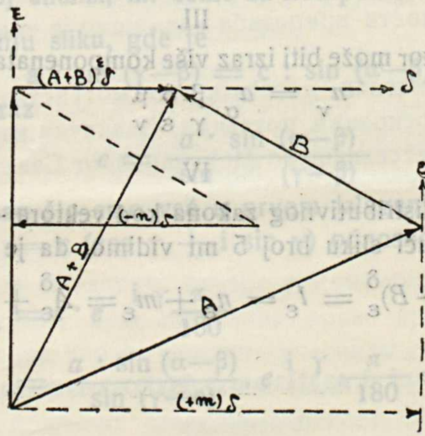
$$B^{\gamma}_{\alpha} = b^{\gamma}_{\beta\alpha} = b_{\beta}{}^{\gamma+180}_{\alpha} = b_{\beta}{}^{\gamma+180}_{\alpha}$$

ali jedino

$$b_{\beta}+180^{\gamma}_{\alpha} = -b^{\gamma}_{\beta\alpha}$$

Pošmatrajući sliku br. 5 u vezi sa slikom br. 6, ovo sve što je ovde rečeno, dolazi jasno do izražaja.

U odnosu na sliku br. 6 je



Slika br. 6.

$$(A+B)^{\varepsilon}_{\delta} = A^{\varepsilon}_{\delta} + B^{\varepsilon}_{\delta} = d_{\delta}$$

$$d\delta = x\delta + y\delta \text{ gde ie } \quad x = m \quad y = (-n)$$

dakle $\qquad d\delta = m\delta + (-n)\delta \qquad$ odnosno

$$B^{\varepsilon}_{\delta} = (-n)_{\delta} = B^{\varepsilon}_{\delta} + 180$$

što smo gore i tvrdili.

Iz toga svega sledi, da je u opšte

$$(A+B+C+\ldots)^{\varepsilon\ \vartheta\ldots}_{\delta\ \zeta\ldots} = A^{\varepsilon\ \vartheta\ldots}_{\delta\ \zeta\ldots} + B^{\varepsilon\ \vartheta\ldots}_{\delta\ \zeta\ldots} + C^{\varepsilon\ \vartheta\ldots}_{\delta\ \zeta\ldots} + \ldots$$

V.

Ako je $\quad C^{\alpha}_{\gamma\beta} = b_{\beta}$,

$$\text{onda je } b = \frac{C_{\gamma\,\beta}^{\;\alpha}}{1_\beta}$$

pa da bi naši simboli bili još jednostavniji, stavićemo

$$\frac{C_{\gamma\,\beta}^{\;\alpha}}{1_\beta} = C_{\gamma}\frac{\alpha}{\beta}$$

S obzirom na ovo, mi smo sada u stanju, da

$a \,.\, \sin\alpha$ izrazimo sa $a_{\alpha}\frac{0}{90}$

$a \,.\, \cos\alpha$ „ „ $a_{\alpha}\frac{90}{0}$

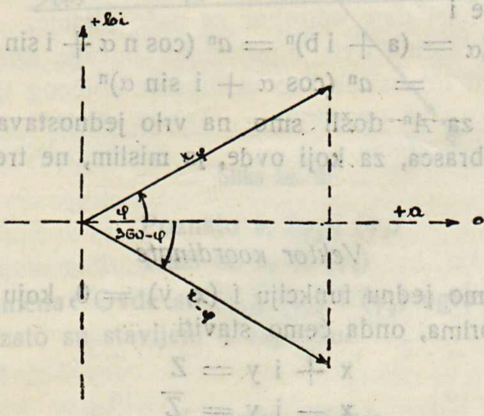
$a \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha$ „ „ $a\,\frac{\alpha}{90}$

$a \,.\, \mathrm{ctg}\,\alpha$ „ „ $a_{90}\frac{\alpha}{0}$

$a : \sin\alpha$ „ „ $a_{90}\frac{0}{\alpha}$ i t. d.

VI.

Konjugirani vektor i njegove komponente.
U odnosu na sliku br. 7 jeste



Slika br. 7.

$$(a + b\,\mathrm{i}) = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi) = r_{\varphi} = \mathrm{R}$$

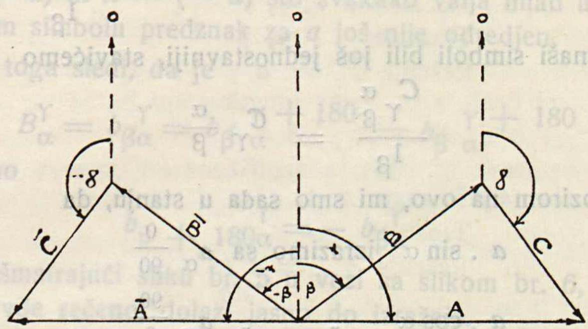
$$(a - b\mathrm{i}) = r\,(\cos\varphi - \mathrm{i}\,\sin\varphi) = r_{-\varphi} = \overline{\mathrm{R}}$$

dakle konjugirani vektor

$$\overline{\mathrm{R}} = (a - b\mathrm{i}) = r_{-\varphi} = \overline{\mathrm{R}}$$

U odnosu na sliku br. 8 jeste

$A = B + C \quad B = A^{\gamma}_{\beta} \quad C = A^{\beta}_{\gamma}$



Slika br. 8.

$\overline{A} = \overline{B} + \overline{C} \quad \overline{B} = b_{-\beta} = a^{-\gamma}_{-\alpha-\beta} \quad \overline{C} = c_{-\gamma} = a^{-\beta}_{-\alpha-\gamma}$

Stepenovanje vcktora

Mi smo već imali $a_{\alpha} \cdot b_{\beta} = a \cdot b_{\alpha+\beta}$
ako je $a = b$ i $\alpha = \beta$ onda će biti

$$a_{\alpha} \cdot b_{\beta} = a_{\alpha} \cdot a_{\alpha} = a^2_{2\alpha} = A^2$$

ali prema tome i

$$A^n = a^n_{n\alpha} = (a + i\,b)^n = a^n (\cos n\,\alpha + i \sin n\,\alpha) =$$
$$= a^n (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$$

U izrazu za A^n došli smo na vrlo jednostavan način do Moivreovog obrasca, za koji ovde, ja mislim, ne treba nikakvog objašnjenja.

Vektor koordinate

Ako imamo jednu funkciju f (x, y) = 0, koju želimo pretstaviti u vektorima, onda ćemo staviti

$$x + i\,y = Z$$
$$x - i\,y = \overline{Z}$$

sledi

$$x = \frac{Z + \overline{Z}}{2} \qquad y = \frac{Z - \overline{Z}}{2\,i}$$

Primer $a\,x + b\,y + 1 = v$ biti će u vektor-koordinatama $Z\,\overline{A} + \overline{Z}\,A = 2\,(v - 1)$ na osnovu

$$\frac{a\,(Z + \overline{Z})}{2} + \frac{b\,(Z - \overline{Z})}{2\,i} + 1 = v$$

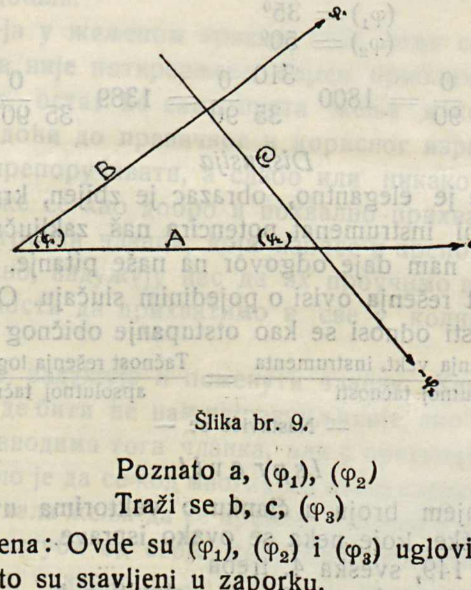
$$
\begin{aligned}
iaZ + ia\bar{Z} + bZ - b\bar{Z} + 2il &= 2\,i\,v \\
i^2aZ + i^2a\,\bar{Z} + ib\bar{Z} - ib\bar{Z} - 2\,l &= 2\,i^2\,v \\
- aZ - a\bar{Z} + ibZ - ib\bar{Z} - 2\,l &= -\,2\,v \\
+ \quad + \quad - \quad + \quad\quad + &= + \text{ i za } A = (a + ib) \\
Z\,(a - ib + Z\,(a + ib &= 2\,v - 2\,l
\end{aligned}
$$

$$Z\bar{A} + \bar{Z}A = 2\,v - 2\,l = a\,.\,z\zeta - \alpha + a \cdot z_{\alpha - \zeta}$$

jedan slučaj, na koji ćemo se kasnije još obratiti.

Primena vektorne metode na rešavanju pojedinih slučajeva u planimetriji

Rešavanje *trougla.*



Slika br. 9.

Poznato a, (φ_1), (φ_2)

Traži se b, c, (φ_3)

Napomena: Ovde su (φ_1), (φ_2) i (φ_3) uglovi, za razliku od pravaca i zato su stavljeni u zaporku.

1. Opšte rešenje

Pre svega ćemo staviti $a_\alpha = a_o$ što možemo uvek učiniti, pa ćemo imati.

$$b = a\,\frac{-\,\varphi_2}{\varphi_1}$$

$$c = a\,\frac{L_1\;\varphi_1}{L_2\;\varphi_2}$$

2. Rešenje u brojevima

Poznato $a = 60$ m

$(\varphi_1) = 35^0$

$(\varphi_2) = 50^0$

iz toga će biti

$$b = 60 \frac{310}{35} = 46{,}3 \text{ m}$$

$$c = 60 \frac{35}{310} = 34{,}7 \text{ m}$$

$$(\varphi_3) = 95^0$$

Površina trougla iz a, (φ_1), (φ_2).

Opšte rešenje $P = \left\{\frac{a^2}{2}\right\} \frac{-\varphi_2}{\varphi_1} \frac{0}{90}$

Brojno rešenje $a = 60$ m

$(\varphi_1) = 35^0$

$(\varphi_2) = 50^0$

$$P = \left\{\frac{60^2}{2}\right\} \frac{310}{35} \frac{0}{90} = 1800 \frac{310}{35} \frac{0}{90} = 1389 \ {}_{35}\frac{0}{90} = 797 \text{ m}^3$$

Diskusija

1. Rešenje je elegantno, obrazac je zbijen, kratak i jasan.
2. Vektorni instrumenat potencira naš zaključak — u dva tri zaokreta, on nam daje odgovor na naše pitanje.
3. Tačnost rešenja ovisi o pojedinim slučaju. Otstupanje od apsolutne tačnosti odnosi se kao otstupanje običnog logaritmara.

$$\frac{\text{Tačnost rcšenja vekt. instrumenta}}{\text{apsolutnoj tačnosti}} = \frac{\text{Tačnost rešenja logaritmara}}{\text{apsolutnoj tačnosti}}$$

— Nastaviće se —

Ispravi!

U pređašnjem broju u članku o vektorima uvukle su se štamparske greške, koje neka se ovako isprave.

Na strani 149, sveska 4. treba

umesto $a \,.\, b_\alpha + \beta$ staviti $a.\, b_{\alpha + \beta}$

" $\left\{\frac{a}{b}\right\} \alpha + \beta$ " $\left\{\frac{a}{b}\right\}_{\alpha - \beta}$

" $a - \alpha$ " $a_{-\alpha}$

" $a.\, 1\ \alpha$ " $a.\, 1_\alpha$

" $1\ \alpha$ " 1_α

gde je 1_α = vektorna jedinica.