**но уочили стари наши законодавци и писци. И ако за ширу акцију оснивања мањкају велика материјална сретства, оснивање ипак напредује захваљујући великој увиђавности, вољи и пожртвованости људи који свеликим с пособностима и маром руководе израдом нешег катастра и оснивањем земљ. књиге, који знају да оваква ствар није и несме накада бити прескупа и који су нас спасли од незавидне судбине да ни после сто година не схватимо ону вредност, коју су наши стари одавно већ јавно истакли.**

---

**Ing. A. S. Milošević**

# Najcelishodnija razdeoba težina kuteva u bazisnoj mreži.

— Nastavak iz prošlog broja —

Kada se normalne jednačine korelata **16** pomnože prenosnim koeficientima $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots$ i saberu s desnom stranom form. **15,** dobije se:

$$\begin{aligned}\log a = \log b + [\log \sin l] &+ k_1\ [aF] + k_2\ [bF] + k_3\ [cF] + \ldots + \\ &+ k_1\ [aa]\,\pi_1 + k_2\,[ab]\,\pi_1 + k_3\,[ac]\,\pi_1 + \ldots + \\ &+ k_1\,[ab]\,\pi_2 + k_2\,[bb]\,\pi_2 + k_3\,[bc]\,\pi_2 + \ldots + \\ &+ k_1\,[ac]\,\pi_3 + k_2\,[bc]\,\pi_3 + k_3\,[cc]\,\pi_3 + \ldots + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \pi_1\,w_1 + \pi_2\,w_2 + \pi_3\,w_3 + \ldots\end{aligned}$$

ili

$$\left.\begin{aligned}&\log a = \log b + [\log \sin l] + \\ &+ \{[aa]\,\pi_1 + [ab]\,\pi_2 + [ac]\,\pi_3 + \ldots + [aF]\}\,k_1 + \\ &+ \{[ab]\,\pi_1 + [bb]\,\pi_2 + [bc]\,\pi_3 + \ldots + [bF]\}\,k_2 + \\ &+ \{[ac]\,\pi_1 + [bc]\,\pi_2 + [cc]\,\pi_3 + \ldots + [cF]\}\,k_3 + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \pi_1\,w_1 + \pi_2\,w_2 + \pi_3\,w_3 + \ldots\ldots\end{aligned}\right\}\ \mathbf{18}$$

Obzirom na uslov form. **17,** pod kojim će se odrediti prenosni koeficiteti, članovi u velikim zagradama form. **18** jesu nule, odnosno korelate se eliminiraju, stoga je:

$$\text{og } a = \log b \ [\text{lod} \sin e] + \pi_1 w_1 + \pi_2 w_2 + \pi_3 w_3 + \ldots\ldots \quad \mathbf{19}$$

Formulom **19** izražen je loga kao linearna funkcija ostupanja $w_1, w_2, w_3 \ldots$ uslovnih jednačina, a konačan obiik, da se loga izrazi kao funkcija opažanih veličina, dobije se sledećim izvođenjem.

Kada se u uslovnim jednačinama:

$$\left.\begin{array}{l} A)\ a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + w_1 = 0 \\ B)\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + w_2 = 0 \\ C)\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + w_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \mathbf{20}$$

zamene korekcije $v$ iz form. **8** dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} A),\ (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots) - \\ \quad - \{a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots\} + w_1 = 0 \\ B),\ (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x + \ldots) - \\ \quad - \{b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + \ldots\} + w_2 = 0 \\ C),\ (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \ldots) - \\ \quad - \{c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + \ldots\} + w_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \mathbf{21}$$

U ovim formulama izrazi u malim zagradama jesu konstante. Za figurne uslove ovi izrazi su teoretske vrednosti:

$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots) = 180^\circ + \varepsilon$, ($\varepsilon$ = sf. eksces), a isto je teoretska vrednost, kada se mreža izjednačuje po kutevima, i za uslove horizonta:

$(g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + \ldots.) = 360^0$. Za polusne uslove ovi izrazi su prosto suma produkata izjednačenih veličina $x_1, x_2, x_3 \ldots$ i odgovarajućih koeficienata uslovne jednačine polusa:

$$(h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 \ldots) = Ho$$

Stoga oznakom:

$$\left.\begin{array}{l} A)\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots = A_0 \\ B)\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots = B_0 \\ C)\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots = C_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \mathbf{22}$$

i zamenom ovih veličina u **21** dobije se:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{A)}\ A_0 - \{a_1\, l_1 + a_2\, l_2 + a_3\, l_3 + \ldots\} + w_1 = 0 \\
\text{B)}\ B_0 - \{b_1\, l_1 + b_2\, l_2 + b_3\, l_3 + \ldots\} + w_2 = 0 \\
\text{C)}\ C_0 - \{c_1\, l_1 + c_2\, l_2 + c_3\, l_3 + \ldots\} + w_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad 23$$

Dodavanjem i oduzimanjem sume $[Fl]$ i uvrštenjem vrednosti za ostupanja uslovnih jednačina iz form. 23 u 19 dobije se:

$$\begin{array}{l}
\log a = \log b + [\log \sin l] - [Fl] + F_1\, l_1 + F_2\, l_2 + F_3\, l_3 + \ldots + \\
\quad + \{(a_1\, l_1 + a_2\, l_2 + a_3\, l_3 + \ldots) - A_0\}\ \pi_1 + \\
\quad + \{(b_1\, l_1 + b_2\, l_2 + b_3\, l_3 + \ldots) - B_0\}\ \pi_2 + \\
\quad + \{c_1\, l_1 + c_2\, l_2 + c_3\, l_3 + \ldots) - C_0\}\ \pi_3 + \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ili}
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\log a = \log b + [\log \sin l] - [Fl] - \\
\qquad - (A_0\, \pi_1 + B_0\, \pi_2 + C_0\, \pi_3 + \ldots) + \\
\quad + \{F_1 + a_1\, \pi_1 + b_1\, \pi_2 + c_1\, \pi_3 + \ldots\}\ l_1 + \\
\quad + \{F_2 + a_2\, \pi_1 + b_2\, \pi_2 + c_2\, \pi_3 + \ldots\}\ l_2 + \\
\quad + \{F_3 + a_3\, \pi_1 + b_3\, \pi_2 + c_3\, \pi_3 + \ldots\}\ l_3 + \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad 24$$

Označimo:

$$\left.\begin{array}{l}
f_0 = \log b + [\log \sin l] - [Fl] - (A_0\, \pi_1 + B_0\, \pi_2 + C_0\, \pi_3 + \ldots) \\
\quad f_1 = F_1 + a_1\, \pi_1 + b_1\, \pi_2 + c_1\, \pi_3 + \ldots \\
\quad f_2 = F_2 + a_2\, \pi_1 + b_2\, \pi_2 + c_2\, \pi_3 + \ldots \\
\quad f_3 = F_3 + a_3\, \pi_1 + b_3\, \pi_2 + c_3\, \pi_3 + \ldots \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad 25$$

Zamenom form. 25 u 24 dobijemo konačno željeni cilj: kog $a$ kao linearnu funkciju opažanih veličina $l_1$, $l_2$, $l_3$, . . . t. j. u obliku form. 1:

$$\log a = f_0 + f_1\, l_1 + f_2\, l_2 + f_3\, l_3 + \ldots \qquad 26$$

Sada treba kontrolisati da li funkcija 26 odgovara prirodi funkcije 1, tj. da li su koeficienti $f_1$, $f_2$, $f_3$ . . . zaista nezavisni od opažanih veličina $l_1$, $l_2$, $l_3$. Svaki od ovih koeficienata $f_1$ funkcija je odgovarajućeg prirasta $F_i$, prenosnih koeficienata $\pi$ i koeficienata uslovnih jednačina $a$, $b$, $c$ . . .:

$$f_i = f\,(F_i,\, a_i\, \pi_1,\, b_i\, \pi_2,\, c_i\, \pi_3\, \ldots)$$

Iz form. 12 i 17 moglo bi se pogrešno zaključiti da su prirast $F_i$ i prenosni koeficienti $\pi$ zavisni od opažanih veličina $l$ Međutim to ne stoji. Može se za koju sekundu, pa i 10″ promeniti opažane veličine $l$, prirast $F_i$ odnosno i prenosni koeficienti $\pi$ ostaće nepromenjeni, tj. ove veličine su nezavisne od opažanja, već zavise od apsolutnih veličina kuteva, ili drukčije rečeno: prirast $F_i$ i prenosni koeficienti $\pi$ nezavisni su od opažanih veličina, već zavise od oblika mreže. Ove veličine zavisne su samo još od izbora nezavisnih uslova. Dakle u svemu zavisne su od istih argumenata od kojih zavise i koeficienti uslovnih jednačina, a ne zavise od opažanja. Prema tome i koeficienti $f_i$ su nezavisni od opažanja.

Potrebno je još dokazati da je nezavisan član:

$$f_0 = \log b + [\log \sin l] - [Fl] - (A_0 \pi_1 + B_0 \pi_2 + C_0 \pi_3 + \ldots)$$

konstantan, tj. nezavisan od opažanih veličina $l$. Na prvi pogled čini se da ova nezavisnost ne postoji, pošto se javlaju članovi $[\log \sin l]$ i $[Fl]$. Međutim to ne stoji. Svaki od ovih članova posebice odista je zavisan od opažanih veličina $l$, ali u obliku diferencije, kako se javljaju i $f_0$, oni daju konstantu. O tome se lako uveravamo.

Posmatrajmo funkciju:

$\varphi = \log \sin x_i - F_i\, x_i$, u kojoj je prema ranijem označivanju:

$x_i$ = izjednačena vrednost opažanja $l_i$

$F_i$ = prirast log sin kuta $l_i$ za 1″.

Ova funkcija $\varphi$ je konstantna. Izvršimo u njoj zamenu po form. 8

$$x_i = l_i + v_i. \text{ tada je:}$$

$\varphi = \log \sin (l_i + v_i) - F_i\,(l_i - v_i)$, aii je po 12″:

$\log \sin (l_i + v_i) = \log \sin l_i + F_i\, v_i$, te kada se zameni u $\varphi$, dobije se

$\varphi = \log \sin l_i + F_i\, v_i - F_i\, l_i - F_i\, v_i = \sin l_i - F_i\, l_i$, ili kada se obrazuje suma za sve kuteve koji se javljaju u form. 7, dobije se:

$$[\varphi] = [\log \sin l] - [Fl]$$

Pošto je funkcija $\varphi$ konstantna, to je i $[\varphi] = konst.$, odnosno $[\log \sin l] - [Fl] = konst.$

Za ostale članove $A_0$, $B_0$, $C_0$... i prenosne koeficiente $\pi$ dokazali smo da su nezavisne od opažanja; isto je i $log\ b =$ *konst.*

Iz svega se zaključuje da je:

$$fo = \text{konst.}$$

*3) Težina logaritma strane triangulacije $P_{loga}$*

Pošto je form. 26 identična sa form. 1, to se po form. 6 dobije:

$$P_{loga} = \frac{1}{[ff]}, \text{ gde je } [ff] = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots \qquad \mathbf{27}$$

Koeficienti $f$ sračunavaju se po form. 25

Težina $P_{loga}$, osim po form. 27 može se sračunati drukčije. Iz form. 25 je:

$$\left.\begin{aligned}
[ff] = [FF] &+ 2[aF]\pi_1 + 2[bF]\pi_2 + 2[cF]\pi_3 + \dots + \\
&+ [aa]\pi_1^2 + 2[ab]\pi_1\pi_2 + 2[ac]\pi_1\pi_3 + \dots + \\
&+ [bb]\pi_2^2 + 2[bc]\pi_2\pi_3 + \dots \dots + \\
&+ [cc]\pi_3^2 + \dots \dots \dots + \\
&\dots \dots \dots \dots + \\
&\dots \dots \dots \dots
\end{aligned}\right\} \dots 27$$

ili:

$$\left.\begin{aligned}
[ff] = [FF] &+ [aF]\pi_1 + [bF]\pi_2 + [cF]\pi_3 + \dots + \\
+ [aF]\pi_1 &+ \{[aa]\pi_1 + [ab]\pi_2 + [ac]\pi_3 + \dots\}\pi_1 + \\
+ [bF]\pi_2 &+ \{[ab]\pi_1 + [bb]\pi_2 + [bc]\pi_3 + \dots\}\pi_2 + \\
+ [cF]\pi_3 &+ \{[ac]\pi_1 + [bc]\pi_2 + [cc]\pi_3 + \dots\}\pi_2 + \\
&\dots \dots \dots \dots \\
&\dots \dots \dots \dots
\end{aligned}\right\} \dots 27''$$

Članovi u velikoj zagradi form. 27'', obzirom na form. 17, iznose:

$$\begin{aligned}
[aa]\pi_1 + [ab]\pi_2 + [ac]\pi_3 + \dots &= -[aF] \\
[ab]\pi_1 + [bb]\pi_2 + [bc]\pi_3 + \dots &= -[bF] \\
[ac]\pi_1 + [bc]\pi_2 + [cc]\pi_3 + \dots &= -[cF] \\
\dots \dots \dots \dots & \\
\dots \dots \dots \dots & \text{ stoga,}
\end{aligned}$$

kada se izvrši supstitucija ovih vrednosti u form. 27'' i redukcija, dobije se:

$$[ff] = [FF] + [aF]\pi_1 + ]bF]\pi_2 + [cF]\pi_3 + \dots \dots \qquad 28$$

Težina *P loga* ne računa se ni po form. **28**, je pošto Gauss-ov način najlakši. On se sastoji u sledećem.

Oznakom:

$$\varphi = [aF]\,\pi_1 + [bF]\,\pi_2 + [cF]\,\pi_3 + \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{28'}$$

i zamenom ove vrednosti u **28**, dobije se:

$$[ff] = [FF] + \varphi \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{28''}$$

Množenjem norm. jedn. pren. koef., form. **17**, s prenosnim koeficientima $\pi_1\ \pi_2\ \pi_3 \ldots\ldots$ i zamenom odgovarajućih veličina u form. **28'**, dobije se:

$$\begin{aligned}\varphi = -\ \{\ & [aa]\,\pi_1^2 + [ab]\,\pi_1\,\pi_2 + [ac]\,\pi_1\,\pi_3 + \ldots\ldots + \\ & + [ab]\,\pi_1\,\pi_2 + [bb]\,\pi_2^2 + [bc]\,\pi_2\,\pi_3 + \ldots\ldots + \\ & + [ac]\,\pi_1\,\pi_3 + [bc[\,\pi_2\,\pi_3 + [cc]\,\pi_3^2 + \ldots\ldots + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} = \\ = -\ \{\ & [aa]\,\pi_1^2 + [bb]\,\pi_2^2 + [cc]\,\pi_3^2 + \ldots\ldots\ldots + \\ & + 2\,[ab]\,\pi_1\,\pi_2 + 2\,[ac]\,\pi_1\,\pi_3 + \ldots\ldots\ldots + \\ & + 2\,[bc]\,\pi_2\,\pi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1\}\end{aligned}$$

Radi jednostavnosti izvodimo dalje kao da su samo tri normalne jednačine, onda iz poslednjeg izlaza imamo:

$$\varphi = -\ [aa]\left\{\pi_1^2 + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}\,\pi_2^2 + \frac{[ac]^2}{[aa]^2}\,\pi_3^2 + 2\,\frac{[ab]}{[aa]}\,\pi_1\,\pi_2 + \right.$$

$$\left. + 2\,\frac{[ac]}{[aa]}\,\pi_1\,\pi_3 + 2\,\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]^2}\,\pi_3\,\pi_3\right\} - [bb]\,\pi_2^2 + \frac{[ab]^2}{[aa]}\,\pi_2^2 -$$

$$- 2\,[bc]\,\pi_2\,\pi_3 + 2\,\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\,\pi_2\,\pi_3 - [cc]\,\pi_3^2 + \frac{[ac]^2}{[aa]}\,\pi_3^2 =$$

$$= [aa]\left\{\pi_1 + \frac{[ab]}{[aa]}\,\pi_2 + \frac{[ac]}{[aa]}\,\pi_3\right\}^2 - \left\{[bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}\right\}\pi_2^2 -$$

$$- 2\left\{[bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right\}\pi_2\,\pi_3 - \left\{[cc] - \frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}\right\}\pi_3^2 \text{ ili}$$

$$\varphi = -\,[aa]\left\{\pi_1 + \frac{[ab]}{[aa]}\,\pi_2 + \frac{[ac]}{[aa]}\,\pi_3\right\}^2 - [bb\cdot 1]\,\pi_2^2 - =$$

$$= -\,2\,[bc\cdot 1]\,\pi_2\,\pi_3 - [cc\cdot 1]\,\pi_3^2\,\pi_3^2\,[aa]\left\{\pi_1 + \frac{[ab]}{[aa]}\,\pi_2 + \frac{[ac]}{[aa]}\,\pi_3\right\}^2 -$$

$$- [bb \cdot 1] \left\{ \pi_2{}^2 + 2 \frac{[bc.1]}{[bb \cdot 1]} \pi_2 \, \pi_3 + \frac{[bc \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]^2} \pi_3{}^2 \right\} - \left\{ [cc.1] - \right.$$

$$\left. - \frac{[bc.1]\,[bc.1]}{[bb.1]} \right\} \pi_3{}^2 =$$

$$\varphi = - \left[ [aa] \left\{ \pi_1 + \frac{[ab]}{[aa[} \pi_2 + \frac{[ac]}{[aa]} \pi_3 \right\}^2 + [bb \cdot 1] \left\{ \pi_2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \pi_3 \right\}^2 + [cc \cdot 2] \, \pi_3 \, \pi_3^{2''} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 29$$

Za norm. jedn. pren, koef., form. 17, reducirane normalne jednačine su:

$$\begin{aligned} [aa]\, \pi_1 + [ab]\, \pi_2 + [ac]\, \pi_3 + \ldots\ldots + [aF] &= 0 \\ [bb \cdot 1]\, \pi_2 + [bc \cdot 1]\, \pi_3 + \ldots\ldots + [bF \cdot 1] &= 0 \\ [cc.2]\, \pi_3 + \ldots\ldots + [cF.2] &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ili

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 + \frac{[ab]}{[aa]} \pi_2 + \frac{[ac]}{[aa]} \pi_3 + \ldots\ldots + \frac{[aF]}{[aa]} &= 0 \\ \pi_2 + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \pi_3 + \ldots\ldots + \frac{[bF \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} &= 0 \\ \pi_3 + \ldots\ldots + \frac{[cF \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right\} \ldots 30$$

— Nastaviće se —

---

Geom. **Rudolf Mlinar,** Stara Pazova.

## Vektori, njihov značaj i njihova primena u geodeziji

Nije mi namera, da ovde potanko izložim svu disciplinu računanja sa vektorima, nego bih želeo, da ukratko prikažem, koliko je jednostavna ova metoda i time da zainteresujem cenj. čitaoce za ovu metodu računanja, koja nije još razgranjena, ali ipak obećava u budućnosti velik razvitak.