Geod. **Stjepan Horvat,**
pristav tehničkog fakulteta u Zagrebu.

Preračunavanje koordinata u Gauss — Krüger-ovoj projekciji.

(Nastavak)

Kako se i jednačine pod VI. može zaključiti, lokalna orijentacija dade se odredjivati pomoću jedne poznate lokalne orijentacije za čitav niz novih tačaka tako, da se odredjuju redukcije smera. Da se ovaj račun moče provesti, potrebno je imati približne koordinate tačaka u jednom i u drugom sistemu. Ovakovo preračunavanje može se obaviti pomoću jednačina (2), dakako samo približno tačno. Kako ćemo tokom daljeg razlaganja viditi, još će biti bolje i brže ovo provizorno preračunavanje obaviti pomoću grafičke konstrukcije.

Pomoću dobivene nove lokalne orijentacije mogu se na novom stajalištu računati lokalne deformacije smernih kuteva t. j., kut zaokreta ε pomoću jednačine (8), te dalje lokalne orijentacije za nove tačke.

Tada će biti potrebno, da odredimo lokalne deformacije smera za slučaj, da se radi o dvim (napr. I. klasnim) tačkama, za koje se dadu lokalne orijentacije računati direktno. U tom slučaju naime možemo iz obih lokalnih orijentacija lako izračunati lokalnu deformaciju smera na sledeći način:

Prema ranijem razlaganju imamo ovakve formule:

$$\varepsilon_{1\cdot 2} = (\gamma''_1 - \gamma'_1) + (\delta''_{1\cdot 2} - \delta'_{1\cdot 2}) \quad . \; . \; (32)$$

i

$$\varepsilon_{2\cdot 1} = \varepsilon_{1\cdot 2} = (\gamma''_2 - \gamma''_1) + (\delta''_{2\cdot 1} - \delta'_{2\cdot 1}) \quad . \; . \; (33)$$

Aritmetska sredina ovih jednačina daje:

$$\varepsilon_{1\cdot 2} = \frac{1}{2}\Big[(\gamma''_1 - \gamma'_1) - (\gamma''_2 - \gamma'_2)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[(\delta''_{1\cdot 2} - \delta'_{1\cdot 2}) + (\delta''_{2\cdot 1} - \delta'_{2\cdot 1})\Big] \quad . \; . \; . \; (34)$$

Drugi član na desnoj strani jednačine (34) je vrlo malena vrednost, pa ćemo ga stoga transformirati na drugi oblik:

$$[(\delta''_{1\cdot 2} - \delta'_{1\cdot 2}) + (\delta''_{2\cdot 1} - \delta'_{2\cdot 1})] = [(\delta''_{1\cdot 2} + \delta''_{2\cdot 1}) - (\delta'_{1\cdot 2} - \delta'_{2\cdot 1})]$$

Kako je:

$$\delta_{1\cdot 2} + \delta_{2\cdot 1} = \frac{\rho}{6_r{}^2}(x_2 - x_1)\,[2\,y_1 + y_2 - y_1 - 2y_2^2)] =$$

$$= - \frac{\rho}{6_r{}^2}(x_2 - x_1)\,(y_2 - y_1)$$

biće:

$$\left[(\delta''_{1\cdot2} + \delta''_{2\cdot1}) - (\delta'_{1\cdot2} - \delta'_{2\cdot1})\right] = \frac{\rho}{6_r{}^2}\left[(y'_2 - y_1)(x'_2 - x'_1) - \right.$$

$$\left. - (y''_2 - y''_1)(x''_2 - x''_1)\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Iz ranijih je izvoda poznato, da za ovaj slučaj dovoljno tačnom aproksinacijom možemo pisati, da je:

$$\triangle y' = \cos\varepsilon \, \triangle y'' + \sin\varepsilon \, \triangle x''$$

$$\triangle x' = \cos\varepsilon \, \triangle x'' - \sin\varepsilon \, \triangle y''$$

a prema tome i:

$$\triangle y' \, \triangle x' = \triangle y'' \, \triangle x'' \, (\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon) +$$

$$+ \sin\varepsilon \cos\varepsilon \, (\triangle x''^2 - \triangle y''^2)$$

Kako je $\triangle y'' = s \sin t''$; $\triangle x'' = s \cos t''$

biće

$$\triangle y' \, \triangle x' = \frac{1}{2} s^2 \sin 2t'' \cos 2\varepsilon + \frac{1}{2} s^2 \cos 2t'' \sin 2\varepsilon$$

ili

$$\triangle y' \, \triangle x'' = \frac{1}{2} s^2 \sin 2\,(t'' + \varepsilon) \quad . \; . \; . \quad (36)$$

Uvrstimo li vrednost (36) u jednačinu (35) dobićemo, da je:

$$\left[(\delta''_{1\cdot2} + \delta''_{2\cdot1}) - (\delta'_{1\cdot2} + \delta'_{2\cdot1})\right] =$$

$$= \frac{\rho}{12\,r^2} s^2 \left[\sin 2\,(t'' + \varepsilon) - \sin 2t''\right]$$

$$= \frac{\rho}{6\,r^2} s^2 \cos\,(2t'' + \varepsilon) \sin\varepsilon$$

Konačno ćemo dobiti za lokalnu deformaciju smera:

$$\varepsilon_{1\cdot2} = \frac{1}{2}\left[(\gamma''_1 - \gamma''_1) + (\gamma''_2 - \gamma'_1)\right] +$$

$$+ \frac{\rho}{12\,r^2} s^2 \cos\,(2t'' + \varepsilon) \sin\varepsilon \quad . \; . \; . \; : \quad \text{VII.}$$

Ova je formula, kako smo rekli, povoljna u slučaju, da imamo obe tačke P_1 i P_2 zadane i geografskim koordinatama, kao što je to redovito slučaj kod tačaka prvoklasne mreže.

Član drugi u jednačini VII, ima malenu vrednost. Tako n.pr. za dužinu stanica od 100 km može drugi član iznašati maksimalno $\pm$ 0″.156.

Drugi način određivanja lokalne redukcije dužina.

Lokalnu redukciju stranica možemo odrediti i pomoću pravokutnih koordinata i to sa tačnosti, koju želimo, relativno vrlo jednostavnim putem.

Za redukciju dužina povoljno dugih triangulacionih strana imamo ovakovu formulu.

$$\log s_{1\cdot 2} - \log S_{1\cdot 2} = \log \sigma_{1\cdot 2} = + \frac{\mu}{2\,r^2_m}\, y^2_m + \frac{\mu}{24\, r^2_m} \triangle y^2 -$$

$$- \frac{\eta^2 t}{6\, r^3}\,(x_2 - x_1)\,(y^2_2 - y^2_1)$$

$$- \frac{\mu}{24\, r^4}\, y^4_m + \frac{\mu}{24\, r^4}\, y^2_m \triangle x^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (39)$$

U ovoj formuli su ispušteni članovi sa $\triangle y^4$ i $\triangle y^2 \triangle x^2$, kao članovi, koji će i za maksimalne dimenzije biti bez ikakovog značenja.

Jednačina (38) dade se reducirati na praktični mnogo jednostavniji oblik.

U prvom redu ćemo ispitati uticaj zadnjeg člana:

$$\frac{\mu}{24\, r^4}\, y_m^2 \triangle x^2.$$

Uzećemo kao maksimalne vrednosti y_m max $=$ 150 km. i $\triangle x =$ $=$ 100 km. Za ove maksimalne vrednosti iznaša ovaj član svega:

$$\left(\frac{\mu}{24\, r^4}\, y_m{}^2 \triangle x^2\right) \text{ max} = 0.025 \text{ jedinica 7. logaritamske decimale.}$$

Dakle i za najduže stranice nema nikakvog uticaja.

Kako je $\eta^2 t = e'^2 \sin\varphi \cos\varphi$, može $\eta^2 t$ imati maksimalnu vrednost $\frac{1}{2}\, e'^2$. Prema tome biće:

$$\frac{\mu\, \eta^2 t}{3\, r^3}\,(x_2 - x_1)\; y_2 - y_1)\; y_m = \frac{\mu\, e'^2}{12\, r^3}\, y_s\, s_{1\cdot 2}{}^2 \sin 2\, t_{1\cdot 2}$$

Gornji izraz biće maksimalan, ako je $t_1 = 45°$. Ako uzmemo maksimalnu stranicu $s_{1\cdot 2} = 100$ km i $y_m = 150$ km, iznašaće ovaj član u svemu:

$$\left(\frac{\mu\, e'^2}{12\, r^3}\, y_s\, s_{1\cdot 2}{}^2 \sin 2\, t_{1\cdot 2}\right) \text{ max} = 0.014 \text{ jed. 7. dec. logaritma.}$$

Dakle možemo ga napustiti.

Prema tome za redukciju strana preostaće ovakova formula, koja će vrediti i za najduže stranice I. reda:

$$\log \sigma_{1\cdot 2} = \frac{\mu}{2 r_m{}^2}\, y^2_m - \frac{\mu}{12\, r^4}\, y_m{}^4 + \frac{\mu}{24\, r_m{}^2} \triangle y^2 \quad . \; . \; . \quad (39)$$

I ova formula daće se još jednostavnije predstaviti. U tu svrhu upotrebićemo hiperbolički cosinus. Naime:

$$\cos iy = 1 - \frac{1}{2}\,(i \cdot y)^2 + \frac{1}{24}\,(i\, y)^4$$

ili

$$\cos iy = 1 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{24} y^4$$

Razvojem gornje formule u logaritamski red dobićemo:

$$\log \cos iy = + \frac{\mu}{2} y^2 - \frac{\mu}{12} y^4 \ldots \quad (40)$$

Ispoređenjem jednačina (39), i (40) lako se možemo uveriti, da je:

$$\underline{\log \sigma_{1\cdot 2} = \log \cos iy_m + \frac{\mu}{24 r_m^2} \triangle y^2} \qquad \text{VIII.}$$

U svim gornjim izrazima y_m predstavlja srednju ordinatu t. j. $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, u formuli VIII. y_m je pretvoreno u kutnu meru $y_m = \frac{y_m}{r_m} \rho''$.

Za logaritme hiperboličkog cosinus-a dadu se lako sastaviti tablice pomoću komplemenata logaritma cosinus-a.

Imamo naime, da je:

$$\log \cos y = - \frac{\mu}{2} y^2 - \frac{\mu}{12} y^4 - \frac{\mu}{45} y^6 - \ldots$$

a i

$$\log \cos iy = + \frac{\mu}{2} y^2 - \frac{\mu}{12} y^4 + \frac{\mu}{45} y^6 - \ldots$$

jer je

$$\text{cpl} \log \cos y = + \frac{\mu}{2} y^1 + \frac{\mu}{12} y^2 + \frac{\mu}{45} y^6 + \ldots$$

biće

$$\log \text{cop}\; iy = \text{cpl} \log \cos y - \frac{\mu}{6} y^4 \ldots \quad (42)$$

Ako smo na ovaj način sastavili tablice, (koje uostalom vrede za čitavo područje projekcije), možemo redukciju stranica odrediti neposredno interpolacijom iz tablice, pri čemu smo predhodno y pretvorili u kutnu meru. Ovde treba napomenuti, da je kod Gauss-Krügerove projekcije srednji radij krivine promenljiva veličina, ovisna o geografskoj širini φ. Stoga će biti potrebno sastaviti i pomoćne tablice za vrednosti $\frac{\rho''}{r_m}$ za razne širine, resp. apscise x.

Sada možemo lako odrediti i lokalnu deformaciju dužina.

Prema ranije rečenom ono će biti razlika lokalnih redukcija strana, dakle:

$$\log \sigma''_{1\cdot2} - \log \sigma'_{1\cdot2} = \log \cos iy'' -$$

$$\log \cos iy' + \frac{\mu}{24\, r^2_m} \triangle y''^2 - \frac{\mu}{24\, r^2_m} \triangle y'^2 \quad . \; . \; . \quad (43)$$

Zadnji član $\frac{u}{24\, r^2_m} (\triangle y''^2 - \triangle y'^2)$ možemo pojednostaviti na sledeći način:

$$\triangle y''^2 - \triangle y'^2 = s^2 (\sin^2 t'' - \sin^2 t')$$
$$= s^2 (\sin t'' - \sin t') (\sin t'' + \sin t')$$

Razvojem diferencije i sume sinusa dobijamo:

$$\triangle y''^2 - \triangle y'^2 = 4\, s^2 \sin \frac{1}{2} (t'' + t') \cos \frac{1}{2} (t'' - t')$$

$$\cos \frac{1}{2} (t'' + t') \sin \frac{1}{2} (t'' - t') = s^2 \sin (t'' + t') \sin (t'' - t')$$

Kako je $t' = t'' + \varepsilon$ biće:

$$t'' + t' = 2\, t'' + \varepsilon$$
$$t'' - t' = - \varepsilon$$

i prema tome

$$(\triangle y''^2 - \triangle y'^2) = - s^2 \sin (2\, t'' + \varepsilon) \sin \varepsilon$$

ili

$$\frac{\mu}{24\, r^2_m} (\triangle y''^2 - \triangle y'^2) \doteq \frac{\mu}{24\, r^2_m} s^2 \sin (2\, t'' + \varepsilon) \sin \varepsilon \, . \; (45)$$

Uvrstimo li vrednost (45) u jednačinu (43) dobićemo ovakovu jednačinu za lokalnu redukciju stranica:

$$\log \sigma''_{1\cdot2} - \log \sigma'_{1\cdot2} = \log \cos iy_m'' -$$

$$- \log \cos iy'_m - \frac{\mu}{24\, r^2_m} s^2 \sin (2\, t'' + \varepsilon) \sin \varepsilon \quad . \; . \quad (46)$$

Sada će biti potrebno, da ispitamo uticaj zadnjeg člana u gornjoj formuli.

Uzećemo maksimalnu dužinu stranice smax = 100 km. Kut zaokreta ε za Jugoslaviju iznaša u svom najvećem iznosu nešto preko 2°. Dakle za gornje maksimalne vrednosti dobijamo, da je:

$$\left(\frac{\mu}{24\, r^2} s^2 \sin (2\, t''_{1\cdot2} + \varepsilon) \sin \varepsilon\right) \max = + 1.56 \text{ jed. 7 loga-}$$

ritamske decimale.

To znači, da uz linearnu tačnost računa od $\pm$ 0.01 m., možemo za sve stanice ispod 50 km upotrebiti ovakovu formulu za račun lokalne redukcije strana:

$$\underline{\log \sigma_{1\cdot2}'' - \log \sigma_{1\cdot2}' = \log \cos iy_m'' - \log \cos iy_m'} \, . \; \text{IX.}$$