Година 9. - Београд, Јули, Август и Септембар 1929. - Свеска 3.

ГЕОМЕТАРСКИ ГЛАСНИК

ОРГАН УДРУЖЕЊА ГЕОМЕТАРА КРАЉЕВИНЕ С.Х.С.

Косанчићев Венац 39. БЕОГРАД. Косанчићев Венац 39.

Пројекција новог катастарског премера у Краљевини С. Х. С.

— Наставак —

Инж. **Милан П. Дражић,** доцент Универзитета у Београду.

5. *Конвергенција меридијана.*

У једначини (18) претходног одељка, која гласи:

$$\operatorname{tang} \gamma = l \sin \phi + \frac{l^3}{3} \sin \phi \cdot \cos^2 \phi \,(1 + t^2 + 3\,\eta^2 + 2\eta^4) +$$

$$+ \frac{l^5}{15} \sin \phi \cdot \cos^4 \phi \,(2 + 4\,t^2 + 2\,t^4)$$

дали смо израз за tang γ; ако пак хоћемо директно да добијемо γ морамо развити у arc tang γ.

$$\gamma = \operatorname{tang} \gamma - \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \gamma + \frac{1}{5} \operatorname{tang}^5 \gamma + \ldots .$$

Овде треба заменити tang γ горе наведеном вредношћу занемарујући све чланове са l на шестом и вишим степенима:

$$\gamma = l \cdot \sin \phi + \frac{l^3}{3} \sin \phi \cdot \cos^2 \phi \,(1 + t^2 + 3\,\eta^2 + 2\,\eta^4) +$$

$$+ \frac{l^5}{15} \sin \phi \cdot \cos^4 \phi \,(2 + 4\,t^2 + 2\,t^4) -$$

$$- \frac{1}{3}\, l^3 \sin^3 \phi - \frac{1}{3}\, l^5 \sin^3 \phi \cdot \cos^2 \phi \,(1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4) +$$

$$+ \frac{1}{5}\, l^5 \sin^5 \phi$$

$$\gamma = l \sin \phi + \frac{1}{3}\, l^3 \sin \phi \cdot \cos^2 \phi \,(1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\,\eta^4 - t^2) +$$

$$\frac{l^5}{15} \sin \phi \cdot \cos^4 \phi \,(2 + 4\,t^2 + 2\,t^4 - 5t^2 - 5\,t^4 - 15\,t^2\,\eta^2 +$$

$$+ 10\,t^2\,\eta^4 + 3\,t^4)$$

кад се занемаре чланови са t^4, $t^2\,\eta^2$, $t^2\,\eta^4$ добијамо:

$$\gamma = l \sin\varphi \left\{ 1 + \frac{1}{3}\, l^2 \cos^2\varphi\,(1 + 3\eta^2) + \frac{l^4}{15} \cos^4\varphi(2 - t^2)\right\} \ldots (30)$$

На тај начин смо дошли до израза за непосредно добијање конвергенције меридијана.

У следећем показаћемо други начин развијања да се дође до једначине за конвергенцију меридијана, какву је Кригер дао у системи једначина, којој припадају једначине за x и y које смо раније извели.

Полази се од већ раније развијене једначине (18) на почетку овог одељка. l које се овде јавља изражено у угловној мери преобража се у његову функцију tang.

l развијено у ред arc. sin гласи:

$$l = \sin l + \frac{1}{6} \sin^3 l + \frac{3}{40} \sin^5 l + \ldots.$$

или

$$l = \sin l\,(1 + \frac{1}{6} \sin^2 l + \frac{3}{40} \sin^4 l + \ldots .)$$

Једначина се неће променити ако само десну страну помножимо са $\frac{\cos l}{\cos l}$, али имајући у виду да је $\frac{\sin l}{\cos l} = \operatorname{tang} l$ једначина изгледа:

$$l = \operatorname{tang} l \cdot \cos l\,(1 + \frac{1}{6} \sin^2 l + \frac{3}{40} \sin^4 l) \ldots\ldots. \quad (31)$$

Даље може се cos l развити у ред:

$$\cos l = 1 - \frac{l^2}{2} + \frac{l^4}{24} - \ldots.$$

и заменити у овој једначини l вредношћу добијеном развијањем у arc sin ред:

$$\cos l = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 l - \frac{1}{6} \sin^4 l - \ldots..$$

$$+ \frac{1}{24} \sin^4 l + \ldots.$$

$$\cos l = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 l - \frac{1}{8} \sin^4 l - \ldots.$$

Кад се cos l у једначини (31) замени овом вредношћу биће:

$$l = \operatorname{tang} l \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 l - \frac{1}{8}\sin^4 l\right)\left(1 + \frac{1}{6}\sin^2 l + \frac{3}{40}\sin^4 l\right)$$

$$l = \operatorname{tang} l \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 l - \frac{1}{8}\sin^4 l\right.$$

$$+ \frac{1}{6}\sin^2 l - \frac{1}{12}\sin^4 l + \ldots$$

$$+ \frac{3}{40}\sin^4 l + \ldots .$$

$$l = \operatorname{tang} l \left(1 - \frac{1}{3}\sin^2 l - \frac{2}{15}\sin^4 l - \ldots .\right)$$

Имајући у виду да је $1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$ можемо написати, не мењајући ништа вредност израза,

$$l = \operatorname{tang} l \left\{ 1 - \frac{1}{3}\sin^2 l\,(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - \right.$$

$$\left. \frac{2}{15}\sin^4 l\,(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 \right\}$$

даље, ако извучемо испред малих заграда $\cos^2 \varphi$ односно $\cos^4 \varphi$ и водећи рачуна да је $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tang} \varphi = t$ биће:

$$l = \operatorname{tang} l \left\{ 1 - \frac{1}{3}\sin^2 l \cos^2 \varphi\,(1 + t^2) - \frac{2}{15}\sin^4 l \cdot \cos^4 \varphi \right.$$

$$\left. (1 + 2\,t + t^4) \right\} \ldots . \qquad (32)$$

Једначину (18) можемо написати:

$$\operatorname{tang} \gamma = l \cdot \sin \varphi \left\{ 1 + \frac{1}{3}\, l^2 \cos^2 \varphi\,(1 + t^2 + 3\,\eta^2 + 2\,\eta^4) \right\}$$

Овде ћемо l пред заградом заменити вредношћу из једначине (32) а у загради l^2 замениђемо на следећи начин:

$$l = \operatorname{arc} \sin l = \sin l + \frac{1}{6}\sin^3 l + \frac{3}{40}\sin^5 l + \ldots .$$

$$l^2 = \sin^2 l + \frac{1}{3}\sin^4 l + \ldots .$$

У овој једначини, пошто смо задржали само прва два члана, помножићемо обе стране са $\cos^2 \varphi$:

$$l^2 \cos^2 \varphi = \sin^2 l \cdot \cos^2 \varphi + \frac{1}{3}\sin^4 l \cdot \cos^2 \varphi,$$

други члан помножићемо са $\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}$ а затим $\frac{1}{\cos^2\varphi}$ заменићемо са $\dfrac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi} = 1 + t^2$. где је $t = \operatorname{tang} \phi$, дакле:

$$l^2 \cos^2 \phi = \sin^2 l \cdot \cos^2 \phi + \frac{1}{3} \sin^4 l \cdot \cos^4 \phi \cdot \frac{1}{\cos^2 \phi}$$

$$= \sin^2 l \cos^2 \phi + \frac{1}{3} \sin^4 l \cos^4 \phi \, (1 + t^2) \, . \, . \, . \, . \, . \quad (33)$$

Сада ће једначина (18) гласити, пошто заменимо l^2 и $l^2 \cos^2\phi$ вредностима из (32) и (33), узимајући увек само прва два члана а остале занемарујући:

$$\operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} l \cdot \sin \phi \left\{ 1 - \frac{1}{3} \sin^2 l \cdot \cos^2 \phi \, (1 + t^2) + \ldots . \right\}$$

$$\left\{ 1 + \frac{1}{3} \sin^2 l \cos^2 \phi \, (1 + t^2 + 3 \eta^2 + 2 \eta^4) + \ldots \ldots \right\}$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} l \cdot \sin \phi \left\{ 1 - \frac{1}{3} \sin^2 l \cdot \cos^2 \phi \, (1 + t^2) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \sin^2 l \cdot \cos^2 \phi \, (1 + t^2 + 3 \eta^2 + 2 \eta^4) + \ldots . . \right.$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} l \cdot \sin \phi \left\{ 1 + \frac{1}{3} \sin^2 l \cos^2 \phi (3 \eta^2 + 2 \eta^4) + \ldots . \right\} \quad (34)$$

или

$$\log \operatorname{tang} \gamma = \log \operatorname{tang} l \cdot \sin \phi + \frac{\mu}{3} \sin^2 l \cos^2 \phi \, (3 + 2 \eta^2 \eta^2) \quad (35)$$

6. Коефицијенат деформације.

Приликом извођења Гаусових једначина ставили смо да је $f(q) = B$, другим речима да је однос $\dfrac{d S}{d s} = m$ на главном меридијану једнак 1 т. ј. да се главни меридијан пројектује тачно по дужини. У том случају деформације, које иначе расту све више идући од главног меридијана ка граници зоне, биће увек веће од јединице.

Сада ћемо ставити да је $f(q) = m_0 B$, што значи да ће апсцисе према одговарајућим деловима меридијанског лука бити у сталном односу m_0 а неће бити међусобно једнаки као раније.

Уводећи m_0 нећемо на извођење досада показаних једначина ни уколико утицати; промена се дешава само у размери пројекције која се у неколико мења а због чега, биће касније истакнуто. Међутим због те промене у размери морамо крајње резултате, из једначина (17) и (18), које смо извели са f (q) = B редуцирати са m_0 т. ј.

$$\overline{x} = m_0 x \qquad \overline{y} = m_0 y$$

Дакле, тачка у равни имаће сада координате $\overline{x}$, $\overline{y}$.

Претпоставимо да кроз неку тачку P на сфероиду (види сл. 7. и 8. стр. 104), која у равни има координате $\overline{y} = m_o y$ и $\overline{x} = m_o x$, пролази нека бесконачно мала дуж dS (елеменат геодеске линије). Њена пројекција у равни биће онда m_o ds а коефицијенат деформације по дефиницији (види једначину (5) стр. 105)

$$m = \frac{m_o\, d\, s}{dS}$$

или

$$m^2 = \frac{m_o^2\, ds^2}{d S^2} = \frac{m_o^2\ (dx^2 + dy^2)}{(M \cdot d\phi)^2 + (N \cdot \cos\phi\ dl)^2}$$

Ово можемо написати:

$$\frac{m^{\ 2}}{m^{o\ 2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right] dy^2}{dl^2\ N^2 \cdot \cos^2\phi \left[1 + \left(\frac{M\ d\phi}{N \cdot \cos\phi \cdot dl}\right)\right]} =$$

$$\frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{N \cdot \cos^2\phi \left[+ \left(\frac{M\ d\phi}{N \cos\phi\ dl}\right)^2\right]} \cdot \frac{d\ y^2}{dl^{\ 2}} \ldots. \tag{36}$$

У овој једначини треба одредити вредности за изразе

$$\frac{dx}{dy} \text{ и } \frac{M\ d\phi}{N \cdot \cos\phi \cdot dl}$$

Из сл. 7 и 8 на стр. 104 види се да је:

$$\frac{cp^1}{cp} = \frac{dy}{dx} = \tan g\ \nu \text{ или } \frac{dx}{dy} = \cot g\ \nu$$

исто тако је:

$$\frac{P\ \ A}{P'\ A} = \frac{M\ d\phi}{N \cdot \cos\phi\, dl} = \cot g\ \alpha$$

Кад се ове вредности унесу у једначину (36) биће:

$$\left(\frac{m}{m^\circ}\right)^2 = \frac{1 + \cotg^2 \nu}{N \cdot \cos^2 \phi \, (1 + \cotg^2 \alpha)} \cdot \frac{dy^2}{dl^2} = \frac{\sec^2 \nu}{N^2 \cos^2 \phi \cdot \sec^2 \alpha} \cdot \frac{dy^2}{dl}$$

дакле

$$\frac{m}{m_o} = \frac{\sec \nu}{N \cdot \cos \phi \cdot \sec \alpha} \cdot \frac{dy}{dl} = \frac{dy}{dl} \cdot \frac{1}{\cos \phi} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \nu} \quad \ldots . \qquad (37)$$

Елеменат геодеске линије dS може имати произвољан правац и ми ћемо посматрати баш онај случај, када правац елемента пада у правац упоредника на коме лежи тачка P, другим речима кад је азимут $\alpha = 90°$. Нагиб ν у равни разликује се од азимута за конвергенцију меридијана γ. Докле, са

$$\alpha = 90°, \ \sin \alpha = 1 \text{ и } \nu = 90° - \gamma$$

прелази једначина (37) у овај облик:

$$\frac{m.}{m_o} = \frac{dy}{dl} \cdot \frac{1 \cdot}{N. \cos \phi} \cdot \frac{1}{\cos \gamma}$$

Још нам остаје да заменимо $\frac{dy}{dl}$ вредношћу са стр. 81, која гласи:

$$\frac{dy}{dl} = N \cdot \cos \phi \left\{ 1 + \frac{l^2}{2} \cos^2 \phi \, (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l^4}{24} \cos^4 \phi \, (5 - 18 t^2 + t^4) \right\}$$

и најзад

$$\frac{m}{m_o} = \frac{1}{\cos \gamma} \left\{ 1 + \frac{l^2}{2} \cos^2 \phi \, (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l^4}{24} \cos^4 \phi \, (5 - 18 t^2 + t^4) \right\} \ldots . . \qquad (38)$$

Ова се једначина може сад даље да трансформује тако, да се избаци конвергенција меридијана па да се рачуна само из количина ϕ и l, из којих се рачунају x и y. То ћемо постићи на следећи начин:

$$\frac{1}{\cos \gamma} = \sec \gamma \text{ развићемо у ред}$$

$$\sec \gamma = 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{5 \, \gamma^4}{24} + \ldots \ldots ,$$

из једначине (30) у првом приближењу је:

$$\gamma. = l \sin \phi$$

па према томе биће

$$\sec \gamma = 1 + \frac{l^2 \sin^2 \varphi}{2} + \frac{5}{24} l^4 \sin^4 \varphi + \ldots\ldots$$

Ово треба сад унети у једначину (38) и занемарити све чланове са l на четвртом и вишим степенима.

$$\frac{m}{m_o} = \left(1 + \frac{l^2 \sin^2 \varphi}{2} + \frac{5}{24} l^4 \sin^4 \varphi + \ldots\ldots\right)\Big\{1 + \frac{l^2}{2} \cos^2 \varphi \,(1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l^4}{24} \cos^4 \varphi \,(5 - 18\, t^2 + t^4)\Big\}$$

$$= 1 + \frac{l^2}{2} \sin^2 \varphi + \frac{l^2}{2} \cos^2 \varphi \,(1 - t^2 + \eta^2) + \ldots$$

$$\frac{m}{m_o} = 1 + \frac{l^2}{2} \cos^2 \varphi \,(t^2 + 1 - t^2 + \eta^2) = 1 + \frac{l^2}{2} \cos^2 \varphi \,(1 + \eta^2),$$

кад се логаритмује

$$\log \frac{m.}{m_o} = \mu \cdot \frac{l^2}{2} \cos^2 \varphi \,(1 + \eta^2) \ldots . \qquad (39)$$

— НАСТАВИЋЕ СЕ —

На који се начин вршио своједобно катастарски премјер у Босни и Херцеговини и како се сада врши тај премјер у Србији и Црној Гори.

Графичка и нумеричка метода.

Од оснивања Техничке Средње Школе у Сарајеву, дакле почев од 1889. године, тај је завод одгајао техничаре, који су се по довршењу школе посвећивали и геометарској струци. Из те школе, током 4 деценија, регрутовао се и лијеп број врсних стручњака геометара, од којих неки и данас у Босни и Херцеговини заузимају у геометарском звању видне положаје.

На тој школи предавали су неко вријеме геодезију одлични и познати стручњаци. Тако је ту од 1889. до 1895. г. дјеловао *Проф.* Д-р. Инг. *Едуард Долежал*, који је одатле отишао на високу рударску школу у Леобен, а доцније за