Пројекција новог Катастарског премера у Краљевини С. Х. С.

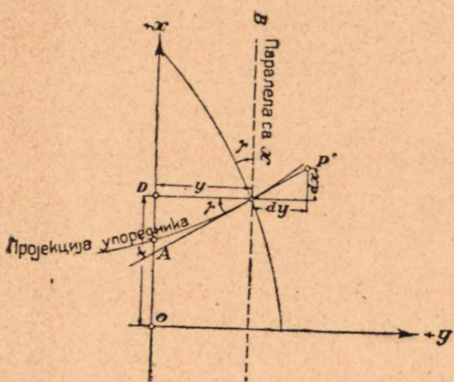
— Наставак. —

Инж. **Милан П. Дражић,** доцент Универзитета у Београду.

4. *Извођење једначине за х.*

Једначина за х изводи се уз припомоћ једначине за конвергенцију меридијана те ћемо предходно објаснити појам конвергенције меридијана и извести њену једначину.

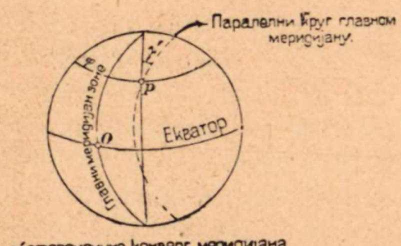
Гаус зове „конвергенцијом меридијина“ оштри угао између пројекције меридијана (односно његове тангенте у тачки р) у равни и праве // са позитивним правцем апсцисне осовине, дакле ∢ γ види сл. 10. и 12. Исте величине је и угао ApD=γ, зато што је пројекција меридијана, због конформности, ⊥ на пројекцију упоредника. Данас се то зове „равна конвергенција меридијана“.



Сл. 10.

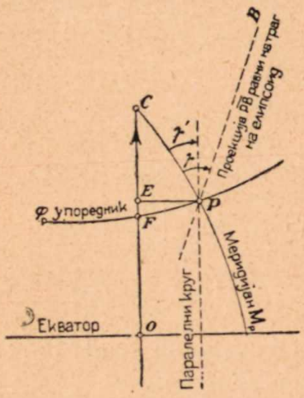
Под „сфероидичком конвергенцијом меридијана“ разуме се данас онај оштри угао кога на *сфероиду* образују правац меридијана (односно његова тангента у тачки Р) и круг конгруентан са главним меридијаном (односно његова тангента у тачки Р) дакле ∢ γ'.

Равна конвергенција меридијана већа је од сфероидичке дакле $\gamma > \gamma'$.



Сл. 11.

Ако у једначинама (17) и (18) на ст. 108. Гласника мењамо вредности само за l а φ остаје сталне величине онда ћемо добити низ парова вредности за координате тачака Pi, које се све налазе на упореднику φ. Другим речима једначина упоредника мора бити функција од x и y. Ако посматрамо тачку p′ бесконачно блиску тачки p јасно је да је



Сл. 12.

диференцијални количник $\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \gamma$.

Према томе треба једначине за x и y диференцирати по l сматрајући при томе ф као константу, затим образовати диференцнјални количник из тако добијених делимичних диференцијала.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dl}}{\frac{dy}{dl}} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dl} \cdot \frac{dl}{dy} = \frac{dx}{dy}$$

Предходно ћемо избацити из једначине ρ имајући даље у виду да је l изражено угловном мером.

Кад се једначина (17) на ст. 108 диференцира по l биће:

$$\frac{dx}{dl} = l.N.\sin\phi.\cos\phi. + \frac{l^3}{6} N.\sin\phi.\cos^3\phi\,(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) +$$
$$\frac{l^5}{120} N.\sin\phi.\cos^5\phi\,(61 - 58\,t^2 + t^4) \cdots \qquad (16)$$

Једначина (18) на стр. 108 диференцирана по l даје:

$$\frac{dy}{dl} = N.\cos\phi + \frac{l^2}{2} N.\cos^3\phi\,(1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l^4}{24} N.\cos^5\phi(5 - 18t^2 + t^4) + \cdots$$

$$\frac{dy}{dl} = N.\cos\phi \left\{1 + \frac{l^2}{2}\cos^2\phi(1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l^4}{24}\cos^4\phi\,(5 - 18\,t^2 + t^4)\right\}$$

или реципрочна вредност овог израза, што нам је погодније за даље рачунање:

$$\frac{dl}{dy} = \frac{1}{N.\cos\phi}\left\{1 - \frac{l^2}{2}\cos^2\phi\,(1 - t^2 + \eta^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{l^4}{24}\cos^4\,(1 + 6\,t^2 + 12\,\eta^2 + 5\,t^4)\right\} \cdots \qquad (17)$$

Израз у великој загради добија се делећи 1 изразом у претходној великој загради.

Множењем ових једначина (16) и (17), пошто се скрати N. cos ф које се јавља у бројитељу и именитељу и кад се занемаре чланови са l на шестом и већим степенима добија се:

$$\operatorname{tg}\gamma = l\sin\varphi + \frac{l^3}{6}\sin\varphi\cos^2\varphi(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) +$$

$$+ \frac{l^5}{120}\sin\varphi\cos^4\varphi(61 - 58\,t^2 + t^4) - \frac{l^3}{2}\sin\varphi\cos^2\varphi(1 - t^2 + \eta^2)$$

$$- \frac{l^5}{12}\sin\varphi\cos^4\varphi(5 - 6\,t^2 + t^4 + \cdots)$$

$$+ \frac{l^5}{24}\sin\varphi\cos^4\varphi(1 + 6\,t^2 + 5\,t^4 + \cdots)$$

$$\operatorname{tg}\gamma = l\sin\varphi + \frac{l^3}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi(1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4) +$$

$$+ \frac{l^5}{15}\sin\varphi\cos^4\varphi(2 + 4t^2 + 2t^4)\cdots \quad (18)$$

Ова се једначина добија пошто се изврше потребне скраћења, сабирања и у трећем члану занемаре количине са η^2, η^4, $\eta^2\,t^2$ као количине нижег реда. Ову ћемо једначину за сада оставити овакву каква је, јер нам је овакав израз довољан да изведемо једначину за x. Касније извешћемо дефинитивну једначину за конвергенцију меридијана.

До једначине за x долази се следећим путем:

Развије се tg $\frac{\gamma}{2}$ у ред:

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^3}{24}\ \frac{2\gamma^5}{480} + \cdots\cdots \quad (19)$$

На десној страни јавља се γ док ми имамо изведену вредност за tang γ. Због тога морамо прво γ изразити са tang γ а после у том изразу tang γ заменити нађеном вредношћу.

Кад γ развијемо у ред arctang γ биће:

$$\gamma = \operatorname{tang}\gamma - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\gamma + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5\gamma + \cdots\cdots$$

Ако ово заменимо у једначини (19) добићемо, задржавајући опет само чланове до tang $^5\gamma$:

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma - \frac{1}{6}\operatorname{tang}^3\gamma + \frac{1}{10}\operatorname{tang}^5\gamma + \frac{1}{24}\operatorname{tang}^3\gamma -$$

$$\frac{1}{24}\cdot\frac{3}{3}\cdot\operatorname{tang}^5\gamma + \frac{2}{480}\operatorname{tang}^5\gamma +$$

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma - \frac{1}{8}\operatorname{tang}^3\gamma + \frac{1}{16}\operatorname{tang}^5\gamma\ldots \quad (20)$$

У овој једначини треба заменити tang γ вредношћу из (18) задржавајући само чланове са l до петог степена:

$$\operatorname{tang} \frac{\Upsilon}{2} = \frac{1}{2} l \sin \phi + \frac{1}{6} l^3 \sin \phi \cos^2 \phi \,(1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4)$$

$$+ \frac{1}{15} l^5 \sin \phi \cos^4 \phi \,(1 + 2t^2 + t^4) \quad - \frac{1}{8} l^3 \sin^3 \phi$$

$$- \frac{1}{8} l^5 \sin^3 \phi \cos^2 \phi \,(1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{1}{16} l^5 \sin^5 \phi$$

$$\operatorname{tang} \frac{\Upsilon}{2} = \frac{1}{2} l \sin \phi + \frac{1}{24} l^3 \sin \phi \cos^2 \phi (4 + 4t^2 + 12\eta^2 + 8\eta^4 - 3\frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi}) +$$

$$+ \frac{1}{240} l^5 \sin \phi \cos^4 \phi \,(16 + 32t^2 + 16t^4 - 30t^2 - 30t^4 - 90t^2\eta^2 - 60\, t^2\eta^4$$

$$+ 15 \frac{\sin^4 \phi}{\cos^4 \phi})$$

како je $\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = t$ и $t^2\eta^2$, $t^2\eta^4$ количине нижег реда да може занемарити то je:

$$\operatorname{tang} \frac{\Upsilon}{2} = \frac{1}{2} l \sin \phi + \frac{1}{24} l^3 \sin \phi \cos^2 \phi (4 + t^2 + 12\eta^2 + 8\eta^4)$$

$$+ \frac{1}{240} l^5 \sin \phi \cos^4 \phi \,(16 + 2t^2 + t^4)$$

или

$$\operatorname{tang} \frac{\Upsilon}{2} = \frac{1}{2} l \sin \phi \left\{ 1 + \frac{1}{12} l^2 \cos^2 \phi \,(4 + t^2 + 12\eta^2 + 8\eta^4) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{120} l^4 \cos^4 \phi \,(16 + 2t^2 + t^4) \right\} \cdots \qquad (21)$$

Раније изведену Гаусову једначину (18) преуредићемо слично једначини (1) на ст. 108 Гласника, одељак 8. с тим да још и обе стране помножимо са $\frac{i}{2N}$, тада она гласи:

$$\frac{iy}{2N} = \frac{i}{2} l \cos \phi \left\{ 1 + \frac{1}{6} l^2 \cos^2 \phi \,(1 - t^2 + \eta^2) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{120} l^4 \cos^4 \phi \,(5 - 18t^2 - t^4) \right\} \cdots \qquad (22)$$

Када $\operatorname{tang} \frac{iy}{2N}$ развијемо у ред добићемо:

$$\operatorname{tang} \frac{iy}{2N} = \frac{iy}{2N} + \frac{1}{3} \left(\frac{iy}{2N}\right)^3 + \frac{1}{15} \left(\frac{iy}{2N}\right)^5 + \cdots$$

Ако овде заменимо $\frac{iy}{2N}$ његовом вредношћу из (22), занемарујући чланове у којима се l јавља на шестом и вишим степенима биће:

$$\operatorname{tang}\frac{iy}{2N}=\frac{i}{2}l\cos\varphi\left\{1+\frac{1}{6}l^2\cos^2\varphi\,(1-t^2+\eta^2)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{120}l^4\cos^4\varphi\,(5-18\,t^2+t^4)\right\}-i\,\frac{1}{24}l^3\cos^8\varphi$$

$$-\frac{i}{48}l^5\cos^5\varphi\,(1-t^2+\eta^2)+\cdots+\frac{i}{240}l^5\cos^5\varphi+\cdots$$

$$\operatorname{tang}\frac{iy}{2N}=\frac{i}{2}\,l\cos\varphi\left\{1+\frac{1}{24}l^2\cos^2\varphi\,(4-4\,t^2+4\,\eta^2-2)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{240}l^4\cos^4\varphi\,(10-36\,t^2-2\,t^4-10+10\,t^2-10\,\eta^2+2)\right\}$$

или

$$\frac{1}{i}\operatorname{tang}\frac{iy}{2N}=\frac{1}{2}\,l\cos\varphi\left\{1+\frac{1}{12}l^2\cos^2\varphi(1-2\,t^2+2\eta^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{120}l^4\cos^4\varphi\,(1-13t^2+t^4)\cdots\right\}\qquad(23)$$

Када измножимо једначину (21) са једначином (23) излази да је:

$$\frac{1}{i}\operatorname{tang}\frac{iy}{2N}\cdot\operatorname{tang}\frac{\Upsilon}{2}=\frac{1}{2}\,l\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}\,l\cos\varphi\cdot\operatorname{tang}\varphi\,\cdot$$

$$\cdot\left\{1+\frac{1}{12}l^2\cos^2\varphi\,(1-2t^2+2\eta^2)+\frac{1}{120}l^4\cos^4\varphi\,(1-13\,t^2+t^4)\right\}\cdot$$

$$\left\{1+\frac{1}{12}l^2\cos^2\varphi(4+t^2+12\,\eta^2+8\,\eta_4)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{120}l^4\cos^4\varphi\,(16+2\,t^2+t^4)\right\}$$

$$\frac{1}{i}\operatorname{tang}\frac{iy}{2N}\cdot\operatorname{tang}\frac{\Upsilon}{2}=\frac{1}{4}l^2\cos^2\varphi\cdot\operatorname{tang}\varphi\;\cdot$$

$$\cdot\left\{1+\frac{1}{12}l^2\cos^2\varphi\,(1-2\,t^2+2\,\eta^2)+\frac{1}{120}l^4\cos^4\varphi\,(1-13\,t^2+t^4)\right.$$

$$+\frac{1}{12}l^2\cos^2\varphi\,(4+t^2+12\eta^2+8\,\eta^4)+\frac{1}{144}l^4\cos^4\varphi(4-8t^2+t^2+2t^4)+$$

$$\left.+\frac{1}{120}l^4\cos^4\varphi\,(16-2\,t^2+t^4)\right\}$$

$$\frac{1}{i}\operatorname{tang}\frac{iy}{2N}\cdot\operatorname{tang}\frac{\Upsilon}{2}=\frac{1}{4}l^2\cos^2\varphi\cdot\operatorname{tang}\varphi\left\{1+\frac{1}{12}l^2\cos^2\varphi(5-t^2\right.$$

$$\left.+14\,\eta^2+8\,\eta^4)+\frac{1}{720}l^4\cos^4\varphi(122-101\,t^2+2\,t^4)\right\}\cdots\qquad(24)$$

Г-ђица НАДЕЖДА ЧАБАКОВА,
прва дама у Краљевини С. Х. С.,
која је положила државни
испит за геометра.

У овој једначини занемарени су у великој загради чланови са l на петом и вишим степенима а код члана са l^4 они чланови у којима се јавља као чинитељ η^2 и η^4.

Раније нађену Гаусову једначину (17) ст. 108 можемо написати:

$$x - B = \frac{1}{2} N . l^2 \cos^2\phi \operatorname{tang} \phi \left\{ 1 + \frac{1}{12} l^2 \cos^2\phi \, (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \frac{1}{360} l^4 \cos^4\phi \, (61 - 58t^2 + t^4) \right\}$$

или још и овако:

$$\frac{x - B}{2N} = \frac{1}{4} l^2 \cos^2\phi \cdot \operatorname{tang}\phi \left\{ 1 + \frac{1}{12} l^2 \cos^2\phi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \frac{1}{360} l^4 \cos^4\phi (61 - 58\,t^2 + t^4) \right\}$$

Ако и код све једначине применимо tang-ред онда је:

$$\operatorname{tang} \frac{x - B}{2N} = \frac{x - B}{2N} + \frac{1}{3}\left(\frac{x - B}{2N}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{x - B}{2N}\right)^5 + \ldots$$

и задржавајући само први члан добијамо:

$$\operatorname{tang} \frac{x - B}{2N} = \frac{1}{4} l^2 \cos^2\phi \cdot \operatorname{tang}\phi \left\{ 1 + \frac{1}{12} l^2 \cos^2\phi \, (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \frac{1}{360} l^4 \cos^4\phi \, (61 - 58\,t^2 + t^4) \right\} \ldots \quad (25)$$

Сад треба поделити једначину (25) са једначином (24).

$$\left[\operatorname{tang} \frac{x - B}{2N}\right] : \left[\frac{1}{i} \operatorname{tang} \frac{i\,y}{2N} \cdot \operatorname{tang} \frac{\Upsilon}{2}\right] = \left[\frac{1}{4} l^2 \cos^2\phi \cdot \operatorname{tang}\phi \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{12} l^2 \cos^2\phi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta_4) + \frac{1}{360} l^4 \cos\phi^4 \, (61 - 58t^2 + t^4) \right\}\right] :$$

$$\left[\frac{1}{4} l^2 \cos^2\phi \operatorname{tang}\phi \left\{ 1 + \frac{1}{12} l^2 \cos^2\phi (5 - t^2 + 14\,\eta^2 + 8\,\eta^4) + \frac{1}{720} l^4 \cos^4\phi \, (122 - 101\,t^2 + 2\,t^4) \right\}\right]$$

Кад се изврши скраћивање, дељење на десној страни пошто се занемаре чланови са l на 4-том и вишим степенима а на левој страни ослободи именитеља добија се:

$$\operatorname{tang} \frac{x - B}{2N} = \frac{1}{i} \operatorname{tang} \frac{i\,y}{2N} \cdot \operatorname{tang} \frac{\Upsilon}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{12} l^2 \cos^2\phi (5 + 4\eta^2)\eta^2 \right\} \ldots \quad (26)$$

У овој једначини можемо у загради l да развијемо у ред: $l = \sin l + \frac{1}{6} \sin^3 l + \ldots$ и да задржимо само први члан;

сем тога како је $\frac{1}{i} \operatorname{tang} \frac{i\,y}{2N} = \operatorname{tang} \frac{u}{2}$ (в. стр. 165) то једначина (26) прелази у следећи облик:

$$\operatorname{tang} \frac{x - B}{2N} = \operatorname{tang} \frac{\Upsilon}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{u}{2} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{12} \eta^2 \sin^2 l \cdot \cos^2 \phi \cdot (5 + 4\,\eta^2) \right\} \ldots \quad (27)$$

Најзад нам сад ваља развити ово у arc. tang-ред да би смо дошли до израза за (x—B) место tang (x—B).

Дакле

$$\frac{x - B}{2N} = \operatorname{tang} \frac{x - B}{2N} - \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{x - B}{2N} + \ldots$$

Задржаћемо само први члан и заменити га вредношћу из (27).

$$\frac{x - B}{2N} = \operatorname{tg} \frac{\Upsilon}{2} \operatorname{tang} \frac{u}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{12} \eta^2 \sin l \cdot \cos^2 \phi \, (5 + 4\,\eta^2) \right\} - \ldots$$

и напослетку:

$$x - B = 2\,N \cdot \operatorname{tang} \frac{\Upsilon}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{u}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{12} \eta^2 \sin^2 l \cdot \cos^2 \phi \, (5 + 4\,\eta^2) \right\} \ldots \quad (28)$$

Једначина (28) дакле не даје нам директно x већ разлику између x и лука B, који одговара географској ширини φ дотичне тачке P. Како је B дакле познато јер је познато φ лако је наћи x по једначини:

$$(x - B) + B = x$$

Једначину (28) можемо написати и у логаритамском облику

$$\log (x - B) = \log 2N \cdot \operatorname{tang} \frac{\Upsilon}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{u}{2} - \frac{u}{12} \cdot \eta^2 \cdot (5 + 4\,\eta^2) \sin^2 l \cos^2 \phi \ldots \quad (29)$$

— Наставиће се —