Година 8. Београд, Јули, Август и Септембар 1928. Св. 4.

ГЕОМЕТАРСКИ ГЛАСНИК

ОРГАН УДРУЖЕЊА ГЕОМЕТАРА КРАЉЕВИНЕ С.Х.С.

Косанчићев Венац 39. БЕОГРАД. Косанчићев Венац 39.

СТРУЧНИ ДЕО

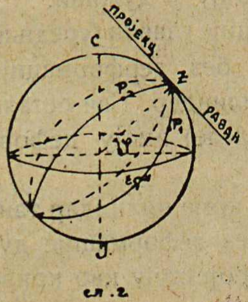
Пројекција новог катастарског премера у Краљевини СХС.

— Наставак —

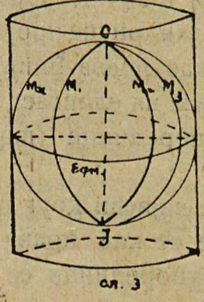
II. Основне једначине у Гаус-Кригер-овој пројекцији.

Конформних пројекција има у главном три врсте: стереографска, цилиндрична и конусна.

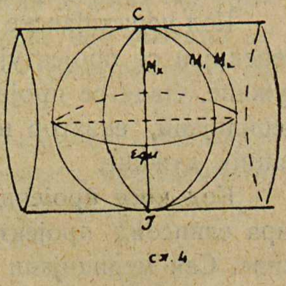
Код стереографске пројекције пројектовање се врши на раван, а раван пројектовања тангира сфероид у тачки Z (сл. 2). Кругови било око тачке Z или ма какви други имају за пројекцију кругове, а највећи кругови кроз тачку Z имају за пројекцију праву линију кроз Z.



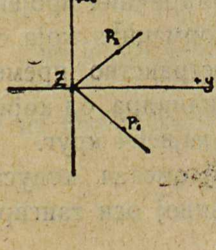
сл. 2

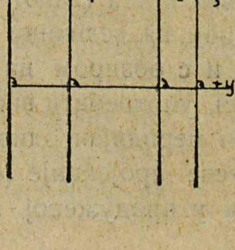


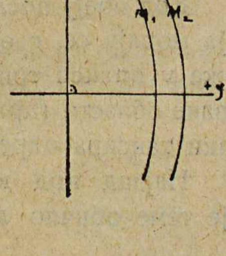
сл. 3

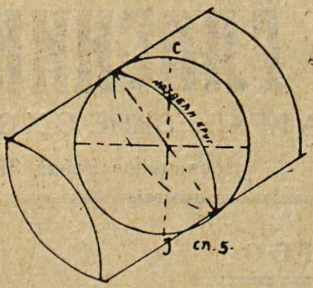


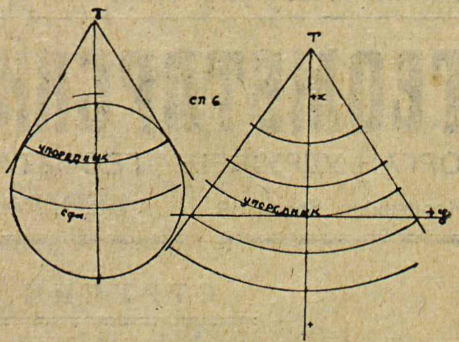
сл. 4











Код цилиндричне пројекције врши се пројектовање са елипсоида на цилиндар, који може елипсоид на три начина да тангира па се тај цилиндар развије у раван. Цилиндар може да тангира елипсоид:

1.) по екватору (полутару) [Меркаторова пројекција] сл. 3.

2.) по меридијану (Гаус-Шрајберова, Гаус-Кригерова пројекција) сл. 4.

3.) по највећем кругу, који није меридијан-коса пројекција (употребљена у Холандији, Швајцарској, Угарској) сл. 5.

Код екваторијалне цилиндричне пројекције екватор се пројектује без линеарне деформације као права линија. Овде се пројектује на прави цилиндар. Пројекције меридијана су праве линије паралелне са x — осом. Упоредници — паралеле и меридијани у пројекцији имају деформацију у дужини.

Код меридијанске цилиндричне пројекције главни (средњи) мередијан се пројектује као права линија без дерформације дужине. Овде се пројектује на елипсаст цилиндер. Сви остали меридијани, екватор и упоредници (паралеле) имају деформацију дужине.

Код косе пројекције највећи круг по коме цилиндар тангира елипсоид пројектује се као права без деформације дужине. Сви меридијани и упоредници се пројектују као криве линије са деформацијом дужине.

Код обеју последњих врста (2 и 3) цициндричних пројекција морају се, с обзиром на величину деформације која се може у пракси трпети и с обзиром на пространство премераване области (државе), употребити више цилиндра, од којих сваки тангира одређени меридијан односно највећи круг.

Најзад код конусне пројекције (сл. 6) омотач конуса, чије теме обично лежи у продуженој земљиној оси тангира елипсоид по неком одређеном упореднику. Упоредници се пројектују као лукови кругова, а меридијани — као праве линије које се стичу у теме конуса. Међутим може конус и на други начин да тангира елипсоид, а не по упореднику.

Пројекција, о којој ми говоримо, је цилиндрична меридијанска пројекција Гаус-Кригерова, код које је главни (средњи) меридијан X – оса, а екватор У – оса. Код ове пројекције, која је усвојена за нашу државу цилиндер не тангира већ сече елипсоид тако да један део елипсоида је изнад омотача, а други највећи у омотачу. То упуштање цилиндровог омотача у елипсоид је врло мало и врши се стога, што се тиме постиже да се апсолутна деформација смањи односно да се зона, према дозвољеној деформацији, може да прошири.

Пошто се у триангулацији 1 реда опажају сви потребни углови и измере потребне основице изравнају се ови подаци делимично у етапама или сви одједном (као што је случај са триангулацијом В. Геогр. Института у границама Србије и Црне Горе) тако да се добију дефинитивне вредности за углове и тригонометријске стране. Преко неког одређеног азимута (добијеног астрономским опажањем или одређеним у некој већ раније изравнатој триангулацији) срачунају се сукцесивно азимути свих тригонометријских страна. Некој тригонометриској тачки одреди се географски положај на сфероиду географска ширина φ и географска дужина l (астрономски, телеграфски) и та тачка служи даље као почетна за рачунање осталих. Преко азимута и триг. страна рачунају се географске координате за све тачке.

Такву једну тачку, чије је место на земљином елипсоиду утврђено географским координатама φ и l треба пројектовати на раван т.ј. наћи тачкине равне правоугле конформне координате у и х.

Дакле су:

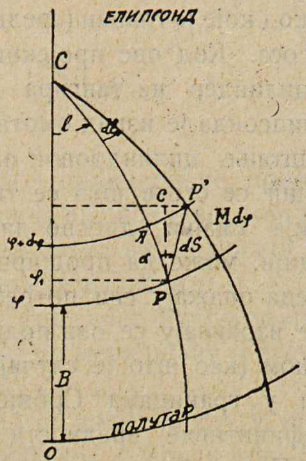
$$y = f_1\ (\varphi, l)$$
$$x = f_2\ (\varphi, l)$$

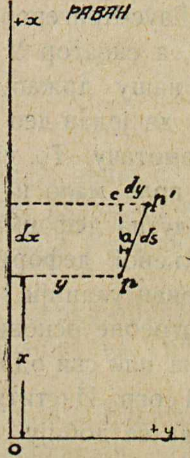
Ове једначине показују прелаз са елипсоида на раван Али исто тако се у пракси јавља случај да се из равни прелази на елипсоид. У том случају је:

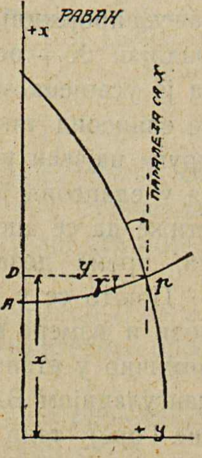
$$\varphi = \phi_1\ (y, x)$$
$$l = \phi_2\ (y, x)$$

Какве су то функције показали су Гаус и Кригер и у овом одељку биће оне развијене.

а.) Рачунање равних правоуглих конформних координата у, х из географских φ и l по Гаусу.







сл. 7 сл. 8 сл. 9

Уочимо на елипсоиду две безконачно блиске тачке P са геогр. ширином φ и дужином l и P^1 са геогр. ширином $\varphi+d\varphi$ и геогр. дужином $l+dl$ (сл. 7).

Пројектоване на раван те две тачке имају пројекције p и p′ са координатама у, х односно $y+dy$, $x+dx$ (сл. 8).

Пројектовање мора бити конформно, т.ј. такво, да углови остану исте величине. Према томе ∞ мали троугао $CPP' \sim cpp'$.

Из слике 7. види се да је:

(1) $PA = Md\varphi$ као лук меридијана са полупречником кривине M у тачки P.

(2) $AP' = N.\cos\varphi dl$ као лук паралеле. Овде је N полупречник кривине елипсоида у равни управној на меридијан у тачки P*.

Елеменат дужине на елипсоиду $PP' = dS = \sqrt{(Md\varphi)^2 + (N\cos\varphi dl)^2}$ можемо написати овако:

$$d\,s = N.\cos\varphi.\sqrt{\left(\frac{M.d\varphi}{N\cos\varphi}\right)^2 + dl^2}$$

* Ова раван зове се: у руском „пресек по првом вертикалу“.

и ако ставимо да је: $\frac{M}{N}\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=dq$ добићемо најзад

$$dS=N.\cos\varphi\sqrt{dq^2+dl^2} \tag{3}$$

Посматрајући пројекцију елемента дужине у равни (сл. 8.) видимо да је

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2} \tag{4}$$

Однос елемента дужине на равни ds према елементу дужине на елипсоиду ds зове се коефицијенат деформације и бележи се са m.

$$m=\frac{ds}{dS}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{dq^2+dl^2}.\ N\cos\varphi} \tag{5}$$

Као што је већ речено у прошлој свесци Гласника (св. 3) конформна пројекција има ту особину да је коефицијенат деформације у свима правцима око неке тачке P исте величине.

Из тога следује да вредност његова не сме зависити ни од $d\varphi$ ни од dl односно ни од dx ни од dy.

Да би се ове количине елиминирале треба дићи на квадрат једначину (5).

$$m^2=\frac{dx^2+dy^2}{(dq^2+dl^2)\ N^2\cos^2\varphi} \tag{6}$$

У овом изразу можемо збир квадрата (аналого као и разлику квадрата) преставити као производ збира и разлике имагинарних бинома — комплексних бројева:

$$m^2=\frac{(dx+idy)\,(dx-idy)}{(dq+idl)\,(dq.-idl)\ N^2\cos^2\varphi} \tag{7}$$

сем тога можемо разлику и збир диференцијала да напишемо као диференцијал разлике и збира

$$m^2=\frac{d\,(x+iy)\,d\,(x-iy)}{d\,(q+il)\,d\,(q-il)\ N^2\cos^2\varphi}$$

Да овај израз не зависи од елемената $d\varphi$, dl, dx и dy мора бити $(x+iy)$ каква било функција од $(q+il)$, а $(x-iy)$ каква било функција од $(q-il)$ јер у том случају диференцијални количници

$$\frac{d\,(x+iy)}{d\,(q+il)} \text{ и } \frac{d\,(x-iy)}{d\,(q-il)} \text{ не зависе од}$$

правца елемента dS већ само од положаја тачке $(q+il)$, $(q-il)$.

Горњи услов математски изражен гласи

$$(x + iy) = f(q + il) \qquad (8)$$

Код ове пројекције главни (средњи) меридијан представља x — осу координатног система и пројектује се као права линија без икакве деформације у дужини т.ј. за $l = o$ и $y = o$ мора бити $x = B$ где је B дужина лука меридијана за дотичну географску ширину φ. Дакле

$$f(q) = B$$

Израз $f(q + il)$ развићемо по Тејлоровом реду*

$$f(q+il) = f(q) + (il) \cdot \frac{df(q)}{dq} + \frac{(il)^2}{2} \frac{d^2 f(q)}{dq^2} + \frac{(il)^3}{6} \cdot \frac{d^3 f(q)}{dq^3} + \ldots\ldots$$

Пошто је $f(q) = B$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = +1$ и т. д. то ће једначина (8) изгледати сад овако:

$$X + iy = f(q + il) = B + il \cdot \frac{dB}{dq} - \frac{l^2}{2} \cdot \frac{d^2B}{dq^2} - \frac{il^3}{6} \cdot \frac{d^3B}{dq^3} + \frac{l^4}{24}\, \frac{d^4B}{dq^4} + \frac{il^5}{120} \cdot \frac{d^5B}{dq^5} - \frac{l^6}{720} \cdot \frac{d^6B}{dq^6} + \ldots\ldots$$

Два комплексна броја биће једнаки ако су им реални делови односно имагинарни делови једнаки. Упоређујући реалне и имагинарне делове код горње једначине јасно је:

$$X = B - \frac{l^2}{2}\, \frac{d^2B}{dq^2} + \frac{l^4}{24} \cdot \frac{d^4B}{dq^4} - \frac{l^6}{720} \cdot \frac{d^6B}{dq^6} + \ldots\ldots \qquad (9)$$

$$iy = il \cdot \frac{dB}{dq} - \frac{il^3}{6} \cdot \frac{d^3B}{dq^3} + \frac{il^5}{120} \cdot \frac{d^5B}{dq^5} + \ldots\ldots$$

или кад се скрати са i

$$y = \frac{l\,dB}{dq} - \frac{l^3}{6}\, \frac{d^3B}{dq^3} + \frac{l^5}{120} \cdot \frac{d^5B}{dq^5} \qquad (10)$$

Обе једначине (9) и (10) задовољавају раније постављени услов да је за $l = o : y = o$ а $x = B$. У овим двема једначинама треба заменити вредностима поједине диференцијале B по независно променљивој q, па да се добију дефинитивни изрази за y и x.

Пре него што би прешли на диференцирање изложићемо вредности неколико израза да би се могло разумети како се дошло до крајњих резултата диференцијације.

* Тејлоров ред гласи:

$$f(x+h) = f(x) + h.f^{I}(x) + \frac{h^2}{2!} f^{II}(x) + \frac{h^3}{3!} f^{III}(x) + \ldots\ldots$$

Ако су a и b полуосовине земљиног елипсоида онда је

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=l^2 \text{ или по новијем } \frac{a^2-b^2}{a^2}=e'^2 \frac{a^2}{b}=c$$

$V^2=1+e'^2\cos^2\varphi=1+\eta^2$ где је $V^2=\frac{N}{M}=-$

$$\frac{dV}{d\varphi}=-\frac{\eta^2\cdot\sin^2\varphi}{V\cdot\cos^2\varphi}=-\frac{\eta^2 t}{V};M=\frac{c}{V^3};N=\frac{c}{V}$$

Све се ове количине лако изводе аналитичким путем из једначине елипсе земљиног меридијана.

Колико је $\frac{dB}{dq}$?

Изводећи једначину (3) ставили смо $\frac{M}{N}\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=dq$

а с обзиром на горње изразе можемо написати

$$\frac{d\varphi}{V\cdot\cos\varphi}=dq \text{ како је } dB=M\cdot d\varphi^{*}=\frac{c}{V^3}\cdot d\varphi \text{ а}$$

$$\frac{dq}{d\varphi}=\frac{1}{V.\cos\varphi} \text{ Дакле } \frac{dB}{dq}=\frac{c.\cos\varphi}{V} \tag{11}$$

Колико је $\frac{d^2B}{dq^2}$?

$$\frac{d^2B}{dq\,d\varphi}=-\frac{c}{V^2}\cdot\frac{dV}{d\varphi}\cdot\cos\varphi-\frac{c}{v}\cdot\sin\varphi=+\frac{c}{V^3}(\eta^2\cdot\sin\varphi-V^2\sin\varphi)=$$

$$\frac{c}{V^3}\sin\varphi\,[\eta^2-(1+\eta^2)]$$

Ако обе једначине поделимо са dq и помножимо са $d\varphi$ онда је:

$$\frac{d^2B}{dq^2}=\frac{c\sin\varphi\cdot(-1)}{V^3}\cdot\frac{d\varphi}{dq}=-\frac{c\cdot\sin\varphi.V^2\cdot\cos\varphi}{V^3}=-$$

$$\frac{c\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{V}=-N\sin\cdot\varphi\cdot\cos\varphi \tag{12}$$

Диференцирајући даље добијају се остали диференцијали виших редова

$$\frac{d^3B}{dq^3}=-\frac{c\cdot\cos^3\varphi}{V}(1-t^2+\eta^2)=-N\cdot\cos^3\varphi(1-t^2+\eta^2) \tag{13}$$

$$\frac{d^4B}{dq^4}=+\frac{c}{V}\cdot\sin\varphi\cos^3\varphi(5-t^2+q\,\eta^2+4\,\eta^4)=$$

$$=N\cdot\sin\varphi\cdot\cos^3\varphi(5-t^2+9\,\eta^2+4\,\eta^4) \tag{14}$$

Код даљег диференцирања треба занемарити чланове у којима се јавља η^4.

* Лук B одговара ширини φ а $d\varphi$ одговара диференцијал dB.

$$\frac{d^5 B}{d q^5} = + \frac{c}{V} \cdot \cos^5 \varphi \, (5 - 18\, t^2 + t^4 + 14\, \eta^2 - 58\, \eta^2 t^2)$$

$$= - N \cdot \cos^5 \varphi \, (5 - 18\, t^2 + t^4 + 14\, \eta^2 + 58\, \eta^2 t^2) \qquad (15)$$

$$\frac{d^6 B}{d q^6} = - \frac{c}{V} \cdot \sin\varphi \cos^5\varphi \, (61 - 58\, t^2 + t^4 + 270\, \eta^2 - 330\, \eta^2 t^2) =$$

$$= N \cdot \sin \varphi \cdot \cos^5 (61 - 58\, t^2 + t^4 + 270\, \eta^2 - 330\, \eta^2 t^2) \qquad (16)$$

Ко би хтео још даље да диференцира треба да одбаци све чланове са η^2

Када овако нађене диференцијалне количнике унесемо у једначине (9) и (10) изгледаће овако:

$$x = B + \frac{l^2}{2} \cdot \frac{N}{\rho^2} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{l^4}{24} \cdot \frac{N}{\rho^4} \cdot \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi \, (5 - t^2 + 9\, \eta^2 + 4\, \eta^2) + \frac{l^6}{720} \cdot \frac{N}{\rho^6} \cdot \sin \varphi \, . \cos^5 \varphi \, (61 - 58\, t^2 + t^4) \qquad (17)$$

$$y = l \cdot \frac{N}{\rho} \cos \varphi + \frac{l^3}{6} \cdot \frac{N}{\rho^3} \cdot \cos^3 \varphi \, . \, (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l^5}{120} \cdot \frac{N}{\rho^5} \cdot \cos^5 \varphi \, (5 - 18 t^2 + t^4) \qquad (18)$$

Овде је унето ρ да се l изрази линеарно и то у на онај степен на коме је и l.

б.) Кригерове једначине за рачунање равних координата из географских.

У своме делу: „Конформна пројекција елипсоида у равни" даје Кригер нове једначине за исти циљ као у претходном параграфу. Те нове једначине изложићемо у следећим редовима.

Полази се од раније изведене Гаусове једначине (18) пошто се извуче $\frac{N}{\rho} l \cos \varphi$ као заједнички чинитељ:

$$У = \frac{N}{\rho} l . \cos \varphi \left\{ 1 + \frac{1}{6\, \rho^2} (1 - t^2 + \eta^2)\, l^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{120 \rho^4} \cdot (5 - 18\, t^2 + t^4)\, l^4 \cos^4 \varphi \right\} \qquad (1)$$

Развије се l у ред arc. sin и тај се ред унесе у ову једначину пошто претрпи још неке измене.

$$l = \sin l + \frac{1}{6} \sin^3 l + \frac{3 \sin^5 l}{40} + \frac{5 \sin^7 l}{112} + \cdots\cdots$$

Треба помножити са $\cos \varphi$

$$l \cdot \cos \varphi = \sin l \cdot \cos \varphi + \frac{1}{6} \sin^3 l \, . \cos \varphi + \frac{3}{40} \sin^5 l \, . \cos \varphi + \cdots \qquad (2)$$

Имајући у виду да је $1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$

$$1^2 = (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2$$

можемо написати

$$l \cdot \cos\varphi = \sin \cdot l \cos\varphi + \frac{1}{6} \sin^3 l \cdot \cos\varphi \cdot (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \frac{3}{40} \sin^5 l \cdot \cos\varphi\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2$$

$$l \cos\varphi = \sin l \cdot \cos\varphi + \frac{1}{6} \sin^3 l \cdot \cos^3\varphi\,(1 + tg^2\varphi) + \frac{3}{40} \sin^5 l \cdot \cos^5\varphi\,(1 + tg^2\varphi)^2$$

$$l \cos\varphi = \sin l \cdot \cos\varphi + \frac{1}{6} \sin^3 l \cdot \cos^3\varphi\,(1 + t^2) + \frac{3}{40} \sin^5 l \cdot \cos^5\varphi\,(1 + t^2)^2 \qquad (3)$$

На овај смо начин довели да и $\cos\varphi$ буде на истом степену на коме је и $\sin l$ у сваком појединим члану.

Ако ставимо да је

$\frac{1}{S} \cdot \sin l \cdot \cos\varphi = \lambda$ сводимо целу једначину на овај прости облик

$$\frac{y}{N} = \lambda + \frac{1}{6}(2 + \eta^2)\lambda^3 + \frac{1}{5}\lambda^5 + \cdots \qquad (4)$$

(Наставиће се)

Ing. Милан П. Дражић
доцент Универзитета.

Predlog zakona o katastru zemljišta

I. Opšte Odredbe

Čl. 1. U Kraljevini Srba, Hrvata i Slovenaca izrađeni katastar zemljišta na osnovu premera, klasiranja i procene zemljišta služi kao podloga za pravedno oporezivanje zemljišta a istovremeno za izradu baštinskih knjiga.

Takav katastar zemljišta se ima izvršiti za sve krajeve države, gde ne postoji, u roku od 10 godina, koji je određen zakonom o neposrednim porezama od 8-II-1928. U pojedinim opštinama ovih krajeva važe za razrez poreza na prihod od zemljišta elaborati sastavljeni po čl. 20. zak. o neposrednim porezima do izrade katastra u odnosnim opšinama na osnovu ovog zakona.

Katastar zemljišta u krajevima, gde već postoji, saobraziće se propisima ovoga zakona.

Čl. 2. Na osnovu ovoga zakona izrađeni kao i postojeći katastar treba da se trajno održava i obnavlja.