GODIŠTE IV. 1922. BROJ 1. i 2.

GEODETSKI GLASNIK

DRUŠTVA GEOMETARA KRALJEVSTVA SRBA, HRVATA I SLOVENACA

Konformna azimutalna (stereografska) projekcija

jest za kružna područja sa promjerom do 600 km ujedno i projekcija minimalne moguće deformacije.

Napisao: Docent Dr. ing. **Antun Fasching,** suradnik državnog premjera kralj. SHS u Beogradu.

Uporedjivanjem formula dokazao sam prije nekoliko godina (190), da se manja krugu nalična područja (sa polumjerom od 300 km) preslikavaju uporabom konformne cilindričke projekcije (Mercator-Gauss) upravo dvostruko većom redukcijom smjerova i dvostruko većom redukcijom dužina nego li uporabom stereografske projekcije.

Dade se za čudo jednostavno a strogo dokazati, da izmedju neizmjerno mnogo zamišljenih projekcionih zakona ne može niti jedan ovakov zakon postojati, koji bi spomenuto područje mogao preslikati sa manjom deformacijom, nego li je to moguće sa stereografskom projekcijom.

Ovime je ujedno za praksu dokazano da ova projekcija sa gledišta redukcionih veličina čini idealni matematski temelj svim izmjerama i kartografiji manjih država.

Budući da kod državnih izmjera (triangulacija) valja voditi računa ne samo o veličinama projekcionih redukcija nego i o tome, da se iz pravokutnih koordinata u ravnini jednostavnim načinom mogu izračunati redukcije smjerova, zatim geografske koordinate i t d. to smo naša istraživanja protegnuli na sva ova pitanja. Praktične rezultate ovog istraživanja u najkraćem ću roku publikovati, pak ću ovom prilikom pokazati osobito povoljnu mogućnost uporabe stereografske projekcije.

Na koncu ovoga članka donosim spomenuto usporedjivanje sa konformnom cilindričkom projekcijom, no kraćim postupkom nego li sam to činio godine 1908.

Čl. 1. Izvod osnovnih formula.

Od neizmjerno mnogo vrsta preslikavanja kuglje ili elipsoida na ravninu poznajemo obzirom na deformaciju tri vrsti projekcija: 1. konformnu (sa nedeformiranim kutovima), 2. ekvivalentnu (sa nedeformiranim površinama) i 3. takovu kod kojih se kutevi i površine deformiraju, dakle preslikavanje sa općenitom deformacijom.

Za jedno te isto područje ove zadnje projekcije dade se postaviti bezbroj projekcionih jednačaba. Za svako od ovih bezbrojno mnogih preslikavanja dobiju se uvijek druge maksimalne vrednosti deformacije dužina, kuteva i površina. Tissot nazivlje ovakov zakon preslikavanja, koji za jednu odredjenu površinu (zemlju) daje najmanje zamišljene (u opće moguće) vrednosti ovih 3 deformacija kao maksimalnu vrednost, »kompensativnom projekcijom« dotične površine.

Po Tissotu izvedene općenite formule ove projekcije jesu:

$$x = s + \frac{\sin \varphi_0}{2 r_0} t^2 + \frac{A}{3} s^3 - Bs^2t + Cst^2 + \frac{B}{3} t^3$$

$$y = \frac{r}{r_0} t + \frac{B}{3} s^3 + As^2t - Bst^2 + \frac{C}{3} t^3$$

Predpostavlja se samo u ovom slučaju, da su maksimalne apsolutne veličine meridijanih lučnih dužina s i paralelnih lukova t (svi ovi svedeni na srednju paralelnu kružnicu) — uzevši za jedinicu dužine srednji polumjer zakrivljenosti — malene veličine izmedju 0 i $1/5$

A jer hoćemo naša istraživanja da protegnemo na područja koja su nalična krugu sa maksimalnim promjerom od 600 klm, to je u ovom slučaju maksimalna absolutna vrednost od s ili od t

$$s < \frac{1}{20} \quad i \quad t < \frac{1}{20}$$

Označimo li maksimalni »linearni modul« u jednoj povoljnoj točki ove kompensativne projekcije sa a, onda daje jednačba:

$$(a - 1) = A s^2 - 2Bst + (1/2 - A) t^2$$

gdje A, B predočuju iste koeficijente, koje sadržavaju projekcione jednačbe kompesativne projekcije.

Jasno je, da veličine A, B i t. d. valja odrediti prema obliku, položaju i površini dotičnog područja. U knjizi Tissota nalazimo za ovaj postupak eksaktnu i praktičnu uputu. Bit ove upute jest: 1. sastaviti pomoćni nacrt (kartu) sa granicama ovoga područja i na koje se dužine s i t nanesu kao pravokutne koordinate. 2. Valja sa više pokusa odrediti najmanju elipsu, koja obuhvaća ovo područje. (Pod riječju »malen« imade se razumjevati promjer elipse kod 45°.) Iz omjera osovina β/α ove glavne granične elipse, nadalje iz položaja njezinog središta (φ_0, λ_0) i iz priklonog kuta (γ), kojeg čini velika os granične elipse sa smjerom + t pomoćnoga nacrta, dadu se A, B i t. d. izračunati sa sledećim jednostavnim Tissotovim formulama:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon = +\,2\gamma \\ F = +\dfrac{1}{2\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+1\right)}\end{array}\right\}\ \text{(pomoćne veličine)}$$

$$A = \left(F - \frac{1}{4}\right)\cos\varepsilon + \frac{1}{4};\quad B = \left(F - \frac{1}{4}\right)\sin\varepsilon;$$

Imadu li dakle granice nekog područja (površine) lik sličan kružnici t. j. da se za ovo područje može naći na pomoćnom nacrtu pomoćna točka, koja leži u jednakim udaljenostima od krajnih točaka granične linije, onda je u ovom nacrtu glavnom graničnom elipsom kružnica i u tom slučaju će biti omjer osovina granične elipse

$$\alpha/\beta = 1 \text{ i}$$
$$\gamma = \text{neodredjeno.}$$

Supstituiramo li ove dobivene vrednosti u formule za E, F, A, B, to će biti:

$$A = +\frac{1}{4};\qquad B = 0\qquad \left(\frac{1}{2} - A\right) = +\frac{1}{4}$$

Budući nas kod ovoga istraživanja zanima samo jednačba redukcije dužine, to uvrstivši ove izračunate vrednosti za (a—1) dobivamo:

$$(a-1) = \frac{1}{4}s^2 + \frac{t^2}{4} = \frac{1}{4}(s^2 + t^2)$$

Dobili smo dakle jednačbu, koja nam odredjuje: sa kojim najmanjim vrednostima maksimalne deformacije dužina može općenito biti preslikano područje, koje naliči krugu, sa istodobnom minimalnom deformacijom kuteva.

Mjesta jednake deformacije na pomoćnom nacrtu (karti) jesu prema tome centrički krugovi. Formulu za deformaciju dužina stereografskog preslikavanja može se u svakoj naučnoj knjizi naći a ova glasi: Dira li projekciona ravnina kuglju u točki A i znači li ϑ centrički kut luka $\widehat{A, B}$ u središtu kuglje, to je u točki B (dotično u svim točkama centričkoga kruga sa polumjerom AB) deformacija dužine

$$a = \frac{1}{\cos^2\dfrac{\vartheta}{2}}$$

Usporedimo sada obe osnovne formule uvrstivši sve vrednosti, koje su za praksu mjerodavne, od (a—1).

Čl. 2. Usporedjivanje formula.

Osnovna jednačba kompensativne projekcije jest:

$$4\,(a - 1) = s^2 + t^2$$

to je usljed jednačbe kruga:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

i ako se sa d označi polumjer kruga to je

$$d^2 = 4\,(a - 1) \text{ ili}$$

$$d = 2\sqrt{(a - 1)}$$

gdje je polumjer kuglje R jedinica dužine.

Hoćemo li izraziti d u kilometrima ($d = 2\,R\sqrt{a - 1)}$ to valja desnu stranu pomnožiti sa R = 6350 km, što nam daje za numeričko računanje formulu jednostavnoga oblika:

$$\underline{d\ \text{km} = 12700\ \sqrt{(a - 1)}}$$

Izračunajmo sada k vrednostima

$(a - 1) = 0.0000;\ +\ 0.0001;\ +\ 0.0002;\ +\ 0.0004;$

pripadne udaljenosti d. Zašto ovo činimo razjasniti će se naknadno. Budući je

$$\sqrt{0} = 0$$
$$\sqrt{0\,0001} = 0.01000$$
$$\sqrt{0.0002} = 0.014142$$
$$\sqrt{0.0004} = 0.02000 \quad \text{biti će}$$

$$\underline{d_0 = 0;\ d_1 = 127.0\ \text{klm};\ d_2 = 179.6\ \text{klm};\ d_3 = 254.0\ \text{klm.}}$$

Izračunajmo nadalje, koje vrednosti od d odgovaraju istim vrednostima od (a — 1) za slučaj uporabe stereografske projekcije. U ovu svrhu transformiramo osnovnu formulu:

$$a = \frac{1}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad \text{na sledeći praktičan oblik:}$$

$$\cos^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{a} \quad \text{a jer je općenito}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \quad \text{to dobivamo sledeću jednačbu}$$

$$\frac{1}{2}\cos\vartheta = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \quad \text{ili}$$

$$\cos\vartheta = \left(\frac{2}{a} - 1\right)$$

Uvrsti li se mjesto cos ϑ red

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

i uzme li se u obzir, da se naša istraživanja odnose na udaljenosti ispod 300 km, dakle za

$$\vartheta_{max} = \frac{1}{20}$$

to će vrednost člana gornjega reda

$$\frac{\vartheta^4}{4!} = \frac{1}{24.20^4} = \frac{1}{3840000}$$

biti maksimalno $\pm$ 0·82 cm (što se u ovom slučaju može zanemariti), onda će jednačba glasiti:

$$1 - \frac{\vartheta^2}{2!} = \left(\frac{2}{a} - 1\right) \quad \text{nadalje}$$

$$-\frac{\vartheta^2}{2} = \left(\frac{2}{a} - 2\right) \quad \text{i}$$

$$+\vartheta^2 = 2\left(2 - \frac{2}{a}\right) = 2\left(\frac{2a - 2}{a}\right) = 2 \,.\, 2\,\frac{(a - 1)}{a}$$

Vrednost za ϑ dobivamo konačno iz ove jednostavne formule:

$$\vartheta = 2\sqrt{\frac{(a - 1)}{a}}$$

Uvrsti li se mjesto apsolutne vrednosti kuta ϑ dužina luka u kilometrima, to valja desnu stranu sa R umnožiti, što daje

$$d_{ster.} = 2\,R\sqrt{\frac{a-1}{a}} = (2\,R\sqrt{a-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Usporedimo sada ovaj izraz sa jednačbom od d kompensativne projekcije to se dobije

$$d_{ster.} = d_{komp.}\sqrt{\frac{1}{a}}$$

A jer se u području našega istraživanja (d_{max} = oko 300 km) sve vrednosti od a nalaze unutar + 1.0000 i + 1.0005, to se može onda staviti za $a = 1 + \alpha$

gdje je $0 < \alpha < 0·0005$.

U ovom je slučaju $\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2}$

pak je

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = 1 : \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

ili mjesto α uvrstivši njegovu vrednost $\alpha = (a - 1)$ biti će

$$d_{ster.} = d_{komp.} - \left(\frac{a-1}{2}\right) d_{komp.}$$

Ako je a = 1.0 to će se drugi član ove jednačbe poništavati, a jer je prvi član po napred nadjenoj jednačbi takodjer jednak ništici, to je

$$d_{0\ ster.} = 0$$

a ovo je diralištna točka ravnine sa kugljom. Izlazeć iz ove točke u kojem god smjeru dobiva *a* kod stereografske projekcije uvijek „ranije" (prije) stanovitu vrednost, nego li kod kompensativne projekcije. Ova riječ „ranije" praktični znaći sledeći dokaz:

Za vrednosti

$$(a - 1) = +\ 0{\cdot}0001;\ +\ 0{\cdot}0002;\ i\ +\ 0{\cdot}004 \quad \text{biti će}$$

$$\frac{a-1}{2} = +\ 0{\cdot}00005;\ +\ 0{\cdot}0001;\ +\ 0{\cdot}0002$$

a po predjašnjem računu njima odgovarajuće vrednosti od $d_{komp.}$:

127.0 km; 179.6 km; 254.0 km

Izmnožimo li ove medjusobno dobijemo:

0.006 km, 0.018 km, 0.050 km

Ucrtajmo sada radi lakoga pregleda i prosudjivanja sa dobivenim vrednostima $d_{komp.}$ u jednu dobru preglednu kartu (nacrt) sastavljenu u mjerilu 1: 750.000 dotičnog područja centrične krugove i izvucimo ove u veoma finim linijama sa crvenim tušem. Isto tako ucrtajmo u istu ovu kartu i krugove, koji odgovaraju nešto manjim distancama stereografske projekcije, u isto tako finim linijama (0.1 mm) ali sa crnim tušem, to će svi crni krugovi crtežno apsolutno točno pokrivati crvene krugove (razmaci ovih 3 kružnica u milimetrima jesu: 0.009, 0.02 i 0.06 mm).

I u mjerilu 1:500 000 dobivamo još uvijek crtežno apsolutno točan i idetički sistem krugova za deformaciju dužina. Shema maksimalnih deformacija dužina je dakle sa praktičnog gledišta za obe ove projekcije ista. Prema tome se mogu i krugovi jednakih plošnih deformacija sa praktičkog gledišta smatrati identičnim s razloga, što je za stereografsku projekciju „plošni modul" $t = a^2$ (točno), a za kompenzativnu projekciju je ovaj približno točan.

Što se tiče konačno deformacije kuteva u ovom je stereografska projekcija u prednosti, jer se njezinom uporabom kutevi preslikavaju bez deformacije, dok kod kompensativnog preslikavanja može za područja unutar kruga sa polumjerom od cca 300 km maksimalna deformacija kuta poprimiti veličinu

$$\alpha \left(\frac{1}{20}\right)^3 = \alpha\ \frac{1}{8000} \quad \text{gdje se}$$

$0 < \alpha < 1$ može odrediti.

Ovime je naša prvobitna tvrdnja dokazana, pak ću u najkraćem vremenu saopćiti polučene praktične resultate cijelog ovog razmatranja uz predočbu podpunog jednog sistema.

Isto tako se može usporediti stereografska sa konformnom cilindričkom projekcijom takodjer unutar područja kružnice sa maksimalnim promjerom od 600 klm.

Član 3. Usporedjivanje deformacija konformne cilindričke sa stereografskom projekcijom.

Vrednost »linearnog modula« kod cilindričke projekcije daje ovaj izraz

$$a = \frac{1}{\cos \vartheta}$$

gdje ϑ predočuje udaljenost jedne točke od dirajućeg kruga na kugljì. Prema tome je

$$\cos \vartheta = \frac{1}{a} \text{ sa prelazom na red}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots \text{ unutar granica } \pm \frac{1}{3000000} \text{ točan.}$$

$$1 - \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{1}{a}\,; + \frac{\vartheta^2}{2} = 1 - \frac{1}{a}$$

$$\vartheta^2 = 2 - \frac{2}{a} = \frac{2\,a - 2}{a} = 2\,\frac{a-1}{a}.$$

$$\text{Dakle je } \vartheta = \sqrt{2}\ \sqrt{\frac{a-1}{a}}\,;$$

hoćemo li mjesto kuta ϑ imati izraženu odgovarajuću udaljenost na kuglji u kilometrima, onda je $d_{cil.} = R\sqrt{2}\ \sqrt{\frac{a-1}{a}}$.

Budući je prema našem prijašnjem izvodu vrednost od d za stereografsku projekciju

$$d_{ster.} = 2\,R\sqrt{\frac{a-1}{a}}$$

dobivamo diobom obih jednačba za istu vrednost a odnosno (a — 1) u obim projekcijama

$$\frac{d_{cil.}}{d_{ster.}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.4142}{2} = 0.7071.$$

Konačna jednačba dakle glasi:

$$\underline{d_{cil.} = 0.7071\ d_{ster.}}$$

za udaljenosti kuglje sa jednakim deformacijama dužina, a znamo, da možemo u ovoj jednačbi za praktične svrhe mjesto $d_{ster.}$ zamjeniti sa $d_{komp.}$

Uvrstimo li prema tome izračunane vrednosti d_0; d_1; d_2; d_3; u ovu jednačbu, to dobivamo sledeću poučnu skrižaljku:

$(a - 1) =$	0	0.0001	0.0002	0.0004
$d_{cil} =$	0	90 km	127 km	180 km
$d_{ster.} = d_{komp.} =$	0	127 km	180 km	254 km
Razlika distancije kod iste deformacije dužina . . .		37 km	53 km	74 km

Iz ove skrižaljke vidimo takodjer, da kada cilindrička projekcija daje za iste udaljenosti od centruma deformaciju dužine od + 0.0002, istodobno daje stereografska projekcija za istu ovu udaljenost + 0.0001, dakle samo polovicu. Isto je ovo i kod najvećih vrednosti + 0.0004, koja se cilindričkom projekcijom dobiva upravo ondje, gdje stereografska daje tek polovicu ove vrednosti + 0.0002 i t. d.

Iz ovoga slijedi, da za površine unutar kružnoga područja sa maksimalnim promjerom od 600 km daje konformna cilindrička projekcija točno dvostruko veću deformaciju dužina, nego li što je daje kompensativna odnosno stereografska projekcija.

Ovo važno pravilo dade se i bez numeričkog primjera formulama izvesti dotično dokazati. Poznato je, da za kompensativnu projekciju postoji jednačba $\frac{\vartheta^2}{4} = (a_1 - 1)$

a za cilindričku: $a = \frac{1}{\cos \delta} = \sec \delta$

$$\sec \delta - 1 = (a_2 - 1)$$

Uvrstimo li mjesto $\sec \delta$ odgovarajući red

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5\,x^4}{24} + \ldots\ldots$$

i zanemarimo od trećega člana dalje, jer je njegova maksimalna vrednost $\frac{5}{24.20^4} = \frac{5}{24 \times 160000}$

to će jednačba konformne cilindričke projekcije za $(a_2 - 1)$ glasiti

$$\left(1 + \frac{\vartheta^2}{2}\right) - 1 = (a_2 - 1) \text{ a odavle}$$

$$\frac{\vartheta^2}{2} = (a_2 - 1)$$

Imade li prema tome ϑ i u cilindričkoj i u kompensativnoj projekciji istu vrednost, onda je u ovoj točki

$$2\,(a_2 - 1) = 4\,(a_1 - 1) \text{ pak je}$$
$$(a_2 - 1) = 2\,(a_1 - 1)$$

što je trebalo dokazati.

Ovaj se dokaz dade za stereografsku projekciju izvesti direktno:

$$a_3 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}} = \sec^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$(a_3 - 1) = \sec^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - 1 = \left\{1 + \frac{\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2}{2} \cdot 2 + \left[\frac{\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{2}\right]^2\right\} - 1 =$$

$$= 1 + \frac{\vartheta^2}{4} + \frac{\vartheta^4}{32} - 1 = \frac{\vartheta^2}{4}$$

prema tome je unutar $\pm \frac{1}{32.\,(20)^4}$ točno.

$(a_3 - 1) = \frac{\vartheta^2}{4}$ što dokazuje, da za stereografsku projekciju kao i za kompensativnu projekciju postoji zakon istoga stupnja točnosti:

$$(a-1)_{ster.} = \frac{1}{2}\,(a-1)_{cil.}$$

Budući da cilindrička projekcija ne deformira kuteve, to može biti govora samo o deformaciji smjerova, pod kojom razumjevamo one malene kuteve, koje zatvara prava projekcija jedne stranice trokuta (ova se projecira u krivulju) sa ravnom stranicom. Pošto ali stereografska projekcija ne deformira kuteve, to možemo usporedjenje obih ovih zakona s obzirom na redukciju smjerova izravno izvesti, dakle bez obzira na kompensativnu projekciju. Resultat ovaj je riječima isti kao i za deformaciju dužina t. j. maksimalne vrednosti redukcije smjerova konformne cilindričke projekcije unutar područja, koji nalikuje krugu, dva puta su veće nego li kod stereografske projekcije. Ovo izraženo u brojevima da:e stereografska projekcija unutar istoga područja maksimalnu redukciju smjera za stranicu trokuta od 5 klm dužine (4. reda) sa $\pm$ 1.8″ . . dok konformna cilindrička projekcija za istu dužinu i identično područje daje maksimalnu redukciju smjera sa točno

$\pm$ 3.6″. . .

koja okolnost može za praksu biti od veoma velikog značenja.

Davno je poznato, da se redukcija smjera jedne stranice trokuta sa dužinom do 20 klm dade izračunati sa točnošću $\pm$ 0.01″ nalazila se ova stranica od centralne točke stereografske projekcije čak i u udaljenosti d = 300 klm po pravilu: Valja zamisliti, da su obe krajne točke A B zadane stranice trokuta u ravnini spojene sa projekcionim centrumom (C) pak ako je dvostruka površina ovog „pomoćnog centralnog trokuta" u ravnini = 2F, onda je apsolutna vrednost redukcije smjera u točki A i B jednaka.

$$\left|\Delta\right|_{ster.} = \left(\frac{\rho''}{4R^2}\right) . 2F$$

gdje su ρ'' i R poznate veličine / log ρ'' = 5.31442513, a R = polumjer srednje širine područja: $R = \sqrt{R_1 R_2}$.

Predočuje li x_A, y_A i x_B, x_B pravokutne koordinate u ravnini stereografske projekcije, to je po poznatoj trokutnoj formuli

$$2F = x_A y_B - x_B y_A \text{ jer je } x_C = y_C = 0.$$

Naša će jednačba glasiti:

$$\left|\Delta\right|_{ster.} = \left(\frac{\rho''}{4R^2}\right)(x_A y_B - x_B y_A)$$

Jednačbe konformne cilindričke projekcije za stranice od 6 km dužine i sa maksimalnim rastojanjem od neutralne osi do 300 km unutar točnosti od $\pm$ 0 1" su nam poznate:

$$\left|\Delta\right|_{cil} = \left(\frac{\rho''}{4R^2}\right)(x_B + x_A)(y_B - y_A) =$$

$$= \left(\frac{\rho''}{4R^2}\right)\left[(x_A y_B - x_B y_A) + (x_B y_B - x_A y_A)\right]$$

usporedivši ove jednačbe biti će:

$$\left|\Delta\right|_{cil.} = \left|\Delta\right|_{ster.} + \frac{\rho''}{4R^2}(x_B y_B - x_A y_A).$$

Veoma lako se dade dokazati, da je drugi član jednačbe kod zgodno odabranog položaja stranice AB jednak = $\left|\Delta\right|_{ster.}$ Neka je Y diralištna os cilindričke projekcije i neka se stranica AB položi paralelno sa ovom osi i to tako, da os X ovu stranicu sječe u sredini, onda je

$$x_A = x_B.$$

Uvrstimo li u drugi član jednačbe mjesto x_B vrednost x_A i mjesto x_A vrednost x_B, to će ovaj član takodjer dati vrednost $\left|\Delta\right|_{ster.}$ i ovime je za maksimalni položaj obih redukcija

$$\left|\Delta\right|_{cil.} = 2\left|\Delta\right|_{ster.}$$

Praktično ću značenje ove jednačbe u sledećem članku raspraviti.