GODINA I. ZAGREB, PROSINAC 1919, SIJEČANJ 1920. BR. 7 i 8.

GLASILO GEOMETARA
KRALJEVSTVA SRBA, HRVATA I SLOVENACA.

# Projekcije zemaljske izmjere u Hrvatskoj i Slavoniji.

Napisao Vl. Filkuka, profesor geodetskog tečaja u Zagrebu

(Svršetak.)

## Stereografska projekcija.

Neka bude $f^{(u)} = C\, e^{iu}$; pa ćemo dobiti, uzmemo li samo pozitivni znak

$$x + i y = C\, e^{iL - \log \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)}$$

$$x + i y = C\,(\cos L + i \sin L)\,\frac{1}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)}$$

$$x + i y = C \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)\cos L + i\, C \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)\sin L$$

iz toga

$$\left.\begin{aligned} x &= C \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)\cos L \\ y &= C \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)\sin L \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Za liniarni modul dobivamo analogno jednadžbi (7)

$$m = \frac{C \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)}{R \cos \Phi} = \frac{C}{2\,R \sin^2\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)} = \frac{C}{2\,R \cos^2\left(\frac{u}{2}\right)} \qquad (23)$$

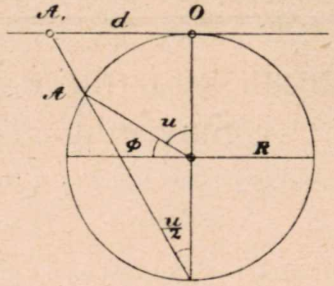
gdje je $u = (90 - \Phi)$.

Za $\Phi = 90^0$ bit će $m = \frac{C}{2\,R}$ - - - - minimum,

za $m = 1$ biti će $C = 2\,R$.

C je konstanta kod t. zv. stereografske, polarne projekcije, kod koje ravnina projekcije tangira zemlju u polu a centrum se projekcije nalazi u drugom polu.

Gornje formule poprimiti će drugi oblik, ako u nje uvedemo vrijednost za C i relacije, koje proizlaze iz slike




$$(24)\quad \begin{cases} \underline{x} = 2\,R \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right) \cos L = 2\,R \operatorname{tg} \frac{u}{2} \cos L = \underline{d \cos L} \\ \underline{y} = 2\,R \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right) \sin L = 2\,R \operatorname{tg} \frac{u}{2} \sin L = \underline{d \sin L} \end{cases}$$

$$(25)\quad \underline{m} = \frac{1}{\sin^2\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2 \frac{u}{2}} = \underline{1 + \frac{d^2}{4\,R^2}}$$

Iz ovih jednadžbi proizlaze ova važna pravila stereografske projekcije :

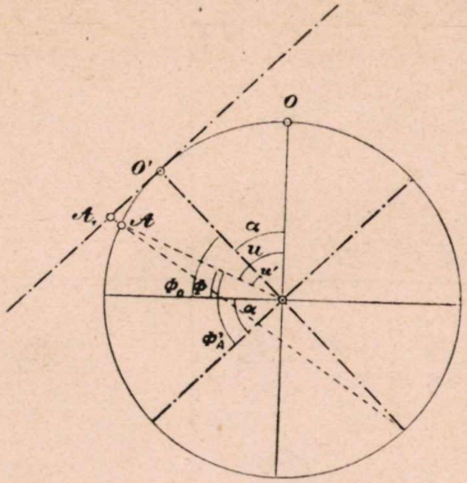
1. Svi glavni krugovi, koji prolaze kroz nultočku O, projicirat će se kao pravci ;

2. kutevi, što ih čine ravnine tih krugova međusobno ostat će i u projekciji isti ;

3. Pošto je ta projekcija konformna, projicirat će se svi krugovi na kugli, osim onih pod (1) navedenih, kao krugovi, te će se koja god dva kruga sjeći u projekciji pod istim kutom kao na kugli ;

4. mjesta istih deformacija leže na koncentričnim kružnicama, koje su opisane oko O.

Nultočka O nije kod naših katastralnih ozmjere pol, nego točka, koja leži p. p. u sredini bivše Zalitavske — „Gellertov brojeg" ; ravnina projekcije tangira zemaljsku kuglu u toj točci, a centrum je projekcije probodište zemaljskoga promjera — koji prolazi kroz nultočku — sa plohom kugle. Ravninu, koja je okomita na taj promjer i prolazi sredinom zemlje, možemo smatrati ravninom pomoćnog ekvatora.




Geografska je širina „Gellertovog brojega".

$\Phi_0 = 47^0\ 26'\ 21{\cdot}1372''$ ($\varphi_0 = 47^0\ 29'\ 9{\cdot}63\ 8\ 0''$)

Pomoćna geografska širina točke A bitiće

$\Phi'_A = \Phi_A + \alpha$ ; $\alpha = 90^0 - 47^0\ 26'\ 21{\cdot}1372'' = 42^0 33'\ 38{\cdot}8628''$

Neka je $u = 90 - \Phi_A$ , $u' = 90 - \Phi'_A$.

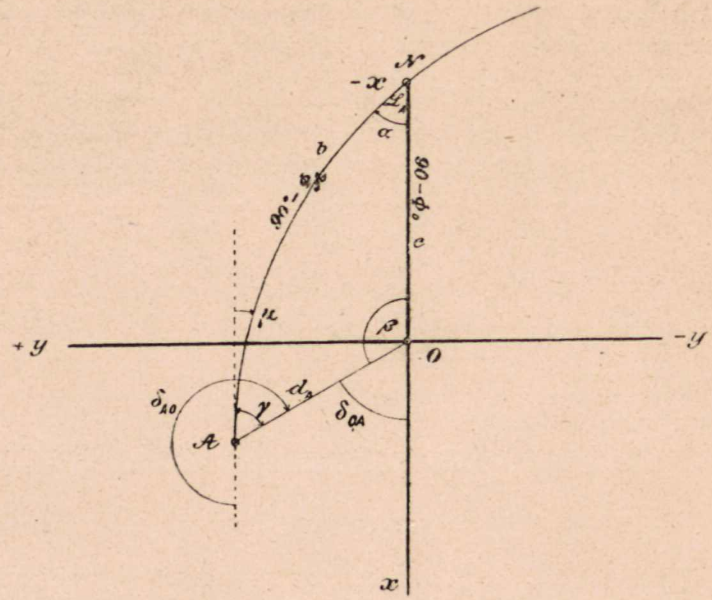
$\underline{u'} = u - \alpha = 90 - \Phi_A - 90 + \Phi_0 = \underline{\Phi_0 - \Phi_A}$

Umjesto geografske dužine L dolazi pomoćna geografska dužina $\underline{\delta}$, kut, što ga zatvara radius vektor (na pr. O A) sa osi x. Taj se kut mjeri od juga prema zapadu. Možemo ga izračunati iz sferičkog trokuta A N O.

$$\operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\operatorname{cosin}\frac{b+c}{2}}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\Phi_0-\Phi_A}{2}}{\sin\frac{\Phi_0+\Phi_A}{2}}\operatorname{cotg}\frac{L_A}{2}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\Phi_0-\Phi_A}{2}}{\operatorname{cosin}\frac{\Phi_0+\Phi_A}{2}}\operatorname{cotg}\frac{L_A}{2}$$

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = M\ ,\quad \frac{\beta-\gamma}{2} = N$$



$M + N = \beta$, $M - N = \gamma$ $\delta_{0A} = 180 \mp \beta$, gdje se predznak $\beta$ mijenja prema predznaku $L_A$. Kut $\delta$ zove se, kut smjera.

Neka je os x meridijan Gellertovoga brijega, os y okomica na x u Gellertovom brijegu. Ravne kardinate točke A jesu:

$$\left.\begin{aligned} x_A &= 2\,R\,\mathrm{tg}\,\frac{u'}{2}\,\cos\delta_{0A} \\ y_A &= 2\,R\,\mathrm{tg}\,\frac{u'}{2}\,\sin\delta_{0A} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Redukcija se sferičkih stranica obavlja po ovim pravilima:

Kod stranica trokuta IV. reda ($<$ 5 km) može se kao redukcija uzeti log linearnog modula za radius vektor, koji pripada sredini stranice t. j. $\log \overline{A_1\,B_1} = \log \overset{\frown}{A\;B} + \log m_c$ (C je sredina stranice $\overset{\frown}{A\;B}$); kod stranica $> 5 < 20$ km upotrebljava se formula $\log \overline{A_1\,B_1} = \log \overset{\frown}{A\;B} + \sigma$;

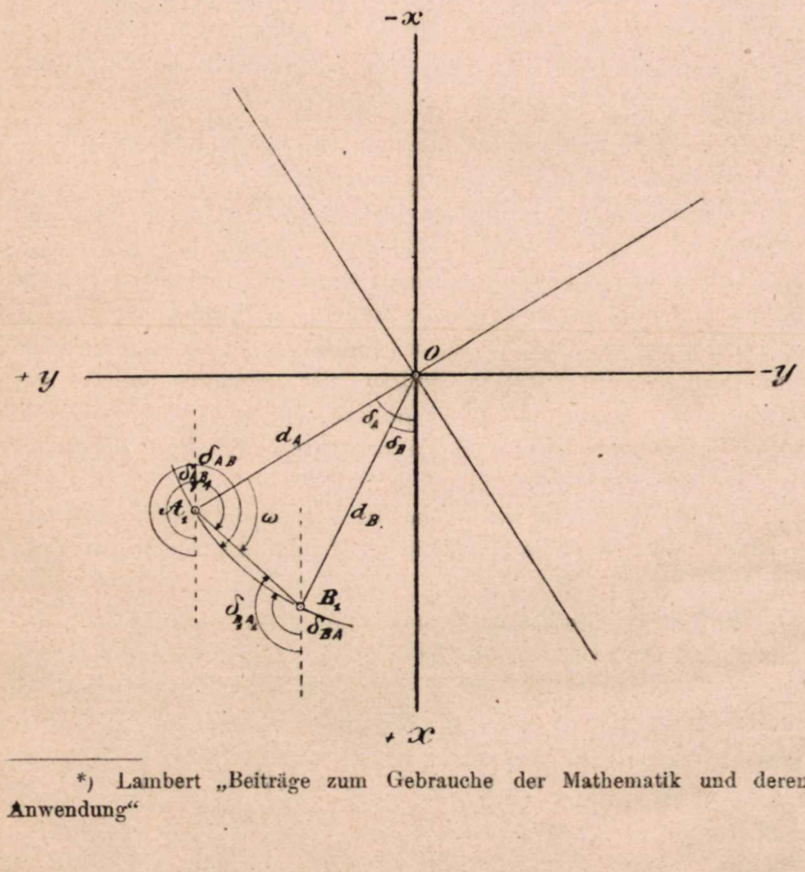
$$\sigma = \log \frac{1}{\cos \frac{u'_A}{2}} + \log \frac{1}{\cos \frac{u'_B}{2}} = \sigma_{dA} + \sigma_{dB}$$

Za stranice veće od 20 km vrijedi stroga formula

$$\log \overline{A_1 B_1} = \log \widehat{A\ B} + \sigma_{dA} + \sigma_{dB} + \sigma_c \,; \; \sigma_c = \log \sin \frac{\tau_{AB}}{2} - \log \frac{\tau_{AB}}{2}$$

gdje je $\tau_{AB}$ središnji kut sfer. stranice*).

Nužno je još spomenuti, da je potrebno reducirati sferičke kuteve smjera na ravne, i to radi toga, što nije moguće predočiti kružni luk kao pravac; ako naime projiciramo stereograf. metodom točke kružnog luka A, B, onda je u ravnini najkraća spojnica tih točaka pravac $\overline{A_1\ B_1}$ premda je na kugli najkraća spojnica točaka A, B največi kružni luk $\widehat{A\ B}$. Ako bi konformno projicirali sve točke liniji $\widehat{A\ B}$, dobili bi pravu spojnicu $\widehat{A_1\ B_1}$, koja je okrenuta svojom konveksnom stranom prema središtu O; dobili bi i pravi sferički kut smjera $\delta_{AB}$ i $\delta_{BA}$. Projiciramo li samo krajeve stranice A B, dobivamo kao spojnicu pravac $\overline{A_1\ B_1}$ i kut smjera $\delta_{A_1B}$ odnosno $\delta_{B_1A_1}$.




*) Lambert „Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung“

Iz slike se vidi da je $\delta_{A_1B_1} = \delta_{AB} - \Delta_{AB}$

$$\delta_{B_1A_1} = \delta_{BA} + \Delta_{BA}$$

Ako uvažimo, da je suma kuteva u ravnom trokutu $180^0$, dok je u sferičnom $180 + \varepsilon$, vidimo, da mora biti $|\Delta_{AB}| + |\Delta_{AB}|$ o $= \varepsilon$ i da je $|\Delta_{AB}| = |\Delta_{BA}| = \frac{\varepsilon}{2}$

Predznak od $\Delta_{AB}$, $\Delta_{BA}$ mijenja se dakako, prema veličini kuta $\omega$.

Prema jednačbi (25) raste deformacija dužine sa radius vektorom $\underline{d}$, te ostaje samo do udaljenosti od 126 km (= d) ispod dopustive granice.

Udaljenost dviju točaka, koju smo izračunali iz pravokutnih koordinata tih točaka razlikuje se od sferičke udaljenosti za $\frac{1}{10.000}$ ako ta izračunata dužina leži p. p. 126 km od nultočke O. Ovo je ujedno točnost, s kojom se može izravno izmjeriti ta dužina.

Izvan kružnice, opisane oko O sa polumjerom od 126 km raste deformacija iznad $\frac{1}{10.000}$ te dosiže na granici bivše Zalitavske, vrijednost od $\frac{1}{1.000}$.

Točnost je dakle projekcije na ovim mjestima manja, nego što je postizavamo kod direktnog mjerenja.

Ovo se svakako protivi glavnom načelu — naime da bude deformacija uslijed projekcije u cijelom mjerenom predjelu manja, najviše jednaka pogrešci direktnoga mjerenja, to jest, da se ne moraju reducirati podatci detajlne izmjere radi projekcije.

Uslijed toga uvedeni su u godini 1909 novi projekcioni sustavi, koji imaju služiti za izmjeru niže geodezije umjesto stereografske projekcije, dok je ova projekcija — stari budimpeštanski sustav — pridržana kao projekcija za izjednačenje trigonom točaka viših redova.

Temelj je tim novim sustavima konformna projekcija kugle na plašt valjka. Ovu je projekciju prvi puta upotrijebio Merkator (g. 1569).

Pravila se Merkatorove projekcije mogu izvesti iz naprijed navedenih formula.

Za konformnu projekciju kugle na ravninu vrijedi jednadžba (21).

$$x + i\,y = \left((L \pm i \log \operatorname{tg} (45 + \frac{\varphi}{2})\right)$$

Stavimo li za $f(v) = k\,v$, dobit ćemo ako uzmemo samo $+$ znak

$$x + i\,y = k\,L + i\,k \log tg\,(45 + \frac{\Phi}{2}),$$

Iz toga

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{x = k\,L} \\ \underline{y = k \log tg\,(45 + \frac{\Phi}{2}} \end{array} \right\}$$

$$(28) \quad \underline{m = \frac{k}{R\cos\Phi}}$$

Predpostavimo, da će biti za $\Phi = 0$ $m = \frac{k}{R} = 1$a dakle $k = R$: zamjenimo analogno katastralnim izmjerama osi, pa ćemo iz jednadžbi 27 dobiti

$$\left. \begin{array}{l} \underline{y = R\,L} \\ \underline{x = R \log tg\,(45 + \frac{\Phi}{2})} \end{array} \right\} \quad (29)$$

$$\underline{m = \frac{1}{\cos\Phi}} \quad (30)$$

Iz ovih jednadžbi proizlaze ova važna pravila Merkatorove projekcije.

1. Ekvator projicirat će se kao pravac (os y)

2. Meridijani kugle projicirat će se kao međusobno paralelni pravci i stajat će okomito na projekciji ekvatora.

3. Međusobna udaljenost meridijana u projekciji bit će identična sa međusobnom udaljenošću meridijana na ekvatoru

4. Paralelni krugovi projicirat će se kao pravci paralelni sa ekvatorom.

5. Međusobna udaljenost paralelnih krugova raste sa $\Phi$.

Valjak na koji kod Merkatorove projekcije projiciramo zemaljsku kuglu dira kuglu na ekvatoru, a os mu je identična sa osi zemlje. Ova se projekcija zove također projekcija na valjak ravnom osi.

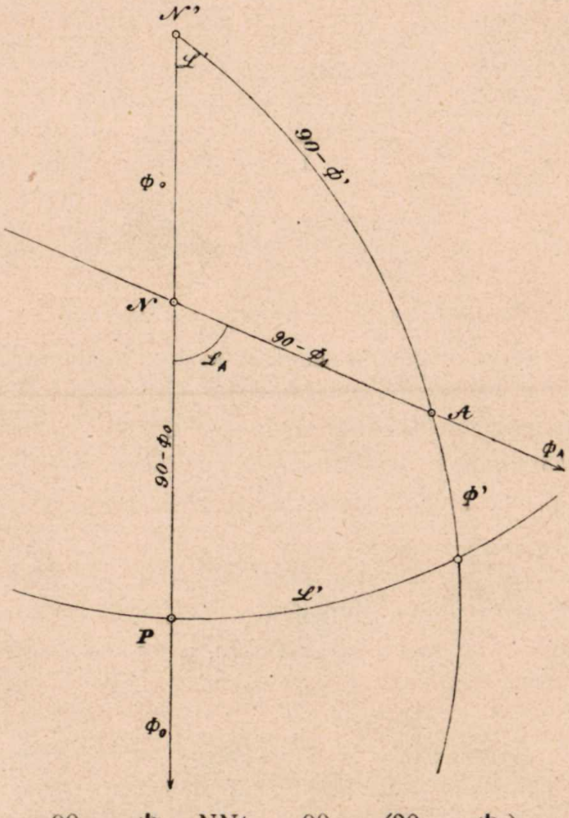
U slučaju, da valjak ne dira kuglu na ekvatoru, nego u povoljnom najvećem krugu kugle, morat ćemo uvesti nove pomoćne koordinate, $\Phi'$ $L'$ koje će se odnositi na taj najveći krug kao pomoćni ekvator, kojemu će pripadati pomoćni pol $N'$.

Projekcija na takav valjak zvati će se projekcija na valjak s kosom osi.

Veličine $\Phi'$, $L'$ stajati će u nekakvom odnošaju prema $\Phi$ $L$ to jest $\Phi' = f_1$ ($\Phi$ $L$), $L' = f_2$ ($\Phi$ $L$).

Taj se odnošaj mijenja prema tomu, da li valjak dira zemaljsku kuglu u meridijanu, ili u najvećem krugu, koji je okomit na meridijan, ili konačno u jednom povoljnom najvećem krugu. Kod naših se katastralnih izmjera primjenjuje drugi slučaj t. j. valjak dira zemaljsku kuglu u najvećem krugu, koji siječe okomito početni meridijan u geografskoj širini $\Phi_0$.

Odnošaj između pomoćnih ($\Phi'$, $L'$) a pravih geogr. koordinata ($\Phi$, $L$) odredit će se iz pomoćnog polarnog trokuta $ANN'$, u kojem nam je poznato:




$NA = 90 - \Phi_A$, $NN' = 90 - (90 - \Phi_0) = \Phi_0$

i kut kod $N = 180 - L_A$

Iz toga trokuta slijedi:

$$\sin \Phi' = \sin \Phi_A \cos \Phi_0 - \text{cosin}\, \Phi_A \sin \Phi_0 \,\text{cosin}\, L_A$$

$$\sin \Phi_A = \sin \Phi' \cos \Phi_0 + \text{cosin}\, \Phi' \sin \Phi_0 \cos L'$$

Iz ovih jednadžbi možemo izračunati vrijednost pomoćnih, koordineta $\Phi'$, $L'$; ako te vrijednosti uvrstimo u jednadžbe (29), (30), dobivamo

$$\left.\begin{aligned} y &= R\, L' \\ x &= R \log \text{tg}\,(45 + \frac{\Phi'}{2}) \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$m = \frac{1}{\cos \Phi'} \qquad 32$$

Ove se jednadžbe odnose na projekcioni sustav, u kojem će biti os x identična sa početnim meridianom, os y sa najvećim krugom, koji siječe okomito meridijan u točci P sa geogr. širinom $\Phi_0$.

Bivši triangularni ured uveo je tri valjka — [dakle tri projekciona sustava: sjeverni, srednji, južni] — koji diraju zemlju u najvećim krugovima, koji sjeku okomito meridijan Gellerttovog brijega u točkama $P_1$, $P_2$, $P_3$. Tri su se valjka morala odabrati radi toga, da se udovolji zahtjevu, da ne bude deformacija duljine uslijed projekcije ni na jednom mjestu zemlje veća od $\frac{1}{10.000}$, te da se projekcija kuta, što ga čine dvije stranice, od 5 km dužine ne razlikuje od pravog sferičkog kuta više od $\pm$ 2·5″. Kod tako izabranih sistema projekcije ne će biti nužno da se reduciraju podatci detajlne izmjere, kako to i traži temeljni zahtjev kod izbora projektcionih sustava.

Točke $P_1$, $P_2$, $P_3$ bile su tako izabrane, da se je cijela Zalitavska razdijelila u smjeru sjever jug u tri pojasa sa širinom manjom od 180 km, jer se samo unutar takve širine ne pokazuje veća deformacija nego što je dozvoljeno, ako je os y u sredini pojasa.

Ova tri projekciona sustava, koja su nastala konformnom projekcijom početnog meridijana i najvećih triju okomitih krugova na valjak sa kosom osi, imati će u ravnini zajedničku os x (projekcija početnog meridijana); os y biti će pravac koji je okomit na x (projekcija dirnog kruga). Koordinata ishodišta ($P_1$, $P_2$, $P_3$) pojedinih sustava jesu:

1. Kod t. zv. Sjevernog sustava $P_1 \ldots L_0 = 0°\,00'\,00'$ $\Phi_0 = 48°\,40'\,2{\cdot}000''$.

U ovom se sustavu predočuje pojas zemaljske površine, koji leži sjeverno od 47°55'0·00' sjeverne geogr. sferičke širine.

2. Kod srednjeg sustava $P_2$ . . . $L_0 = 0°00' 00''$ $\Phi_0 = 47° 6' 0·000''$; u ovom se sustavu predočuje pojas zemalj. površine, koji leži između parelelnih krugova sa sferičkim širinama 47 55' 0·00'' i 46° 22' 0·000''.

3. Kod južnog sustava $P_3$ . . . $L_0 = 0°0' 00''$ $\Phi_0 = 45° 31' 59''$; u ovom se sustavu predočuje pojas zemaljske površine, koji leži južno od 46° 22' 0·000'' sjeverne geogr. sfer, širine.

Ova nova tri sustava projekcije služe za izmjere niže geodezije ujedno pako za izjednačenje trig. točaka II. III. i IV reda dok se „stari budimpeštanski sustav" (vidi naprijed) upotrebljava za izjednačenje trigonom. mreže I. reda.

Ovim člankom, u kojem kratkoće radi nisam izveo formule u redove, kako se to u praksi čini, niti sam na široko razlagao o preciznim redukcijama dužine, azimuta i o međusobnom odnošaju pojedinih projekcijonih sistema, *) htio sam samo ukratko informirati o novim našim projekcijonim sistemima, te ujedno zainteresovati javnost za pitanje, kako ćemo urediti projekcione sisteme u novoj našoj državi. To je pitanje od velike važnosti za cijelu organizaciju izmjere, ako hoćemo, da postavimo geodetski rad u državi na moderni i jedinstveni temelj, a to nije baš sasvim jednostavno obzirom na raznolikost sistema u kojima su izvedene izmjere pojedinih dijelova države.

# Geometri kod agrarne reforme.

Zvonimir Kralj, inspektor Ministarstva za agrarnu reformu.

Kao da se egzaktnost geodezije prenosi i na njezinu primjenu kod zadovoljenja potreba materijalnoga života: teško da će moći ikoji drugi stalež iz redova onih brojnih struka, koje će kod agrarne reforme saradjivati, da tako precizno predvidi sve one zadatke, što će ih morati da riješi, kao što to može stalež geometara.

Nema potrebe, da se u stručnom listu govori o tim zadacima, ali je nužno — i to je svrha ovih redaka — da se iznese definirani pojam geometarskoga rada kod agrarne reforme i da se tako odredi položaj geodetskih organa ovoga velikoga stroja, koji će se pokrenuti.

Još nije nigdje fiksiran ni pojam ni opseg naše agrarne reforme.

---

* Fasching A. „A magyar országos háromszögelések és részletes felmerések uj vetületi rendszerei" ; Marek „Trigonometrische Operationen des Katasters" ; Láska „Vyšší geodaesie" i dr.