

GLASILO GEOMETARA

KRALJEVSTVA SRBA, HRVATA I SLOVENACA.

О равнању тријангулације у опште.

Превод из Теодезије Јенерала В. В. Билковског.

Ма како да су савршени угломерни инструментији ма како да се пажљиво њима врше посматрања, ипак ће правци (углови) макар и сведени на центре тригонометријских тачака, бити само приближени к својим истинитим величинама. У томе се можемо лако убедити ако и.п. узмемо суму углова у ма каквој геометријској фигури, која је образована правцима између тригонометријских тачака и у којој су измерени и сведени на центре сви углови; сума тих углова треба да буде равна $180^{\circ}(n-2)+\epsilon$, где n означава број страна фигуре ϵ — њен сверни експес; у самој ствари то неће бити никада и сума тих углова изаћи ће веће им мања од те теорне. Исто тако, ако тригонометријска мрежа преставља сложену комбинацију триуглова са дијагоналама, које се узајамно пресецају, све остале могу се израчунати разним и независним један од другога путовима, пролазећи кроз разне триугање; резултати израчунавања требали би теоријо да буду једни и исти што би и био случај, кад би мерења углова била апсолутно тачна, но пошто то није, то су и ти резултати у неколико различити. Све ове разлике се потпуно објашњавају случајним и неизбежним грешкама мерења.

Рачунајући са правцима (угловима) добивених из посматрања и сведених на центре, разногласице ће се, опште говорећи, добити мале (секунде и делови секунада, и делови метара у странама), на ипак помоћу њих не треба изводити коначно рачунање тријангулације, и то јво због чега: после коначног израчунавања страна тригонометријске тријангулације, приступа се к израчунавању географских координата свију тачака тригонометријске тријангулације; но за контролисање овога, довољно сложенога рачунања, узима се за правило, да координате сваке тачке треба израчунати полазећи најмање са двеју тачака, чије су координате већ израчунате; па ако би се ова израчунавања вршила само помоћу праваца добивених из посматрања (и сведених); то, у опште говорећи, за сваку тачку добиле би се координате т.ј. географске ширине и дужине различите, и рачунација би одмах почео да сумња, да ли му је разногласница у израчунавању произашла услед нетачности посматрања (углова) или је то само резултат лошег

рачунања географских координата. Т.ј. јавља се сумња у тачности властитог рачунања.

Ради објашњења реченог узмимо да се израчунава географска широта неке тачке полазећу са двеју других, и благодарећи само грешкама посматрања (углова) добивени су резултати $20^{\circ}750$ и $20^{\circ}756$, тако да ће аритметиско средње бити $20^{\circ}753$, које се може сматрати као највероватнији резултат. Али допустимо да је у другом изравнивању (онога $20^{\circ}756$) учињена мала погрешка, (н.пр. у тражењу логаритама или одговарајућих бројева) и у место $20^{\circ}746$ нађемо $20^{\circ}742$; разлика бројева $20^{\circ}750$ и $20^{\circ}742$ нешто је већа од прећашње разлике бројева $20^{\circ}750$ и $20^{\circ}756$, и рачунција, разуме се, узима средње $20^{\circ}746$. Но, разуме се, ово већ није највероватнија величина и разликује се од праве (тачно узрачунате) за $0.^{\circ}007$, која грешка свећено улази у даља рачунања, те и даље производу разногласице и сумњања.

Оваке сумње се савршено одстрањују, ако пре коначног рачунања страна триуглова, сведене правце (углове) поправимо још тако, да они задовољавају све геометријске углове који постоје у даној тригонометријској мрежи, т.ј. треба их, како се то обично каже, изравнати, да несугласица у рачунању не буде. Тада даљи рад рачунања врши се просто и једно образно и разногласице у резултату једне и исте величине, добивене разним путем (рачунања) објасниће се само нетачношћу рачуна и ничим више, но тај рачун је и контрола иотпуна.

Давно су већ нађени за довођење величина, добиверих непосредно из посматрања, у сагласност са геоиетријским условима дате тригонометријске мреже, но многи од ових најнија садржавали су у себи много чега произвољног, и разне рачунције, полазећи од једних и истих датих у датој триангулацији, долазили су до различитих резултата. Ова произвољност одстрањена је тек онда, када су чувени геометри Лежандр и Лаус применили рачун по методу најмањих квадрата за равнање триангулације, по коме се изналазе такве поправке, да њихова сума квадрата буде најмања (*minimum*) од свију оних, које би такође могле задовољити све геометријске услове. И рачунање поправка по методу најмањих квадрата, разуме се, неће нам дати поправке, којима би смо могли исправити посматране правце до апсолутне тачности, то ће их само довести до њихове најверојатније вредности, по материјалу који би смо из посматрања добили, и што је најглавније, помоћу ове методе правци су тако изравнati, да при доцнијем, како дефинитивном израчунавању страна триуглова, тако и географских координата свију тачака, несугласица за једну и исту величину не би било.

Разни видови геометријских услова тригонометријских мрежа.

У свакој сложеној мрежи тригонометријске тријагодлације могу се јавити овакви облици геометријских услова, изазивајући т. зв. условне једначине.

1. Условне једначине **фигура**. У свакој геометријској фигури у којој су углови непосредно измерени, сума унутрашњих углова треба да је равна $180^\circ(n-2)+\varepsilon$, где n означава број страна фигуре (полигона), а ε њен сверни екцес, и. пр. у триуглу сума унутрашњих углова треба да је равна $180^\circ+\varepsilon$, у четвороуглу $360^\circ+\varepsilon$ и т. д. Према томе, ако углове, добијене мерењем и сведене на центре сигнала, означимо са 1, 2, 3 . . . , то ови углови у геометријској фигури треба да задовоље једначину:

$$\underline{1+2+3+\dots - [180^\circ(n-2)+\varepsilon] = 0 \dots 1)}$$

У самој ствари ово се неће догодити готово никада, и разлика између суме измерених а сведеног углова и њене теорије вредности изаћи ће не нула, већ нека величина V , која се зове **грешка фигуре**, т. ј. изаћи ће:

$$\underline{1+2+3+\dots - [180^\circ(n-2)+\varepsilon] = V \dots 2)}$$

Задатак равнања у томе се састоји, да се нађу такве поправке (1), (2), (3) . . . углова 1, 2, 3 . . . , да би се задовољно услов 1) т. ј. да буде:

$$\underline{1+(1)+2(2)+3(3)+\dots - [180^\circ(n+2)+\varepsilon] = 0 \dots 3)}$$

одзимајућу 2) од 3) пригодно је да ћемо добити:

$$(1)+(2)+(3)+\dots + V = 0 \dots \text{I})$$

Ово и јесте општи облик **условне једначине фигуре**, у којој су (1), (2), (3) . . . тражене поправке (ијпознате величине) углова 1, 2, 3 . . . , а V грешка фигуре (познати члан), која се добија по једначини 2).

У специјалном случају за триугао, условна је једначина **фигуре**:

$$\begin{aligned} & (1)+(2)+(3)+V=0 \dots \text{II}) \\ & \underline{a \quad V=1+2+3-(180^\circ+\varepsilon)} \dots \text{4)} \end{aligned}$$

Код простог триугла не може ни бити других углова за равнање углова. Тада ће исти случај бити и код тригонометријске мреже простих триуглова у виду триугловног ланца (сл. 1). У таквом случају све рачунање равнања тријангулације и своди се на то, да се у сваком триуглу посебице нађу поправке (1), (2) и (3), које би задовољиле једино услов фигуре триугла и ништа више, и тада је постигнута главна цел, да се рачунање страна и географских координата може вршити ма којим путем, са стране на страну и с тачке на тачку, па ће се увек за једну исту страну добити једна и иста вредност, и за сваку тачку увек једне и исте вредности за њене географске координате. За нахођење поправака (1), (2) и (3) у триуглу, можемо посту-

пити простијим резоловањем на основу вероватноће, ако су у триуглу углови 1, 2 и 3 измерени са једнаком пажљивошћу, то значи, да и грешке у сва триугла треба да буду једнаке (што се потврђује и рачуном по методу најмањих квадрата. По формулама 4) можемо наћи суму грешака $V = 1 + 2 + 3 - (180^\circ + \varepsilon)$

т. ј. ако саберемо непосредно измерене углове у триуглу и наћемо разлику V између тога збира и теоријске његове вредности $(180^\circ + \varepsilon)$, и то ће очевидно бити сума грешака свију углова у триуглу, које, као што рекосмо, морају бити једнаке т. ј.

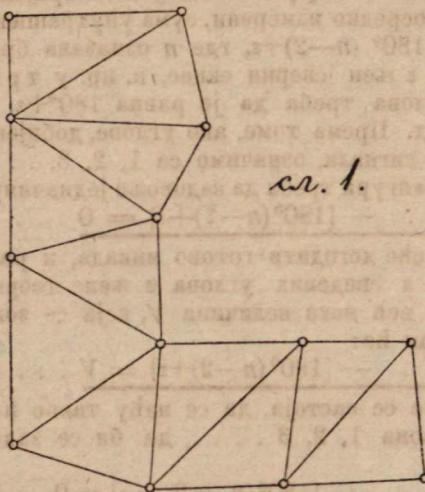
$$(1) = (2) = (3) = -\frac{V}{3} \text{ III из II}$$

То значи да би се у опште могле изравнавати грешке у триуглу или у триуглама простије ланчане тригонометријске мреже, и на тај начин задовољно једини геометријски услов фигуре

триуглова, треба просто по обрасцу 4, наћи V за сваки триугао, па суму поделити са 3 и количник са обратним знаком додати свакоме углу трнигла.

Као што се види, рад је врло прост и може се брзо извршити, на који се начин и добија знатна уштеда у времену за рачунање, тим пре, што за рачунање страна овакве тријангулације не би било потребно чак ни сверне експресе израчунати, пошто се при израчунавању страна триуглова, по формулама Лежандра, од сваког угла у триуглу има одбити по $\frac{1}{3}\varepsilon$ сверног експреса. Остало би саставити троугле из резултата добивених посматрањем и поделити са 3 цијелокупан сувишак $V + \varepsilon$ сваког триугла, па то додати са обратним знаком свакоме углу датога триугла. Тада ћемо имати посла са триуглами у којима је сума углова $= 180^\circ$, што се и тражи за рачунање страна триуглова по формулама Лежандра. Но ипак треба знати, да је израчунавање сверног експреса потребно и у овом случају, просто ради тога, да се зна, колика је права грешка V у мерењу углова свакога триугла, по чему се може судити како о тачности мерења углова, тако и о тачности целе тригонометријске мреже (независно од сверног експреса).

Ова простота и лакоћа равнања овакве ланчане тригонометријске мреже дала је повода и многим озбиљним научарима



да је употребе не само за потребе чисто тријангулазионе него и за градусна мерења.

2. Осим овога једнога услова фигуре (и јединственог у простим триуглима ланчане тригонометријске мреже), у сложеној тригонометријској мрежи може бити још т. зв. услов хоризонта (сл. 2), т. ј. сума измерених углова $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ треба да биде равна 360° , но ни то у ствари никада неће бити т. ј. неће бити:

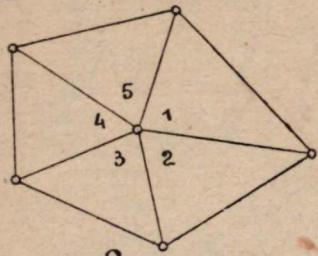
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 360^\circ = 0, \text{ него,}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 360^\circ = V$$

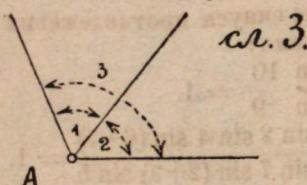
а да се задовољи услов треба изнаћи поправке (1), (2), (3) тако да,

$$1 + (1) + 2 + (2) + 3 + 3 + - 360^\circ = 0.$$

$$\text{т. ј. } (1) + (2) + (3) \dots + V = 0. \dots \text{ III.}$$



сл. 2.



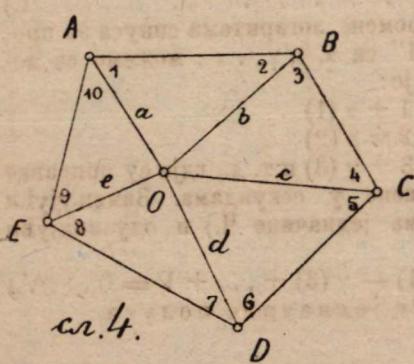
сл. 3.

3. Услови суме и разлика. Нека је на тачци A (сл. 3) сем угла 1 и 2 измерен и угао 3, који представља суму прва два. Овде је очевидно да се треба задовољити услов $1 + 2 - 3 = 0$, но због грешака у посматрању обично ће се добити $1 + 2 - 3 = V$ где је V грешка суме. Овде је задатак равнања измерених углова тај, да се нађу поправке (1), (2) и (3), које би задовољиле једначину: $1 + (1) + 2 + (2) - [3 - (3)] = 0$.

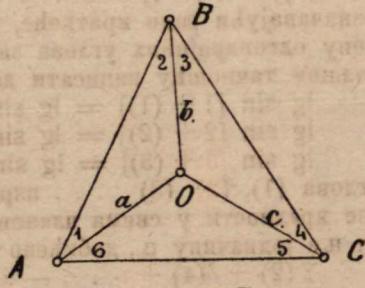
тако да је и $(1) + (2) - (3) + V = 0. \dots \dots \dots \text{ IV.}$

4. Условне једначине полуза. Ако су са неке тачке O измерени правци на сва темена ма какве затворене фигуре (полигона), таква се тачка O зове полуза фигуре, то можемо саставити цео ред односа синуса познатих углова, чији произвуд на основу геометријског својства фигуре треба да је 1. На пр. на сл. 4.

$$\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e}{b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot a} = 1 \quad \text{на (сл. 5)} \quad \frac{a \cdot b \cdot c}{b \cdot c \cdot a} = 1.$$

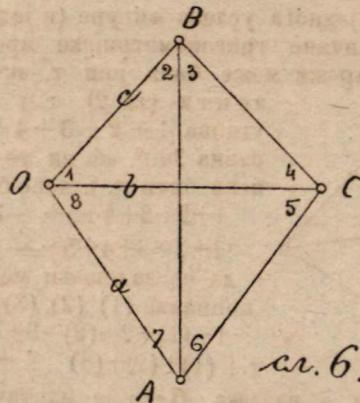


сл. 4.



сл. 5.

$$\text{на (сл. 6.)} \quad \frac{a \cdot b \cdot c}{b \cdot c \cdot a} = 1.$$



замењујући овде однос страна са односима синуса противлежећих углова (одговарајућих триуглава) добијемо:

$$\text{сл. 5. } \frac{\sin 2 \sin 4 \sin 6}{\sin 1 \sin 3 \sin 5} = 1. \quad \text{сл. 6. } \frac{\sin 2 \sin 4 \sin (6+7)}{\sin 7 \sin (2+3) \sin 5} = 1.$$

Логаритмишући ова једначиња (сл. 4.) добила би облик
 $(\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \dots) - (\lg \sin 1 + \lg \sin 3 + \dots) = 0 \text{ . р.}$)

И ова једначина била би у ствари задовољена само онда, када би углови 1, 2, 3, ... били савршено тачни, но у опште говорећи, они нису тачно измерени и после израчунавања добило би се уместо горње једначине:

($\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \dots$) - ($\lg \sin 1 + \lg \sin 3 + \dots$) = V.. q.)

задатак равнања угла тријангулације састоји се у томе да се нађу измереним угловима 1, 2, 3 ... такве поправке (1), (2), (3) да задовоље услов $p.$) т. j. да буде:

$$[\lg \sin [2 + (2)] + \lg \sin [4 + (4)] + \dots] - [\lg \sin [1 + (1)] + \lg \sin [3 + (3)] + \dots] = 0$$

Означавајући ради краткоће, промене логаритама синуса за промену одговарајућих углова за I'' са $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ можемо са до-
вољном тачношћу написати да је:

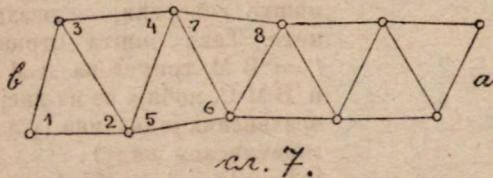
$$\lg \sin [1 + \alpha(1)] = \lg \sin 1 + \alpha(1)$$

$$\lg \sin [2 + \beta] = \lg \sin 2 + \beta$$

$\lg \sin [3 + (3)] = \lg \sin 3 + \gamma(3)$ и т. д., где су поправке угла (1), (2), (3) . . . изражене у секундама. Заменујући ове вредности у свима члановима једначине Ч.) и одузимајући од ње једначину q , добијено:

и то је општи облик условне једначине полуса.

5. Условне једначине базиса. Ако је у даној тригонометријском мрежи измерено, не само један, већ неколико базиса, то прелазећи од једнога, ипшемо све остале добити) израчунањем, прелазећи од стране на страну, којима су триугли везани један за други, при томе величина базиса, која се добија израђувањем, обично није равна резултату непосреднога мерења, и таква се разлика потпуно објашњава грешкама измерених углова којим улазе у формуле за рачунање страна којима су триугли везани један за други и грешкана мерења самих базиса. Ако су нпр. два базиса a и b везани простим ланцем триуглова (сл. 7.), то базис a мо-



жемо израчунати помоћу b по формулама:

$$\lg a = \lg b + [\lg \sin 1 + \lg \sin 3 + \dots +] - [\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \dots + p]$$

Тако добивена величина a неће бити равна величини a добивеној непосредним мерењем, и разлика сума одговарајућих логаритама синиса неће бити = разлици логаритама измерених базиса, већ ће дати неку величину V т. ј.

$$[\lg \sin 1 + \lg \sin 3 + \dots] - [\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \dots] + (\lg b - \lg a) = V \dots \quad \text{q.)}$$

У овоме случају задатак је равнању, да нађе такве поправке (1), (2), (3) . . . углова 1, 2, 3 . . . , у поправке (x) и (b) базиса a и b , да се задовољи једначина р.) т. ј. да буде:

$$\begin{aligned} & [\lg \sin [r + (')] + \lg \sin [3 + (3)] + \dots] - [\lg \sin [2 + (2)] + \lg \\ & \sin [4 + (4)] + \dots] + [\lg [b + (b)] - \lg [a + (a)]] = 0 \dots \text{q.)} \end{aligned}$$

У садање време мерење базиса изводи се са много већом тачношћу него мерење угла и у опште саставља најтачнији део геодетских радњи, због тога се обично и не траже поправке базиса (a) и (b); а разлика V у једначини q.) објашњава се само нетачношћу мерења угла 1, 2, 3 . . . Рачунајући та ко у једначини g.) поправке (a) и (b) равним 0 и поступајући као и мало час са $\lg \sin [+(1)]$, $\lg \sin [2 + (2)]$ и т. д., и одузимајући од тако изражене једначине g.) једначину q.) добијемо: $z_1(1) - \beta_1, (2) + z_2(3) - \beta_2(4) . . . + r = 0 . . . VI.$

Ово је условна једначина базиса, где су α , β , ... промене логаритама синуса одговарајућих углова, при промених углова за $1''$, а (1), (2) ... тражене поправке углова 1, 2 ...

6. Условне једначине страна. Ако се каква тачка одређује засебно од осталих, посматрањима са неколико тачака I. и II. реда (а са исте се не врше посматрања), то се такве тачке зову усамљене тачке III. реда (као што су торњеви, куле и сл.). Таква је н. пр. тачка M на сл. 8. Ако будемо имали замисаљу да већ правца (AM и BM), то израчунавање положаја тачке M из Δ

А В М не представља никакве тешкоће ни противуречја, али за то опет нећемо имати никакве контроле. Ако ли на њу буде

управљено 3 или више правца, то се добија једна или неколико општих страна, које могу бити израчунате независно из разних триуглова. Благодарећи грешкама посматрања, ове се опште стране добијају, у опште говорећи, — различите. Тако општа страна $l = BM$ триуглова AMB и BMC , добија се из двеју независних једначина (у логаритамском виду):

$$\lg l_1 = \lg a + \lg \sin 1 - \lg \sin (1+2)$$

$$\lg l_2 = \lg b + \lg \sin 4 - \lg \sin (3+3).$$

При савршено тачним посматрањима, разуме се, дужине l_1 и l_2 биле би савршено једнаке, па према томе одузимајући једну од друге добили бисмо:

$$\lg \sin 1 - \lg \sin (1+2) - \lg \sin 4 + \lg \sin (3+4) + \lg a - \lg b = 0 \quad \dots \quad p.)$$

У самој ствари ово ће изјаки не $= 0$, него:

$$\lg \sin 1 - \lg \sin (1+2) - \lg \sin 4 + \lg \sin (3+4) + \lg a - \lg b = r \quad \dots \quad q.)$$

И задатак равнања би се овде састојао у томе, да се нађу такве поправке (1), (2), (3), ... углова 1, 2, 3 ..., да се задовољи једначина р.) т. ј. да буде:

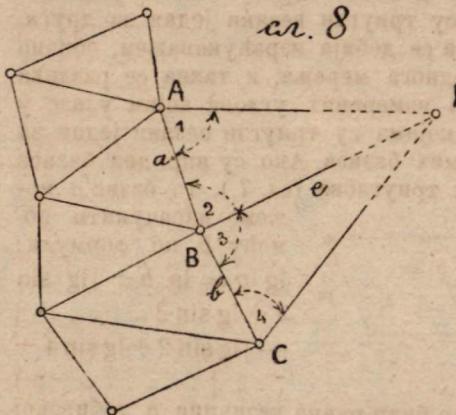
$$\begin{aligned} & \lg \sin [1+(1)] - \lg \sin [1+2+(1)+(2)] - \lg \sin [4+(4)] + \\ & + \lg \sin [3+4+(3)+(4)] + \lg a - \lg b = 0 \quad \dots \quad r.) \end{aligned}$$

одузимајући q.) од r.) добићемо као мало пре:

$$\alpha + (1) - \beta [(1)+(2)] - \delta (4) + \gamma [(3)+(4)] + V = 0 \quad VII.)$$

где су α , β , γ и δ промене логаритама синуса углова 1, 1+2, 3+4 и 4, при промени њиховој за $1''$; (1), (2), (3) и (4), — тражене поправке углова а V грешка стране.

Сви облици ових изређаних условних једначина, могу се поделити на две групе, према својим коефицијентима код непознатих величина: у једначинама фигура, хоризонта, суме и разлика, ови су коефицијенти увек равни јединици, међутим у једначинама синуса, базиса и страна они (коефицијенти) представљају промене логаритама синуса при промени одговарајућих углова за $1''$. Једначине прве групе називају се у опште једначине углова, а друге једначине синусне. Разуме



sl. 8

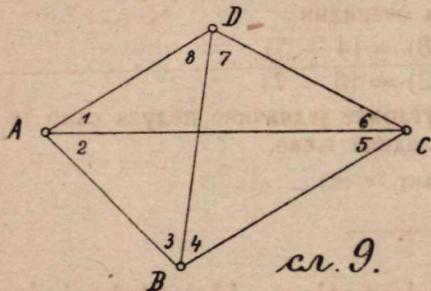
се да је решавање једначина прве групе знатно простије од решавања једначина друге групе.

Осим овде изложених облика условних једначина, у сложеним великим тригонометријским тријангулацијама при заклањању фигура (полигона) засебним или непрекидним ланцима триуглова, јављају се још т. зв. условне једначине полигона, чији је општи облик још сложенији од синуса тих једначина. Али попшто се равнање полигона врши обично после израчунавања географских координата, то о томе за сада овде неће бити речи.

Број условних једначина.

За сваку се тригонометријску мрежу може саставити много условних једначина, али пажљиво испитивање њихово показаће, да оне све нису независне једна од друге, т. ј. ако задовољимо једне друге се саме задовољавају, као последица задовољења првих условних једначина. Због тога је потребно, да се још до састављања условних једначина, одреди број условних једначина свију облика. Ако то не буде учињено, може се учинити грешка и да се или неки од услова са свим и не узме, или да се други узме два или више пута што се, разумљивљиво је, не жели, јер се услов, који није узет неће испунити (задовољити) а онај који је уведен два или више пута, довешће к решењу $\%$ т. ј. неодређености и тада цео рачунски рад пропада узалуд.

Да би смо ово објаснили узмимо прост случај четвороугла са дијагоналама (сл. 9.) ABCD, у коме су измерени свих 8



некесе ових фигура са $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ и ε_5 , имаћемо ове услове фигура

$$\begin{array}{ll} I & 2+3+4+5-(180^\circ+\varepsilon_1)=0 \\ II & 1+6+7+8-(180^\circ+\varepsilon_2)=0 \\ III & 1+2+3+8-(180^\circ+\varepsilon_3)=0 \\ IV & 4+5+6+7-(180^\circ+\varepsilon_4)=0 \\ V & 1+2+3+4+5+6+7+8-(180^\circ+\varepsilon_5)=0 \end{array}$$

Како су сверни екцеси пропорционални површинама одговарајућих фигура, то су и ових пет сверних екцеса, које расматрамо, везани међу собом овим двема једначинама:

у тајвом четвороуглу постоје само условне једначине фигуре и полуса. Лако је увидети, да се угловне једначине фигура могу добити, како из разматрања четири триугла ABC, ADC, ABD и BCD, тако и из разматрања целога четвороугла ABCD. Ако означимо свер-

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \varepsilon_5$$

Збор тога (што је лако контролисати простим сабирањем), суме првих једначина идентична је са сумом треће и четврте и још посебице, обе ове суме идентичне су са петом једначином.

На тај начин, из пет углавних једначина фигура само су три независне, док су остале две последица првих трију.

За састављање једначине полуса у четвороуглу, који расматрамо, могли би смо узети за полуе ма који од његових темена A, B, C или D и добити ове четири условне једначине:

$$\text{VI. } \frac{\sin 5 \sin (7+8) \sin 3}{\sin (5+4) \sin 6 \sin 8} = 1.$$

$$\text{VII. } \frac{\sin 7 \sin (1+2) \sin 5}{\sin (5+6) \sin 8 \sin 2} = 1.$$

$$\text{VIII. } \frac{\sin 1 \sin (3+4) \sin 7}{\sin (7-8) \sin 2 \sin 4} = 1.$$

$$\text{IX. } \frac{\sin 3 \sin (5+6) \sin 1}{\sin (1+2) \sin 4 \sin 6} = 1.$$

Али све те једначине нису независне једна према другој. Пре свега непосредно се види, да је производ из прве треће раван производу из друге и четврте, тако да је:

$$\text{VI} \cdot \text{VIII} = \text{VII} \cdot \text{IX}$$

Осим тога, међу синусима угла овога четвороугла постоје два односа, који су из цртежа очевидни:

$$\sin (1+8) = (4+5)$$

$$\sin (2+3) = (6-7)$$

На тај начин из четири углавне једначине полуса само је една независна, остале су последице њене.

(Наставит ће се.)

O mjerničkoj očevladnosti u Hrvatskoj i Slavoniji.

Kako se uređenje naše nove države sve više širi i u pojedinim privrednim granama našeg ekonomskog života, postaje i pitanje uređenja mjerničke očevladnosti u Hrvatskoj i Slavoniji, — o promjenama nastalim nakon sastava nove katastarske mape sve više aktuelno u svrhu, da se evidencija katastarskih mapa u sklad dovede sa ostalim pokrajima bivše austro ugarske monarhije, te poglavito u svrhu, da se poluci sklad između katasterske i grunтовне mape i time identi-