ГОДИНА II. МАЈ, ЈУНИ и ЈУЛИ 1920. БР. 3. и 4.

ГЛАСИЛО ГЕОМЕТАРА

КРАЉЕВСТВА СРБА, ХРВАТА И СЛОВЕНАЦА.

О равнању тријангулације у опште.*

Превод из Геодезије ђенерала В. В. Витковског.

Ст. Бошковић.

Ма како да су савршени угломерни инструменти, ма како да се пажљиво њима врше посматрања, ипак ће правци (углови), макар и сведени на центре тригонометријских тачака, бити само приближни својим истинитим величинама. О томе се можемо лако убедити ако н. п. узмемо суму углова у ма каквој геометријској фигури, која је образована правцима између тригонометријских тачака и у којој су измерени и сведени на центре сви углови; сума тих углова треба да буде равна $180^0(n-2)+\varepsilon$, где *n* означава број страна фигуре, ε — њен сверни ексцес; у самој ствари то неће бити никада и сума тих углова изаћи ће већа или мања од те теорие. Исто тако, ако тригонометријска мрежа преставља сложену комбинацију троуглова са диагоналама, које се изајамно пресецају, све оне могу се израчунати разним и независним један од другога путовима, пролазећи кроз разне триугле; резултати израчунавања требали би теорно да буду једни и исти што би и био случај, кад би мерења углова била апсолутно тачна, но пошто то није, то су и ти резултати у неколико различити. Све ове разлике се потпуно објашњавају случајним и неизбежним грешкама мерења.

Рачунајући са правцима (угловима) добивеним из посматрања и сведеним на центре, разногласице ће, опште говорећи, бити мале (секунде и делови секунада, и делови метара у странама), па ипак помоћу њих не треба изводити коначно рачунање тријангулације, и то ево због чега: после коначног израчунавања страна тригонометријске тријангулације, приступа се к израчунавању географских координата свију тачака тригонометријске тријангулације; но за контролисање овога, довољно сложенога рачунања, узима се за правило, да координате сваке тачке треба израчунати полазећи најмање са двеју тачака, чије су координате већ израчунате; па ако би се ова израчунања вршила само помоћу праваца добивених из посматрања (и сведених), то, у опште говорећи, за сваку тачку добиле би се координате т. ј. геодографске ширине и дужине различите, и рачунција би одмах почео да

* Ради тискарских погрешака, које су учињене у бр. 1. и 2. донаша се један дио поновно.

сумља, да ли му је разногласница у израчунавању произашла услед нетачности посматрања (углова) или је то само резултат лошег рачунања географских координата. Т. ј. јавља се сумња у тачности властитог рачунања.

Ради објашњења реченог узмимо да се израчунава географска ширина неке тачке полазећи са двеју других, и благодарећи само грешкама посматрања (углова) добивени су резултати 20·"750 и 20·"756, тако да ће аритметијско средње бити 20·"753, које се може сматрати као највероватнији резултат. Али допустимо да је у другом изравнавању (онога 20·"756) учињена мала погрешка (и. пр. у тражењу логаритама или одговарајућих бројева) и у место 20·"756 нађемо 20·"742; разлика бројева 20·"750 и 20·"742 нешто је већа од пређашње разлике бројева 20·"750 и 20·"756, и рачунција, разуме се, узима средње 20."746. Но, разуме се, ово већ није највероватнија величина и разликује се од праве (тачно узрачунате) за 0·"007, која грешка свецело улази у даља рачунања, те и даље производи разногласице и сумњања.

Овакве сумље се савршено одстрањују, ако пре коначног рачунања страна триуглова, сведене правце (углове) поправимо још тако, да они задовољавају све геометријске услове који постоје у даној тригонометријској мрежи, т. ј. треба их, како се то обично каже, изравнати, да несугласица у рачунању не буде. Тада даљи рад рачунања врши се просто и једно образно и разногласице у резултату једне и исте величине, добивене разним путем (рачунања) објасниће се само нетачношћу рачуна и ничим више, на тај начин је и контрола потпуна.

Давно су већ нађени начини за довођење величина, добивених непосредно из посматрања, у сагласност са геометријским условима дате тригонометријске мреже, но многи од ових начина садржавали су у себи много чега произвољног, и разне рачунције, полазећи од једних и истих у датој триангулацији, долазили су до различитих резултата. Ова пвоизвољност одстрањења је тек онда, када су чувени геометри Лежандр и Гаус применили рачун по методи најмањих квадрата за равнање тријангулације, по коме се изналазе такве поправке, да њихова сума квадрата буде најмања (minimum) од свију оних, које би такође могле задовољити све геометријске услове. И рачунање поправка по методу најмањих квадрата, разуме се, неће нам дати поправке, којима бисмо могли исправити посматране правце до апсолутне тачности, но ће их само довести до њихове најверојатније вредности, по материјалу који бисмо из посматрања добили, и што је најглавније, помоћу ове методе правци су тако изравнати, да при доцнијем, како дефинитивном израчунању страна триуглова, тако и географских координата свију тачака, несугласица за једну и исту величину не би било.

Разни облици геометријских услова тригонометријских мрежа.

У свакој сложеној мрежи тригонометријске тријангулације могу се јавити овакви облици геометријских услова, изазивајући т. зв. условне једначине:

1. Условне једначине фигура. У свакој геометријској фигури у којој су углови непосредио измерени, сума унутрашњих углова треба да је равна $180_0 (n-2)+\varepsilon$, где n означава број страна фигуре (полигона), а ε њен сверни екцес. Н. пр. у триуглу сума унутрашњих углова треба да је равна $180^0+\varepsilon$, у четвороуглу $360^0+\varepsilon$ и т. д. Према томе, ако углове, добијене мерењем и сведене на центре сигнала, означимо са 1, 2, 3. . . . то ови углови у геометријској фигури треба да задовоље једначину

$$\underline{1+2+3+\ .\ .\ .\ .\ .\ -\ [180^0(n-2)+\varepsilon]=0}\ .\ .\ .\ 1)$$

У самој ствари ово се неће догодити готово никада, и разлика између суме измерених а сведених углова и њене теорне вредности изаћи ће не нула, већ нека величина V, која се зове грешка фигуре, т. ј. изаћи ће:

$$\underline{1+2+3+\ .\ .\ .\ .\ .\ -\ [180^0(n-2)+\varepsilon]=V}\ .\ .\ .\ 2)$$

Задатак равнања у томе се састоји, да се нађу такве поправке (1), (2), (3) . . . . углова 1, 2, 3 . . . ., да би се задовољио услов 1) т. ј. да буде:

$$\underline{1+(1)+2+(2)+3+(3)+\ .\ .\ .\ -\ [180^0(n+2)+\varepsilon]=0}\ .\ .\ 3)$$

одузимајући 2) од 3) природно је да ћемо добити:

$$\underline{(1)+(2)+(3)+\ .\ .\ +\ V=0}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ I)$$

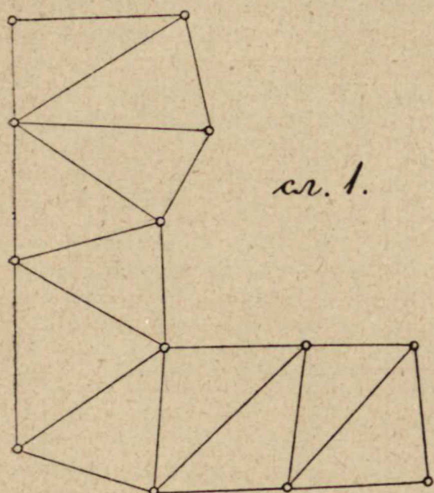
Ово и јесте општи облик условне једначине фигуре, у којој су (1), (2), (3) . . . . тражене поправке (непознате величине) углова 1, 2, 3 . . . ., а V грешка фигуре (познати члан), која се добија по једначини 2).

У специјалном случају за триугао, условна је једначина фигуре:

$$\underline{(1)+(2)+(3)+V=0}\ \ .\ .\ .\ .\ .\ II)$$

$$\text{а}\ \ \underline{V=1+2+3-(180^0+\varepsilon)}\ \ .\ .\ .\ .\ .\ 4)$$

Код простог триугла не може ни бити других услова за равнање углова. Тај ће исти случај бити и код тригонометријске мреже простих триуглова у виду триугловног ланца (сл. 1). У таквом случају све рачунање равнања тријангулације своди се на то, да се у сваком троуглу посебице нађу поправке (1), (2) и (3), које би задовољиле једино услов фигуре триугла и ништа више, и тада је постигнута главна цел, да се рачунање страна и географских координата може вршити ма којим путем, са стране на страну из тачке на тачку, па ће се увек за једну исту страну добити једна и иста вредност, а за сваку тачку увек једне и исте вредности за њене географске координате. За нахођење поправака (1), (2) и (3) у триуглу, можемо поступити простим резоновањем на основу вероватноће; ако су у триуглу углови 1, 2 и 3 измерени са једнаком пажљивошћу, то значи, да и грешке у сва три угла треба да буду једнаке (што се потврђује и рачуном по методу најмањих квадрата. По формули 4) можемо наћи суму грешака $V = 1 + 2 + 3 - (180^0 + \varepsilon)$ то јест, ако саберемо непосредно углове у триуглу и нађемо разлику V између тога збира и теоријске његове вредности ($180 + \varepsilon$), то ће очевидно бити сума грешака свију углова у триуглу, које, као што рекосмо, морају бити једнаке т. ј.



сл. 1.

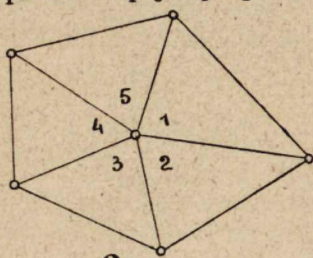
$$(1) = (2) = (3) = -\frac{V}{3} \text{ III из II}$$

То значи да би се у опште могле изравнати грешке у триуглу или у триуглима просте ланчане тригонометријске мреже, и на тај начин задовољио једини геометријски услов фигуре триуглова, треба просто по обрасцу 4., наћи V за сваки триугао, па суму поделити са 3 и количник са обратним знаком додати свакоме углу триугла.

Као што се види, рад је врло прост и може се брзо извршити, на који се начин и добија знатна уштеда у времену за рачунање, тим пре, што за рачунање страна овакве тријангулације не би било потребно чак ни сферне ексцесе израчунавати, пошто се при израчунавању страна триуглова, по формули Лежандра, од сваког угла у триуглу има одбити по $^1/_3\ \varepsilon$ сферног ексцеса. Остало би саставити троугле из резултата добивених посматрањем и поделити са 3 цијелокупан сувишак $V + \varepsilon$ сваког триугла, па то додати са обратним знаком свакоме углу датога триугла. Тада ћемо имати посла са триуглима у којима је сума углова $= 180^0$, што се и тражи за рачунање страна триуглова по формули Лежандра. Но ипак треба знати, да је израчунавање сферног ексцеса потребно и у овом случају, просто ради тога, да се зна, колика је права грешка V у мерењу углова свакога триугла, по чему се може судити како о тачности мерењи углова, тако и о тачности целе тригонометријске мреже (независно од сферног ексцеса).

Ова простота и лакоћа равнања овакве ланчане тригонометријске мреже дала је повода и многим озбиљним научарима да је употребе не само за потребе чисто тријангулационе него и за градусна мерења.

2. Осим овога једнога услова фигуре (и јединственог у простим троуглима ланчане тригонометријске мреже), у сложеној тригонометријској мрежи може бити још т. зв. услов хоризонта (сл. 2), т. ј. сума измерених углова $1+2+3+4+5$ треба да буде равна 360^0, но ни то у ствари никада неће бити т. ј. неће бити:



сл. 2.

$$1+2+3+4+5-360^0=0,\ \text{него},$$

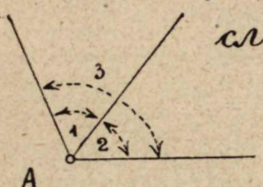
$$1+2+3+4+5-360^0=V$$

а да се задовољи услов треба изнаћи поправке (1), (2), (3) тако да,

$$1+(1)+2+(2)+3+(3)+\ldots-360^0=0$$

т. ј. $(1)+(2)+(3)+\ldots+V=0\ldots$ III.

3. Услови сума и разлика. Нека је на тачци A (сл. 3) сем. угла 1 и 2 измерен и угао 3, који) преставља суму прва два. Овде је очевидно да се треба задовољити услов $1+2-3=0$, но због грешака у посматрању обично ће се добити $1+2-3=V$ где је V грешка суме. Овде је задатак равнања измерених углова тај, да се нађу поправке (1), (2) и (3), које би задовољиле једначину: $1+(1)+2+(2)-[3+(3)]=0.$

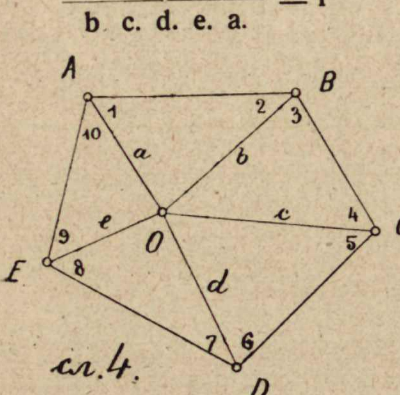


сл. 3.

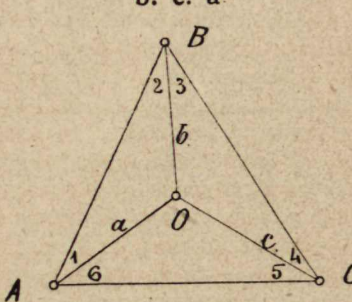
тако да је и $(1)+(2)-(3)+V=0.$ . . . . IV.

4. Условне једначине полуса. Ако су са неке тачке О измерени правци на сва темена ма какве затворене фигуре (полигона), таква се тачка O зове полус фигуре, то можемо саставити цео ред односа синуса познатих углова, чији производ на основу геометријског својства фигуре треба да је 1. На пр. на сл. 4.

$$\frac{a.\ b.\ c.\ d.\ e.}{b\ c.\ d.\ e.\ a.}=1 \qquad \text{на (сл. 5.)} \qquad \frac{a.\ b.\ c.}{b.\ c.\ a}=1.$$

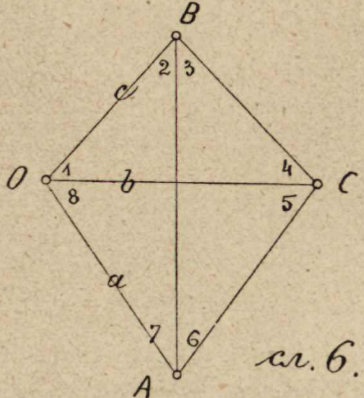


сл. 4.



сл. 5.

па (сл. 6.) $\frac{a.\ b.\ c.}{b.\ c.\ a.} = 1.$



сл. 6.

замењујући овде однос страна са односима синуса противлежећих углова (одговарајућих триуглова) добићемо:

код сл. 4. $\frac{\sin 2 \sin 4 \sin 6 \sin 8 \sin 10}{\sin 1 \sin 3 \sin 5 \sin 7 \sin 9} = 1.$

сл. 5. $\frac{\sin 2 \sin 4 \sin 6}{\sin 1 \sin 3 \sin 5} = 1.$ сл. 6. $\frac{\sin 2 \sin 4 \sin (6+7)}{\sin 7 \sin (2+3) \sin 5} = 1.$

Логаритмишући ова једначина (сл. 4.) добила би облик

$(\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \ldots) - (\lg \sin 1 + \lg \sin 3 + \ldots) = 0 \ldots$ p.)

И ова једначина била би у ствари задовољена само онда, када би углови 1, 2, 3 ... били савршено тачни, но у опште говорећи, они нису тачно измерени и после израчунавања добило би се у место горње једначине:

$(\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \ldots) - (\lg \sin 1 + \lg \sin 3 + \ldots) = V \ldots$ q.)

задатак равнања углова тријангулације састоји се у томе да се нађу измереним угловима 1, 2, 3 ... такве поправке (1), (2), (3) да задовоље услов *p*.) т. ј. да буде:

$[\lg \sin [2 + (2)] + \lg \sin [4 + (4)] + \ldots] - [\lg \sin [1 + (1)] +$
$[\lg \sin [3 + (3)] + \ldots\ldots] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots$ r)

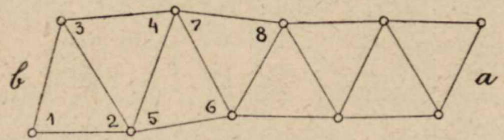
Означавајући ради краткоће, промене логаритама синуса за промену одговарајућих углова за 1″ са α, β, γ. ... можемо са довољном тачношћу написати да је:

$\lg \sin [1 + (1)] = \lg \sin 1 + \alpha\,(1)$
$\lg \sin [2 + (2)] = \lg \sin 2 + \beta\,(2)$
$\lg \sin [3 + (3)] = \lg \sin 3 + \gamma\,(3)$ и т. д., гђе су поправке углова (1), (2), (3) .... изражене у секундама. Замењујући ове вредности у свима члановима једначине r) и одузимајући од ње једначину q., добићемо:

$\beta\,(2) + \delta\,(4) + \ldots. - \alpha\,(1) - \gamma\,(3) + \ldots + V = 0 \ldots$ V.)

и то је општи облик условне једначине полуса.

5. **Условне једначине базиса.** Ако је у даној тригонометријској мрежи измерено, не само један, већ неколико базиса, то полазећи од једнога, можемо све остале добити израчунањем, прелазећи од стране на страну, којима су триугли везани један за други, при томе величина базиса, која се добија израчунавањем, обично није равна резултату непосреднога мерења, и таква се разлика потпуно објашњава грешкама измерених углова, који улазе у формуле за рачунање страна, којима су триугли везани један за други и грешкама мерења самих базиса. Ако су нпр. два базиса a и b везани простим ланцем триуглова (сл. 7.), то базис a можемо израчунати помоћу b по формули:



сл. 7.

$\lg a = \lg b + [\lg \sin 1 + \lg \sin 3 \; . \; . \; . \; . +] - [\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \; . \; . \; . \;] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{p})$

Тако добивена величина a неће бити равна величини a добивеној непосредним мерењем, и разлика сума одговарајућих логаритама синуса неће бити = разлици логаритама измерених базиса, већ ће дати неку величину V т. ј.

$$[\lg \sin 1 + \lg \sin 3 + \; . \; . \; . \; . \;] - [\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \; . \; . \; . \;] + (\lg b - \lg a) = V \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; q.$$

У овоме случају задатак је равнању, да нађе такве поправке (1), (2), (3) . . . углова 1, 2, 3 . . , и поправке (a) и (b) базиса a и b, да се задовољи једначина p.) т. ј. да буде:

$$[\lg \sin [1 + (1)] + \lg \sin [3 + (3)] + \ldots] - [\lg \sin [2 + (2)] + \lg \sin [4 + (4)] + \; . \; . \; . \;] + [\lg [b + (b)] - \lg [a + (a)]] = 0 \; . \; . \; . \; . \; \text{ч.})$$

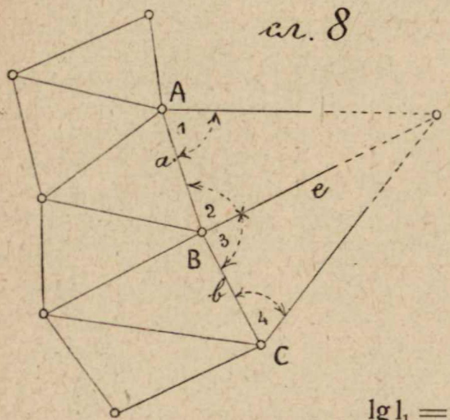
У садање време мерење базиса изводи се са много већом тачношћу него мерење углова и у опште састаља најтачнији део геодетских радњи, због тога се обично и не траже поправке базиса (a) и (b); а разлика V у једначини q.) објашњава се само нетачношћу мерења углова 1, 2, 3 . . . Рачунајући тако у једначини r.) поправке (a) и (b) равним 0 и поступајући као и мало час са lg sin [1+(1)], lg sin [2 + (2)] и т. д., и одузимајући од тако изражене једначине ч.) једначину q.) добићемо :

$$\alpha_1 \; (1) - \beta_1 \; (2) + \alpha_2 \; (3) - \beta_2 \; (4) + \; . \; . \; . \; . + r = 0 \; . \; . \; . \; . \; VI.$$

Ово је у с л о в н а ј е д н а ч и н а б а з и с а, где су α, β, . . . промене логаритама синуса одговарајућих углова, при промени тих углова за 1'', а (1), (2) . . . тражене поправке углова 1, 2 . . .

6. **Условне једначине страна.** Ако се каква тачка одређује засебно од осталих, посматрањима са неколико тачака I. и II. реда (а са исте се не врше посматрања), то се такве тачке зову у с а м љ е н е т а ч к е III. р е д а (као што су торњеви, куле и сл.) Таква је н. пр. тачка M на сл. 8. Ако будемо имали само два правца (AM и BM), то израчунавање положаја тачке M из $\triangle$

А В М не преставља никакве тешкоће ни противуречја, али за то опет нећемо имати никакве контроле. Ако ли на њу буде



управљено 3 или више праваца, то се добија једна или неколико општих страна, које могу бити израчунате независно из разних триуглова. Благодарећи грешкама посматрања, ове се опште стране добијају, у опште говорећи, — различито. Тако општа страна $l = BM$ триуглова А М В и В М С, добија се из двеју независних једначина (у логаритамском виду):

$$\lg l_1 = \lg a + \lg \sin 1 - \lg \sin (1+2)$$

$$\lg l_2 = \lg b + \lg \sin 4 - \lg \sin (3+4).$$

При савршено тачним посматрањима, разуме се, дужине l_1 и l_2 биле би савршено једнаке, па према томе одузимајући једну од друге добили бисмо:

$$\lg \sin 1 - \lg \sin (1+2) - \lg \sin 4 + \lg \sin (3+4) + \lg a - \lg b = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; p.)$$

У самој ствари ово ће изаћи не $= 0$, него:

$$\lg \sin 1 - \lg \sin (1+2) - \lg \sin 4 + \lg \sin (3+4) + \lg a - \lg b = r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; q.)$$

И задатак равнања би се овде састојао у томе, да се нађу такве поправке (1), (2), (3), ... углова 1, 2, 3 . . . . , да се задовољи једначина p.) т. ј. да буде:

$$\lg \sin [1+(1)] - \lg \sin [1+2+(1)+(2)] - \lg \sin [4+(4)] + \\ + \lg \sin [3+4+(3)+(4)] + \lg a - \lg b = 0 \; . \; . \; . \; r.)$$

одузимајући q.) од r.) добићемо као мало пре:

$$\alpha\,(1) - \beta\,[(1)+(2)] - \delta\,(4) + \gamma\,[(3)+(4)] + V = 0 \quad \text{VII.)}$$

где су α, β, γ и δ промене логаритама синуса углова 1, 1 + 2, 3 + 4 и 4, при промени њиховој за 1"; (1), (2), (3) и (4), — тражене поправке углова а V грешка стране.

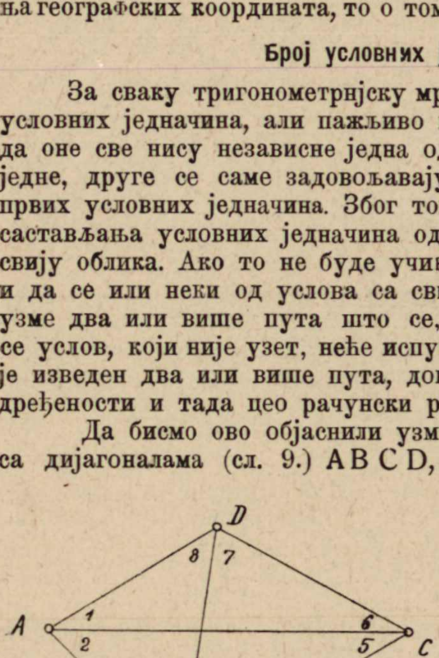
Сви облици ових изређаних условних једначина, могу се поделити на две групе, према својим коефицијентима код непознатих величина: у једначинама фигура, хоризонта, сума и разлика, ови су коефицијенти увек равни јединици, међутим у једначинама синуса, базиса и страна ови (коефицијенти) престављају промене логаритама синуса при промени одговарајућих углова за 1". Једначине прве групе називају се у опште једначине углова, а друге једначине синусне. Разумије се да је решавање једначина прве групе знатно простије од решавања једначина друге групе.

Осим овде изложених облика условних једначина, у сложеним великим тригонометријским тријангулацијама при заклапању фигура (полигона) засебним али непрекидним ланцима триуглова, јављају се још т. зв. **условне једначине полигона**, чији је општи облик још сложенији од синуса тих једначина. Али пошто се равнање полигона врши обично после израчунавања географских координата, то о томе за сада овде неће бити речи.

Број условних једначина.

За сваку тригонометрнјску мрежу може се саставити много условних једначина, али пажљиво испитивање њихово показаће, да оне све нису независне једна од друге, т. ј. ако задовољимо једне, друге се саме задовољавају, као последица задовољења првих условних једначина. Због тога је потребно, да се још до састављања условних једначина одреди број условних једначина свију облика. Ако то не буде учињено, може се учинити грешка и да се или неки од услова са свим и не узме, или да се други узме два или више пута што се, разумљиво је, не жели, јер се услов, који није узет, неће испунити (задовољити), а онај који је изведен два или више пута, довешће к решењу $^0/_0$ т. ј. неодређености и тада цео рачунски рад пропада узалуд.

Да бисмо ово објаснили узмимо прост случај четвероугао са дијагоналама (сл. 9.) A B C D, у коме су измерени свих 8 углова, који су означени цифрама од 1 до 8. У таквом четвероуглу постоје само условне једначине фигуре и полуса. Лако је увидети, да се условне једначине фигура могу добити лако из разматрања четири триугла A B C, A D C, A B D и B C D, тако и из разматрања целога четвероугла A B C D. Ако означимо сферне ексцесе ових фигура са ε_1, ε_2, $_3$, ε_4 и $\varepsilon_5\varepsilon$, имаћемо ове услове фигура



сл. 9.

I	$2+3+4+5-(180^0+\varepsilon_1)=0$
II	$1+6+7+8-(180^0+\varepsilon_2)=0$
III	$1+2+3+8-(180^0+\varepsilon_3)=0$
IV	$4+5+6+7-(180^0+\varepsilon_4)=0$
V	$1+2+3+4+5+6+7+8-(180^0+\varepsilon_5)=0$

Како су сферни ексцеси пропорцијонални површинама одговарајућих фигура, то су и ових пет сферних ексцеса, које разматрамо, везани међу собом овим двема једначинама:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \varepsilon_5$$

Збор тога (што је лако контролисати простим сабирањем), сума првих једначина идентична је са сумом треће и четврте и још посебице, обе ове суме идентичне су са петом једначином.

На тај начин, из пет условних једначина фигура само су три независне, док су остале две последица првих трију.

За састављање једначине полуса у четвороуглу, који разматрамо, могли бисмо узети за полус ма који од његових темена A, B, C или D и добити ове четири условне једначине:

$$\text{VI.}\quad \frac{\sin 5 \ \sin (7+8) \ \sin 3}{\sin (5+4) \ \sin 6 \ \sin 8} = 1.$$

$$\text{VII.}\quad \frac{\sin 7 \ \sin (1+2) \ \sin 5}{\sin (5+6) \ \sin 8 \ \sin 2} = 1.$$

$$\text{VIII.}\quad \frac{\sin 1 \ \sin (3+4) \ \sin 7}{\sin (7+8) \ \sin 2 \ \sin 4} = 1.$$

$$\text{IX.}\quad \frac{\sin 3 \ \sin (5+6) \ \sin 1}{\sin (1+2) \ \sin 4 \ \sin 6} = 1.$$

Али све те једначине нису независне једна према другој. Пре свега непосредно се види, да је производ из прве и треће раван производу из друге и четврте, тако да је:

$$\text{VI} \cdot \text{VIII} = \text{VII} \cdot \text{IX}$$

Осим тога, међу синусима углова овога четвороугла постоје два односа, који су из цртежа очевидни:

$$\sin (1 + 8) = (4 + 5)$$
$$\sin (2 + 3) = (6 \quad 7)$$

На тај начин из четири условне једначине полуса само је једна независна, остале су последице њене.

И тако, за овај конкретни случај четвороугла, можемо саставити свега четири независне условне једначине: три једначине фигура и једну једначину полуса. Које пак једначине баш треба узети (од пет једначина фигура и четири једначине полуса) за рачунање поправака углова, — објасниће се даље (види избор условних једначина).

При одређивању броја независних условних једначина у сложеној тригонометријској мрежи, немогуће је руководити се напред изложеним конкретним резоновањем, већ је за то потребно имати општа правила. Узмимо за разматрање прво мрежу са једним базисом (или са свим без базиса) и без усамљених (побочних) тачака. Нека се она састоји из P тачака, на којима је посматрано D праваца; нека у њој буде C једноставних и L свију линија (једноставних и неједноставних*). Очевидно је

---

* Једноставним линијама зовемо оне линије (визуре), које су добивене посматрањем са обадве стране; неједноставним оне, које су добивене посматрањем само са једне стране.

да ће бити $D = C + L$. — Бројеви P, D, l и L одређују се простим бројањем са цртежа.

Пошто на свакој тачци имамо по један **почетни правац**, који сâм по себи не даје никаква дата за рачунање (угао састављају најмање два правца из једне тачке), то у мрежи од P тачака, треба да постоји пре свега P почетних праваца. — Од броја тачака **две прве** (нпр. крајеви базиса или основне стране) стоје произвољно за рачунање равнања триангулације, триангулација се, — у смислу одређивања тачака, — започиње тек са треће. Према томе, триангулацијом треба да је одређено $P-2$ тачака, а за одређивање сваке од њих потребно је и довољно имати два правца (разуме се са других двеју тачака). На тај начин за одређивање свију тачака триангулације неопходно је и довољно имати $P + 2\ (P-2)$ или $3\ P-4$ правца. У таквој триангулацији све тачке могу бити израчунате само једанпут, без икакве несугласности, али у исто време и без икакве контроле, т. ј. у њој неће бити ни једне условне једначине. Али сваки излишни правац преко неопходно потребних $3\ P-4$, даје једну условну једначину, за то што ће сваки такав правац (визура) бити управљен на тачку, која је већ и без тога одређена. — На тај начин **број свију условних једначина** (N) раван је броју D праваца, који се у мрежи налазе, смањеном за број неопходних ($3\ P-4$) праваца, т. ј. број свију условних једначина одређује се по формули:

$$N = D - 3\ P + 4 \qquad a)$$

Међу овим условним једначинама биће и једначина фигура и једначина полуса. Условне једначине фигура добијају се из разматрања само једноставних линија, јер нејдноставне не дају затворене фигуре. За везу P тачака неопходно је потребно бар $P-1$ једноставних линија, при чему те линије не дају још ни једну условну једначину. На тај начин **број условних једначина фигура** (A) раван је броју свију једноставних линија C у даној мрежи, умањеном бројем неопходно потребних $P-1$ линија, т. ј. број условних једначина фигура одређује се по формули:

$$A = C - P + 1.$$

Условне једначине полуса добијају се како од једноставних, тако и од нејдноставних линија. У тригонометријској мрежи од P тачака треба да постоје насигурно: једна линија, која везује две прве тачке (базис или основна страна), и то две линије за одређење сваке следеће тачке, према чему треба да буде свега и бар $1+2\ (P-2)$ или $2\ P-3$ линија. Свака друга линија, преко овога неопходно потребнога броја, даће једну условну једначину полуса, због тога што ће бити управљена на тачку, која је већ и без ње одређена. На тај начин **број условних једначина полуса** (B) раван је броју свих линија L, које постоје у мрежи, смањеном за број неопходно потребних 2P—3 линија, т. ј. број условних једначина полуса одређује се формулом:

$$B = L - 2P + 3. \qquad c)$$

Као контрола за број условних једначина може служити овај очевидни однoшај:

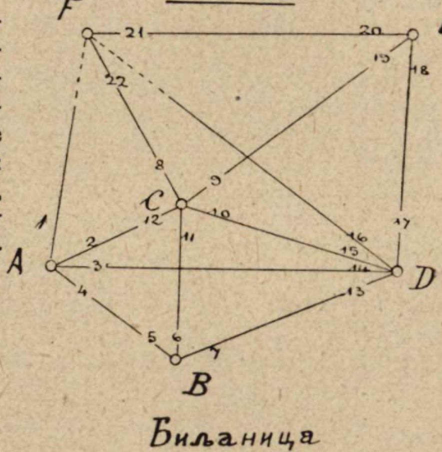
$$N = A + B$$

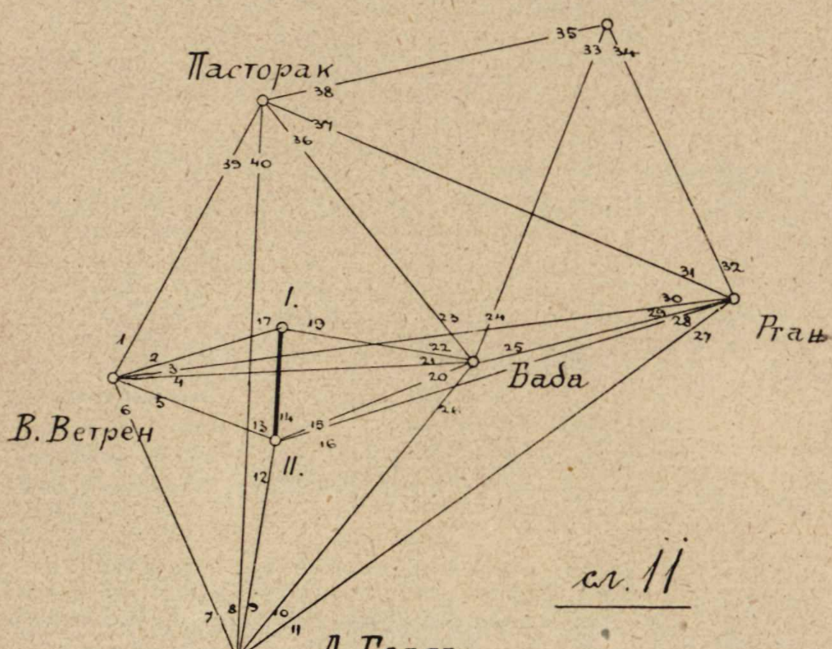
1. Пример. У тригонометријској мрежи престављеној на сл. 10, има 6 тачака, 22 правца, 10 једноставних и 2 нeједноставне линије. Према овоме је: P=6, D=22, C=10 и L=12. Стављајући ове бројеве у формуле *a)*, *b)* и *c)*, добијамо:

$$N = 22 - 18 + 4 = 8$$
$$A = 10 - 6 + 1 = 5$$
$$B = 12 - 12 + 3 = 3$$

Контрола $8 = 5 + 3 = 8$.

сл. 10.





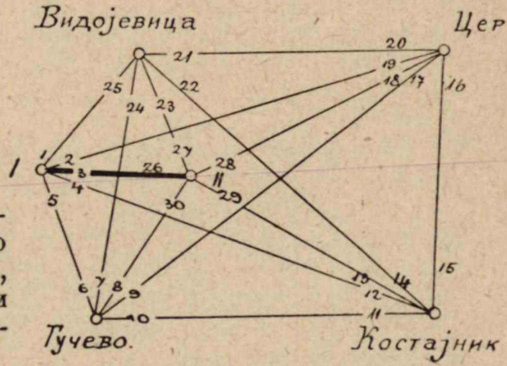
сл. 11

2. Пример: (сл. 11).

P = 8	N = 40 — 24 + 4 = 20
D = 40	A = 20 — 8 + 1 = 13
C = 20	B = 20 — 16 + 3 = 7
L = 20	N = 13 + 7 = 20

3. Пример: (сл. 12)

P= 5	N=30—18+4=16
D=30	A=15— 6+1=10
C=15	B=15—12+3= 6
L=15	N= 10+6=16



сл. 12.

Ако су на тачкама мерени углови а не правци, то би број условних једначина, разуме се, остао исти, али би у место формуле *a)* требало узети другу* и то:

$$N = E - 2P + 4 \qquad a)^*$$

где N и P имају исти значај као и пређе, а E означава број измерених углова. Ова се формула изводи из тога простога резоновања, што осим првих двеју тачака, које служе као основа тријангулације, — за одређивање сваке од осталих P—2 тачке треба измерити бар још два угла, т. ј. свега 2P—4. — Број пак условних једначина раван је броју свију углова E смањеног за број неопходно потребних.

У предпрошлом I. примеру имамо E = 16, и због тога као и раније:

$$N = 16 - 12 + 4 = 8.$$

До сада смо разматрали само условне једначине фигура и полуса. Друге се условне једначине обично и не уводе у опште израчунавање тријангулације и разматрају се засебно. Такав је случај са условним једначинама базиса, стране (хоризонта, сума и разлика).

Број условних једначина базиса раван је броју измерених базиса и тријангулацији, смањеном за један (неопходно потребни), јер по једноме базису могу бити израчунати сви остали, а упо-

* Свакојако треба имати у виду, да је при равнању углова неопходно потребно уводити још и услове хоризонта за централне тачке — у опште кад такве тачке постоје; број условних једначина се повећава и рачунање се узалуд компликира. — При равнању праваца услови се хоризонта испуњавају сами собом.

ређивање резултата непосреднога мерења и рачунања за сваког од њих даје по једну базисну једначину. На тај начин број условних једначина базиса (C) у тријангулацији са Q базиса одређује се по формули:

$$C = Q - 1. \qquad d)$$

Условне једначине страна добијају се из разматрања усамљених (побочних) тачака. За сваку такву тачку обично се изводи засебно равнање и према томе засебно се одређује и број условних једначина. За израчунавање положаја такве тачке довољно је имати два правца (као што је раније објашњено), сваки пак следећи правац даће још по једну условну једначину. — На тај начин број условних једначина страна (S) за усамљену (побочну) тачку на коју је управљено (R) праваца, одређује се по формули:

$$S = R - 2. \qquad e)$$

Број независних условних једначина у свакој тригонометријској мрежи може се одредити не само по напред изложеним формулама, већ и непосредно из цртежа: треба само поступно одређивати једну тачку за другом (неопходно потребним пресецима) и памтити, да свака нова линија (висура) повучена кроз већ одређену тачку даје једну условну једначину полуса (ако је неједнострана), а једну условну једначину полуса и једну једначину фигуре — ако је једноставна линија.

Тако у примеру 1. почнимо одређивање са базиса AB. Потпуним одређивањем троуглова CBA, DCB, ECD и FEC добијају се четири условне једначине фигура; једноставна линија AD даје једну једначину полуса и једну једначину фигуре, а не једноставна линија AF и DF дају свака по једну једначину полуса; тако да у даном примеру имамо 5 условних једначина фигура и три једначине полуса, што се потпуно слаже са резултатима напред добивеним по формулама. Овај начин одређивања броја независних условних једначина непосредно из цртежа не треба пренебрегавати, јер он може да служи и као сигурна контрола ономе другоме начину.

Избор условних једначина.

У свакој сложеној тригонометријској мрежи број независних условних једначина је увек мањи од потпуног броја свију услова, који у њој постоје. У наведеном примеру са четвороуглом сл. 9, имамо свега четири независне условне једначине, од којих су три једначине фигура, а једна полусна.

Међутим ми смо лако саставили за тај четвороугао свега девет једначина, од којих су пет једначина фигура и четири једначине полуса. У опште калкулатору се оставља слободан избор при узимању ових или оних једначина, само треба пазити, да се не пропусти узети неку од независних једначина, а узети коју од сувишних.

Са чисто теорне тачке гледишта и када би условне једначине биле престављене у аналитичкој форми, — избор ове или оне системе условних једначина био би потпуно произвољан, али са практичне тачке гледишта — у погледу потребног умног напора и постигнућа тачности у одређивању поправака углова, — неопходно је потребно држати се извесних правила. С овога разлога узећемо у разматрање избор условних једначина фигура и полуса:

1. Условне једначине фигура јављају се увек у виду збира тражених (непознатих) поправака, чији су коефицијенти јединице Број непознатих у таквим једначинама зависи од узетих фигура за састављање једначине. Тако нпр. триугао даје једначину са три непознате, четвороугао са четири и т. д. Суштина решења системе једначина, — као што је из алгебре познато, — састоји се у поступном искључивању непознатих помоћу сравњивања коефицијената, све дотле, док се не добије једна једначина са једном непознатом, из које се ова непозната и одређује. Затим се њена вредност уноси у једну од раније састављених једначина са двема непознатим, из којих се вредности одређује друга непозната. Овако добивене вредности за две непознате стављају се у једначину са трима непознатим и т. д., док се не одреде бројне вредности за све непознате. Што је већи број непознатих у једној једначини, у толико ће бити сложеније решење целе системе. Отуда и излази, да је пробитачније узимати оне условне једначине фигура, у којима је број непознатих мањи, т. ј. разматрати само триугле у сложеној мрежи триуглова.

За четвороугао (сл. 9.) можемо узети ових осам система од три независне условне једначине фигура:

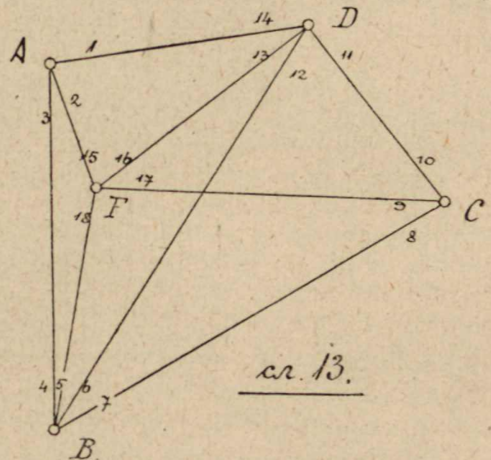
1.,	I	II	III	5.,	I	III	V
2.,	I	II	IV	6.,	I	IV	V
3.,	I	III	IV	7.,	II	III	V
4.,	II	III	IV	8.,	II	IV	V

Прве четири системе састављене су само по триуглима и у њих улазе свега по четири поправке углова (као непознате), међутим друге четири системе садрже и услов четвороугла (V) са осам поправака углова. Очевидно је, да је пробитачније узети ма коју од прве четири системе, а никако из друге групе.

2. У условним једначинама полуса коефицијенти непознатих нису једнаки (нити јединице), они престављају промене логаритама синуса при промени одговарајућих углова за 1".

Разуме се, да је и овде пробитачније узети оне једначине, у које улази мањи број непознатих. У простом четвороуглу са двема дијагоналама у сваку условну једначину полуса улази подједнак број непознатих (по 6), и због тога би у *овом смислу* избор међу њима био различан; али узмимо нешто сложенију фигуру, престављену на сл. 13. За њу можемо саставити ове условне једначине полуса:

I	полус	A	основа	BDF
II	„	B	„	ADF
III	„	B	„	DCF
IV	„	B	„	ADDF
V	„	C	„	BDF
VI	„	D	„	ABF
VII	„	D	„	BCF
VIII	„	D	„	ABCF
IX	„	F	„	ABD
X	„	F	„	BCD
XI	„	F	„	ABCD



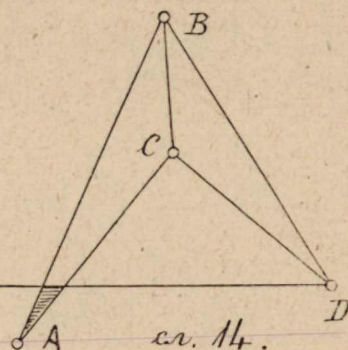
сл. 13.

Лако је увидити, да у једначине I, II, III, V, VI, VII, IX и X улазе поправке за 12 праваца (по 12 непознатих), међутим у једначине IV, VIII и XI улазе поправке за 16 праваца (по 16 непознатих). Разуме се, да би узимање оваквих једначина, као што су ове последње, само компликовало рачун. У опште дакле, треба, ако је то само могуће, узимати *полусе са триугаоним основама.*

Узмимо сада у разматрање *преимућство избора овога или онога полуса* при избору условних једначина полуса. У мрежи цртежа (сл. 9) треба изабрати *једну* независну једначину полуса из већ састављених за њу *четири* једначине полуса; у мрежи последњег цртежа (сл 13) *две* независне од девет (триугаоним основама). Као што је већ показано (у почетку ове инструкције) свака условна једначина полуса преставља се у облику:

$$\alpha\ (1)\ 7\ \beta\ (2) + \gamma\ (3) + \ldots\ldots\ldots + \nu = 0$$

где α, β, γ . . . . престављају промене логаритама синуса углова 1, 2, 3 и т. д. при промени њиховој за 1″; (1), (2), (3), ...



сл. 14.

представљају промене (непознате) поправке одговарајућих углова, а ν полусна грешка (пресека) сл 14. Ако само загледамо у логаритамске таблице, лако ћемо приметити, да су промене логаритама синуса при промени углова за 1″ т. ј. величине α, β, γ . . . . тим веће у колико су углови мањи, тако да се једначине полуса, међу којима предстоји избор, разликују по величини коефицијената непознатих, а према томе и по величини полусне грешке ν; и заиста, пошто су једначине, које зависе једна од друге, последица једна друге, то се, — у опште говорећи, — једна једначина од друге разликује само по сталном множитељу.

Узмимо једначину са једном непознатом (1); нека коефицијенат непознате и познати члан буду у једном смислу α и ν, а у другом α_2 и ν_2 при чему нека је

$$\alpha_2 = n\,\alpha_1 \quad \text{и} \quad \nu_2 = n\,\nu_1$$

пошто је једна једначина последица друге, из једначине:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\ (1) + \nu_1 &= 0 \\ \text{или}\quad \alpha_2\ (1) + \nu_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots \text{a)}$$

добиће се, — разуме се, — иста вредност за (1) због тога што је из прве једначине:

$$(1) = -\frac{\nu_1}{\alpha_1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{b)}$$

а из друге

$$(1) = -\frac{\nu_2}{\alpha_2} = -\frac{\cancel{n\,\nu_1}}{n\,\alpha_1} = -\frac{\nu_1}{\alpha_1} \dots\dots \text{c)}$$

Али једнака вредност за (1) добиће се у оба случаја само онда, ако су величине α, α_2, ν_1, и ν_2 бројеви потпуно тачни. Ако су те пак величине приближно познате, то ће се непозната (1) добити у неколико погрешка. Ако погрешке означимо истим словима са знаком Δ, лако је видети, да ће грешка Δ (1) при израчунавању (1) из једначине b) и c) бити:

из b) $$\Delta_1\ (1) = -\frac{\Delta\nu_1 - (1)\,\Delta\alpha_1}{\alpha_1}$$

и c) $$\Delta_2\ (1) = -\frac{\Delta\nu_2 - (1)\,\alpha_2}{\alpha_2}$$

Ако су грешке у величинама α и ν подједнаке (нпр. јединица последње цифре) т. ј. $\Delta\nu_1 = \Delta\nu_2$ и $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2$ то ћемо после деобе добити:

$$\frac{\Delta_1\ (1)}{\Delta_2\ (2)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

дакле излази правило: да су грешке у израчунавању непознате обрнуто сразмерне коефицијентима те непознате у почетним једначинама.

Нека су дате једначине:

$$10 \times + 17 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\mathrm{I})$$
$$100 \times + 170 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\mathrm{II})$$

Ако су како коефицијенти непознатих тако и познати чланови тачни бројеви, то ће се, разуме се, из обеју једначина добити иста вредност за $\underline{X}$ т. ј. $\overline{X} = -1.7$; ако се у овим датим бројевима подозревају грешке равне јединици, то ће грешке у одређивању $\underline{X}$ из прве једначине бити;

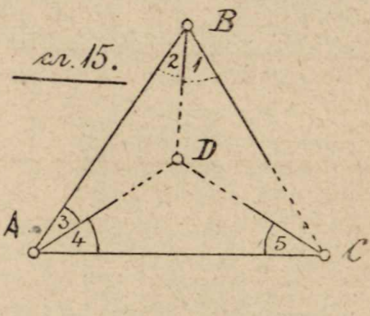
$$\Delta_1 X = -\frac{1-1.7}{10} = 0.07$$

а из друге:

$$\Delta_2 X = -\frac{1-1.7}{100} = 0.007$$

т. ј. једначина (II) даће вредност X са грешком 10 пута мањом него једначина (I), која је у математичком смислу идентична са (II)

Ради бољег објашњења овога што је речено, узмимо у разматрање четвороугао ABCD (сл. 15) у коме су измерени само 5 углова, означених цифрама 1, 2, 3. 4 и 5, и у коме сасвим нема условних једначина фигуре, већ има само једна условна једначина полуса. Узмимо да су мерења дала ове вредности углова:



	°	′	″
1 =	0	30	2
2 =	59	30	0
3 =	59	30	0
4 =	0	30	0
5 =	30	0	0

Ако се за полус узме тачка А то ће његова условна једначина биуи·

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\{180^\circ - (2+3)\}}{\sin 2} = \frac{\sin 5}{\sin\{180^\circ - (4+5)\}} = \frac{\sin(1+2)}{\sin\{180^\circ - 1+2+3+4\}} = 1.$$

	lg sin		Δlg sin		lg sin		Δ lg sin
2+3	9.941	8193	— 11,7	2	9 935	3204	+ 12.4
5	9.698	9700	+ 36.5	4+5	9.705	4689	+ 35.8
1+2	9.937	5330	+ 12.2	1+2+3+4	9.937	5282	— 12.1
	9 578	3223			9.578	3175	

Или после редуцирања (вредности са истим коефицијентима):

$$23\,3\,(1) + 0.2\,(2) + 0.4\,(3) - 23.7\,(4) + 0.7\,(5) + 48 = 0 \ . \ . \ . \ . \ a)$$

Ако за полус узмемо тачку D, то ће његова условна једначина бити:

$$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{DC}{DA} = \frac{\sin 2}{\sin 3} \cdot \frac{\sin\{180^0 - (1+2+3+4+5)\}}{\sin\ 1} \cdot \frac{\sin 4}{\sin 5} = 1 \ . \ .$$

	lg sin		Δ lg sin		lg sin		Δ lg sin
2	9.935	3204	+ 12.4	3	9.935	3204	+ 12.4
1+2+3+4+5	9.698	9627	— 36.5	1	9 941	3241	+ 2410.0
4.	7.940	8419	+ 2412.0	5	7.698	9700	+ 36.5
	7.575	1250			7.575	6145	

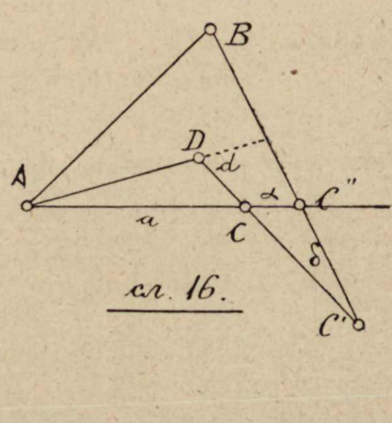
или после редуцирања и множења целе једначине са — 1:

$$2446.5\,(1) + 24.1\,(2) + 48.9\,(3) - 2375.5\,(4) + 73.0\,(5) + 4895 = 0 \ . \ . \ . \ . \ b).$$

Сви коефицијенти непознатих и познати члан у овој последњој једначини (са полусом у D), сто пута су већи него у предидућој једначини (са полусом у А), тако, да при решавању ове последње једначине са логаритмима од пет децимала, поправке углова (непознате) могу се израчунати са истом тачношћу, као и при решењу прве једначине са логаритмима од седам децимала.

Ако полусне грешке престављамо графички (триугао погрешности) за овај четвороугао који разматрамо, то ће се добити фигура као на цртежу (сл 16). Грешка полуса А и D т. ј. бројеви 48 и 4895 нису ништа друго до величине:

$M.\ 10^7 . \frac{d}{a}$ и $M.\ 10^7 . \frac{\delta}{д}$, где M означава модул Бригових логаритама, а $\varkappa$, a и δ, d, дужине линија $\overline{CC''}$, $\overline{AC}$, $\overline{CC'}$ и $\overline{DC}$.



сл. 16.

На тај начин однос тачности једначина (а) и (b), раван је односу: $\frac{\varkappa}{a}$ и $\frac{\delta}{d}$, т. ј. раван је величини: $\frac{\varkappa\ .\ d}{a\ .\ \delta}$.

Али се из цртежа види да је $\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\sin DC'B}{\sin AC''C'}$, тако да је и

$\frac{\alpha \,.\, d}{a \,.\, \delta} = \frac{d \,.\, \sin DC'B}{a \,.\, \sin AC''C''}$, или приближно $\frac{DD'}{AD'}$ т. ј. тачност условних једначина полуса у четвороуглу за равне полусе, обрнуто је сразмерна са растојањима ових полуса од противлежећих им дијагонала.

Ако су посматрани још неки углови, сем ових показаних у овом конкретном случају, то ће условне једначнне полуса тада имати различите полусне погрешке (триугле погрешности) и њих већ можемо непосредно упоређивати, али се суштина ствари због тога не мења.

Према томе, за рачунање поправака са најмањом погрешности, треба узимати оне условне једначине полуса, у које улазе највеће промене логаритама синуса, т. ј. оне у које улазе најоштрији углови. Избор ових углова најлакше се врши на унапред израђеном довољно тачном цртежу, сравњењем углова просто од ока.

У четвороуглу са дијагоналама, за полус треба узимати ону тачку која је најближа противнолежећој јој дијагонали. На пр. за четвороугао на цртежу (сл. 9) треба узети за полус тачку А и разуме се једначину VI. У свакој пак централној системи (сл. 3) за полус треба узимати тачку централну (О). У свакој пак сложеној мрежи за полус треба узимати најближу тачку противнолежећој дијагонали, али чији се правци ослањају на фигуру са најмањим бројем страна. Нпр. у мрежи цртежа (сл. 13) најподесније су једначине: IX и X.

(Наставља се.)

Stručne vijesti.

Predavanje inžinj. pukovnika S. Boškovića o radovima vojnog geografskog instituta u Beogradu.

Ovogodišnji naš skupni sastanak prigodom druge glavne skupštine bio je otvoren predavanjem predsjednika društva g. inž. pukovnika S. Boškovića, o radovima vojnog geografskog instituta u Beogradu

Shvaćajući da je važna zadaća društva izmjenično upoznavanje radova izvedenih u različitim krajevima naše kraljevine, prikazao nam je g predsjednik dosadanje geodetsko-astronomske radove vojnog geografskog instituta, kratkim, vrlo jezgrovitim govorom, punim stvarnih činjenica, koje je začinio svojim iskustvom dugih godina rada, i povezao dubokim svojim teoretijskim prozrijevanjem materijala.