LETNIK II. Avgust, Septembar in Oktoba r 1920. ŠTEV. 5. 6. in 7.

GLASILO GEOMETROV

KRALJEVSTVA SRBOV, HRVATOV IN SLOVENCEV.

О равнању тријангулације у опште.

Превод из Геодезије ђенерала В. В. Витковског.

Ст. Бошковић.

Решавање условних једначина.

(Наставак).

Када је одређен број свију независних условних једначина дане мреже и од њих изабране најпростије и тачне, онда остаје само да их решимо, т. ј. да израчунамо поправке праваца (или углова). Нека би смо имали систему 09 К условних једначина:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1\ (1) + a_2\ (2) + a_3\ (3) + \ \ldots\ a_n\ (n) + v_1 = 0 \\
b_1\ (1) + b_2\ (2) + b_3\ (3) + \ \ldots\ b_n\ (n) + v_2 = 0 \\
c_1\ (1) + c_2\ (2) + c_3\ (3) + \ \ldots\ c_n\ (n) + v_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k_1\ (1) + k_2\ (2) + k_3\ (3) + \ \ldots\ k_n\ (n) + v_n = 0
\end{array}\right\}\ 1.)$$

са n непознатих поправака: (1), (2), (3) . . . . (n). Коефицијенти a_1, a_2 . . . b_1, b_2 . . . . . k_1, k_2 . . . kn, познати су бројеви (дати). У почетку је било објашњено а сад само да поновимо, да су ови коефицијенти у условним једначинама углова свагда равни јединици (+ 1 или — 1), а у синусним условним једначинама они су промене логоритама синуса одговарајућих углова за 1″ (т. ј. величине α, β . . . .). Познати пак чланови v_1, v_2, v_3, ... vn, престављају грешке одговарајућих условних једначина, — и то у условним једначинама углова то су грешке фигура, а у синусним условним једначинама то су полусне грешке (грешке везе), изражене у јединицама последњег знака логоритма и то у оним истим јединицама у којима су изражени и коефицијенти непознатих у одговарајућим јадначинама.

Пошто је број једначина (k) у свакој тригонометријској мрежи мањи од броја непознатих (n), то је предња система једначина — система неодређених једначина и за непознате (1), (2), (3) . . . . може се наћи безброј решења (вредности). Али, како је већ и раније напоменуто, тражене (непознате) поправке везане су поред геометријских услова у мрежи још и условом, да сума њихових квадрата буде најмања, т. ј. обе поправке треба да задовољавају једначину:

$$(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \dots + (n)^2 = \text{minimum} \dots 2.)$$

За укупно решење једначина 1.) и 2.) можемо применити опште познати начин увођења неодређених коефицијената (чинилаца). Тако умножимо сваку од једначина 1.) са неодређеним за сада бројевима 2A, 2B, 2C . . . . 2 K (коефицијенти 2 уведени су овде само ради упрошћавања алгебарске манипулације) и одузмимо их од једначине 2.); тада ћемо у резултату добити једну једначину:

$$(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \dots + (n)^2 -$$
$$- 2\,Aa^1\,(1) - 2\,Aa_2\,(2) - 2\,Aa_3\,(3) \dots 2\,Aa^n\,(n) - 2\,Av_1 -$$
$$- 2\,Bb^1\,(1) - 2\,Bb_2\,(2) - 2\,Bb_3\,(3) \dots 2\,Bb^n\,(n) - 2\,Av_2 -$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$- 2\,Kk_1\,(1) - 2\,Kk_2\,(2) - 2\,Kk_3\,(3) \dots 2\,Kkn\,(n) - 2\,Kvk = \text{minimum},$$

— X или сабирајући чланове са (1) са (2) и т. д

$$(1)^2 - 2\,(1)\,\{ Aa_1 + Bb_1 + \dots + Kk_1 \} +$$
$$+ (2)^2 - 2\,(2)\,\{ Aa_2 + Bb_2 + \dots + Kk_2 \} +$$
$$+ (3)^2 - 2\,(3)\,\{ Aa_3 + Bb_3 + \dots + Kk_3 \} +$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$- \{ Av_1 + Bv_2 + \dots + Kv_k \} = \text{minimum}.$$

Да би смо саставили пуне квадрате, додајмо и одузмимо свакоме реду ове једначине — квадрат множитеља у загради { }, тада добијамо:

$$[(1) - \{ Aa_1 + Bb_1 + \dots + Kk_1\}]^2 + [(2) - \{Aa_2 + Bb_2$$
$$\dots + Kk_2\}]^2 + \dots - [\{Aa_1 + Bb_1 + \dots\}^2 +$$
$$+ \{ Aa_2 + Bb_2 + \dots \}^2 + \dots + 2\,\{Av_2 + Bv_2 +$$
$$+ \dots + Kv_k \}] = \text{minimum}.$$

Тражене поправке (1), (2) . . . улазе само у чланове првог реда ове једначине, према томе, само са тим члановима треба и манипулирати да би смо сав први део једначине учинили најмањим. — Разматрати чланове другог реда нема никакве потребе због тога, што и ако би они скупа преставлјали величине позитивну или негативну ипак у овом случају, у алгебарском смислу, када сума чланова првога реда има исту вредност, то ће и цео први део једначине бити најмањи. Али сви чланови првог реда ове једначине преставлјају квадрате, тако да ће сума њихова бити најмања само при таквим вредностима непознатих (1), (2), ... при којима је сваки члан посебице раван нули т. ј. када је:

$$(1) - \{ Aa_1 + Bb_1 + \dots Kk_1 \} = 0$$
$$(2) - \{ Aa_2 + Bb_2 + \dots Kk_2 \} = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(n) - \{ Aa_n + Bb_n + \dots Kk_n \} = 0$$

При свима другим вредностима сваки квадрат, па према томе и њихова сума биће већа од нуле.

Те тако, једначине 1.) са условом 2.) доводе ка следећем решењу, које потиче из предидућих једначина:

$$\left.\begin{array}{l}(1) = Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + \ldots + Kk_1 \\ (2) = Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 + \ldots + Kk_2 \\ (3) = Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 + \ldots + Kk_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n) = Aa_n + Bb_n + Cc_n + \ldots + Kk_n\end{array}\right\} \ldots \quad 3.)$$

Ипак за рачунање нерознатих поправака (1), (2) . . . . по овим формулама, потребно је још имати и вредности за напред уведене неодређене множитеље A, B . . . . K, који се зову корелате. За тај циљ заменимо, — овде у 3.) добивене вредности за (1), (2) . . . . (n) — у првобитну групу једначина 1.) па ћемо добити:

$$a_1(Aa_1 + Bb_1 + \ldots + Kk_1) + a_2(Aa_2 + Bb_2 + \ldots + Kk_2) + \ldots + an(Aan + Bbn \ldots + Kkn) + V_1 = 0$$

$$b_1(Aa_1 + Bb_1 + \ldots + Kk_1) + b_2(Aa_2 + Bb_2 + \ldots + Kk_2) + \ldots + bn(Aan + Bbn + \ldots + Kkn) + V_2 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_1(Aa_1 + Bb_1 + \ldots + Kk_1) + k_2(Aa_2 + Bb_2 + \ldots + Kk_2) + \ldots + kn(Aan + Bbn + \ldots Kkn) + Vn = 0.$$

Кад отворимо заграде, затим саберемо у свакој од ових једначина чланове са A, са Б и т. д. у ради краткоће означимо усправним заградама суму сличних чланова т. ј. када означимо

$$\left.\begin{array}{l}[a\,a] = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + \ldots a_n a_n \\ [a\,b] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots a_n b_n \\ [b\,b] = b_1 b_1 + b_2 b_2 + b_3 b_3 + \ldots b_n b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \ldots \quad \Sigma.)$$

добићемо:

$$\left.\begin{array}{l}[a\,a]\,A + [a\,b]\,B + [a\,c]\,C + \ldots [a\,k]\,K + v_1 = 0 \\ [a\,b]\,A + [b\,b]\,B + [b\,c]\,C + \ldots [b\,k]\,K + v_2 = 0 \\ [a\,c]\,A + [b\,c]\,B + [c\,c]\,C + \ldots [c\,k]\,K + v_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a\,k]\,A + [b\,k]\,B + [c\,k]\,C + \ldots [k\,k]\,K + vk = 0\end{array}\right\} . \; 4)$$

Сви коефицијенти ових такозваних нормалних једначина јесу комбинације даних коефицијената a, b . . ., и пошто је број ових једначина раван броју уведених неодређених множитеља A, B . . . K, то решење њихово не преставља никакве тешкоће и може се извршити по обичним правилима алгебре. — После одређивања корелата A, B. . . K из ових нормалних једначина, није тешко одредити и поправке из једначина 3.)

За контролу рачунања може послужити једначина:

$$(1)^2 + (2)^2 + \ldots + (n)^2 = -(Av_1 + Bv_2 + \ldots + Kvk) \ldots 5.)$$

напослетку средња грешка угла (или правца) добија по формули:

$$m = \pm \sqrt{\frac{(1)^2 + (2)^2 + \ldots + (n)^2}{K}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6.)$$

Применимо овде изложена правила на прост триугао, у коме су измерена сва три угла. За такав триугао добиће се само једна условна једначина:

$$(1) + (2) + (3) + v = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad p.)$$

у којој су (1), (2), (3) — тражене поправке углова 1, 2 и 3 а v грешка триугла. Пошто су сви коефицијенти непознатих равни јединици, то једначине 3.) биће:

$$\left.\begin{array}{l}(1) = A \\ (2) = A \\ (3) = A\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad q.)$$

а једина нормална једначина [ако заменимо вредности из q.) у p)] биће:

$$3\ A + v = 0.$$

одакле $A = -\frac{v}{3}$, па према томе и

$$(1) = (2) = (3) = -\frac{v}{3}$$

На тај начин, за триугао у коме су измерена сва три угла ради равнања, доводи нас до оваквог закључка: сваком углу треба додати трећину грешке триугла са обратним знаком, па су грешке изравнате. То је правило одавно познато и без те теорије, пошто грешке не зависе од величине углова, и ако су вршена сва три мерења са истим сремствима, и са истом пажњом, онда нема никаквог узрока да један од њих буде тачнији или погрешнији од другога или трећега; т. ј. моја трећина целе грешке да пада подједнако на сваку од углова триугла, па је и за равнање треба тако поделити.

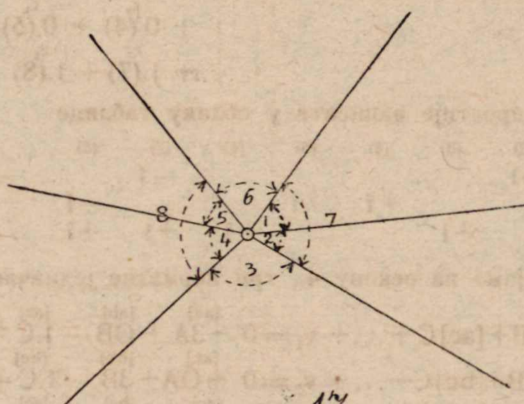
Примјер 1). Нека су непосредно измерена (и сведена на центре) ова три угла у триуглу:

		°	′	″	
1	=	42	28	55·60	
3	=	61	32	12·10	
2	=	75	58	54·30	
1 + 2 + 3	=	180	0	2.00	а када је теорни збир са сферним ексцесом
180 + ε	=	180	0	0·76	онда је грешка триугла и
v	=			+ 1·24,	на основи предњег поправке:

(1) = (2) = (3) = — 0.″41; према чему ће узравнати угли бити:

	сферни:				равни:		
	°	′	″		°	′	″
1 =	42	28	55·19		42	28	54·93
2 =	61	32	11·69		61	32	11·43
3 =	75	58	53·89		75	58	53·64
Σ =	180	0	0·77		180	0	0·00

Пример 2.). Нека су на некој тачци (сл. 17) измерени угли:



сл. 17.

Углови добивени посматрањем				Поправке	Изравнати угли		
	°	′	″	″	°	′	″
1., =	65	45	28·37	+ 0·51	65	45	28·88
2., =	31	47	58·50	+ 0·51	31	47	59·01
3., =	79	32	6·25	+ 0·02	79	32	6·27
4., =	87	44	57·41	— 0·56	87	44	56·85
5., =	34	0	3·35	— 0·56	34	0	2·79
6., =	61	9	26·17	+ 0·02	61	9	26·19
7., =	97	33	28·39	— 0·49	97	33	27·90
8., =	121	44	59·05	+ 0·59	121	44	59·64

У даном случају условне једначине сума и хоризонта $1 + 2 - 7 - 1.25 = 0; 4 + 5 - 8 + 1.71 = 0;$ и $3 + 6 + 7 + 8 - - 0.14 = 0$] могу бити престављзне овако (на основу 1.):

$$
\begin{array}{l|c|l}
a_1(1) + a_2(2) \ldots an(n) + v_1 = 0 & A & + 1.\overset{a_1}{(1)} + 1.\overset{a_2}{(2)} + 0.\overset{a_3}{(3)} + \\
 & & + 0.\overset{a_4}{(4)} + 0.\overset{a_5}{(5)} + 0.\overset{a_6}{(6)} + \\
 & & + 1.\overset{a_7}{(7)} + 0.\overset{a_8}{(8)} - 1.\overset{v_1}{52} = 0 \\
b_1(1) + b_2(2) \ldots bn(n) + v_2 = 0 & B & + 0.\overset{b_1}{(1)} + 0.\overset{b_2}{(2)} + 0.\overset{b_3}{(3)} + \\
 & & + 1.\overset{b_4}{(4)} + 1.\overset{b_5}{(5)} + 0.\overset{b_6}{(6)} + \\
 & & + 0.\overset{b_7}{(7)} + 0.\overset{b_8}{(8)} + 1.\overset{v_2}{71} = 0 \\
c_1(1) + c_2(2) + \ldots cn(n)\, v_3 = 0 & C & + 0.\overset{c_1}{(1)} + 0.\overset{c_2}{(2)} + 1.\overset{c_3}{(3)} + \\
 & & + 0.\overset{c_4}{(4)} + 0.\overset{c_5}{(5)} + 1.\overset{c_6}{(6)} + \\
 & & + 1.\overset{c_7}{(7)} + 1.\overset{c_8}{(8)} - 0.\overset{v_3}{14} = 0
\end{array}
$$

а то се дâ простије написати у облику таблице

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	v
A	. +1	. +1	.	.	.	.	. —1	.	. — 1.52 = 0
B				+1	—1			—1	+ 1.71 = 0
C	.		+1			+1	+1	+1	— 0.14 = 0

одакле добијамо на основу 4., три нормалне једначине

$$
\left.
\begin{array}{ll}
[aa]A + [ab]B + [ac]C + \ldots + v_1 = 0 & \overset{[aa]}{+3A} + \overset{[ab]}{0B} - \overset{[ac]}{1.C} - \overset{v_1}{1.52} = 0 \\
[ab]A + [bb]B + [bc]C + \ldots + v_2 = 0 & \overset{[ab]}{\pm 0A} + \overset{[bb]}{3B} - \overset{[bc]}{1.C} + \overset{v_2}{1.71} = 0 \\
[ac]A + [bc]B + [cc]C + \ldots + v_3 = 0 & \overset{[ac]}{-1.A} - \overset{[bc]}{1.B} + \overset{[cc]}{4\,C} - \overset{v_3}{0.14} = 0
\end{array}
\right\}
$$

или

$$
\begin{array}{rr}
3\,A - C = & +\,1.52 \\
3\,B - C & -\,1.71 \\
-\,A - B + 4C & +\,0{\cdot}14
\end{array}
$$

или простије написано у облику таблице:

A	B	C	V
+3	0	—1	—1·52
0	+3	—1	+1.71
—1	—1	+4	— 0·14

чије решење даје:

$$\underline{A = +\,0.514} \qquad \underline{B = -\,0.562} \quad \text{и} \quad \underline{C = +\,0.023}$$

а на основу овога и на основу једначине 3., добијамо вредности за поправке (1), (2), (3) . . . ., које су написане у ступцу поправака примера 2.) (због једначине 3.) исписано је A, B и C пред напред наведеним таблицама условних једначина).

Контрола рачуна биће по формули 5.):

$$(1)^2 + (2)^2 + \ldots\ldots = 1.74$$
$$Av_1 + Bv_2 + Cv_3 \ \ldots = -1.74$$

и на послетку средња грешка једнога угла по формули 6.) излази

$$m \pm 0.''76.$$

Практичне напомоне за рачунање.

Рачун за равнање грешака, у опште говорећи, није тако прост, као у овим малим примерима, и с тога он преставља за почетнике веома тежак посао. — Ради олакшања и објашњења тога рачунског посла овде ће бити изложено неколико практичних правила и упута, помоћу којих ће сваки почетник лако решити и доста сложене примере, какве смо и ми после овога овде изложили.

Сваки рачун равнања садржи у себи пет засебних радња: 1.) избор условних једначина и исписивање коефицијената и познатих чланова тих једначина; 2.) преобраћање условних једначина у нормалне; 3.) решавање нормалних једначина; 4.) рачунање поправака даних углова или праваца; 5.) контрола условних једначина и исправљање праваца (углова) помоћу добивених поправака.

1.) Раније је већ објашњен значај избора независних условних једначина у датој мрежи, као и узроци због чега се претпостављају условне једначине са најмањим бројем непознатих. Изабране условне једначине исписују се једна за другом, при чему се исписују прво условне једначине углова а затим условне једначине синуса; такав рад олакшава израчунавање коефицијената нормалних једначина, које после тога долази. Ово исписивање врши се на нарочитој исцртаној хартији; правци (угли) нумеришу се и исписују се у једном ступцу једно испод другога; за сваку једначину одређен је засебан ступац, и наспрам одговарајуће непознате пишу се само коефицијенти а испод ових (под подвлаком) познати чланови; наспрам непознатих, који не улазе у дану једначину, остављају се празна места (да се не би писале многе нуле).

У једначинама углова коефицијенти су код непознатих јединице, са знаком + или —. Ако се равнају правци, што ће за сваки угао, — који је образован са два правца, — коефицијенат поправке једног правца бити + 1 а другог — 1; правци се нумеришу по реду растећих азимута и због тога се за састављање углова узимају разлике следећег и предидућег правца, који образују дотични угао. Ако ли се равнају угли, то поправке свију углова имају обично коефицијенат + 1.

У једначинама синуса коефициенти су код непознатих промене логоритама синуса при промени одговарајућих углова за 1″; ове се промене исписују из логаритамских таблица једновремено са израчунавањем log sin самих углова. Пошто се ове промене дају у таблицама обично за 10" то их при исписивању треба поделити са 10. Познато је да синуси расту или опадају си умањавањем или увеличавањем угла, према томе да ли је угао мањи или већи од 90°, те према томе коефицијенти за оштре углове имају знак + а за шупе знак —. Код равнања праваца сваки угао даје два једнака коефицијента са обрнутим знацима. Знаци одговарајућих коефицијената зависе још и од знака са којим тражена поправка улази у условну једначину. На ову околност треба обратити нарочиту пажњу, пошто већина грешака при састављању условних једначина произилази главно због нетачности знакова код појединих коефицијената.

Познати чланови условних једначина изражавају се код условних једначина у секундама, а код синусних у јединицама оних децималних знакова у којима су изражени коефицијенти непознатих. Неопходно је потребно и овде пазити, да се не учине грешке у знацима, који се одређују при самом израчунавању по формулама 9) условних једначина.

У опште узевши, рад на израчунавању коефицијената непознатих и рачунање познатих чланова не представља особите тешкоће, ипак, разуме се, не треба рад даље изводити, док се потезно не уверимо у тачност састава условних једначина. Најбоље је радити у двоје, или ако другога нема, после првог састава једначина прекинути рачунања на извесно време и затим поновити цео рад на састављању истих једначина, али на засебни и таблицама и потезно независно од првобитног рачуна. Другим се начином коефицијенти код непознатих не дају контролисати; познати чланови ових једначина дају се контролисати на други начин: за условне једначине треба узети суму углова у фигурама, које представљају скупа неколико триуглова. Код полусних пак једначина, познати чланови једначина контролишу се на тај начин, што се израчунају синуси датих (сферних) углова а сем њих и синуси тих углова смањених за $^1/_3$ сфернога ексцеса одговарајућих триуглова и оба рачуна треба да даду исти резултат. Ова контрола заснована је на томе, што ако назовемо са A, B . . . . сферне углове, са A_1, B_1, и т. д. одговарајуће и равне углове, а са a, b, c . . . визуре из полуса, то ћемо за сферну фигуру имати:

$$\frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{\sin C}{\sin D} \cdot \frac{\sin E}{\sin F} = \frac{\sin a}{\sin b} \cdot \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\sin c}{\sin a}$$

за равну пак фигуру имали бисмо:

$$\frac{\sin A_1}{\sin B_1} \cdot \frac{\sin C_1}{\sin D_1} \cdot \frac{\sin E_1}{\sin F_1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}$$

а друге су половине ових једначипа у оба случаја = 1.

2.) Рачунање коефицијената нормалних једначина изводи се по формули Σ стр. 51., и пошто су коефицијенти условних једначина $= + 1$ или $- 1$, то се образовање првих коефицијената нормалних једначина врши лако и брзо, а тешкоће почињу тек од коефицијената у које улазе синусне једначине. Многобројна множења при овом послу треба вршити или помоћу логоритама или помоћу машине за рачунање. У сваком случају корисно је контролисати и овај рачун помоћу сума коефицијената.

Нека је: $s_1 = [a]$, $s_2 = [b]$, $s_3 = [c]$

Саставимо производе as, bs . . .; коефицијенти корекатa A, B, . . . у нормалним једначинама треба да задовољавају једначине:

$$[as] = [aa] + [ab] + [ac] + \dots$$
$$[ab] = [ab] + [bb] + [bc] + \dots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

где заграде означавају суме одговарајућих чланова.

3.) Нормалне једначине могу се решавати по ма којој методи (елементарне алгебре) за решавање системе једначина са многим непознатим, али је ипак најбоље рачунати по формулару заснованом на самом закону о коефицијентима нормалних једначина 4.) стр. 52. Ако помножимо поступно све коефицијенте прве нормалне једначине поступно са односом $\frac{[ab]}{[aa]}, \frac{[ac]}{[aa]} \dots$ и испишемо резултате под другу, трећу и т. д. једначину, то ће коефицијенти прве непознате у сваком пару једначина бити једнаки, па према томе, после одузимања њиховог добиће се у место првобитних k једначина са k непознатих (k — 1) једначина са (k — 1) непознатих, при чему ће коефицијентима ових нових једначина такође следовати закону о коефицијентима нормалних једначина. Ако учинимо то исто са овим (k — 1) једначинама, добићемо (k — 2) једначина са (k — 2) непознатих и т. д. На тај начин врши се поступно искључивање непознатих почев од прве, и у резултату се добија на крају једна једначина са једном непознатом.

Имајући у виду ту околност, да после сваког одузимања први чланови отпадају (потиру се) они се и не пишу (да се због исписивања не би губило у времену) и рачун се врши на следећи начин: коефицијенти непознатих и познати чланови нормалних једначина исписују се на нарочито шпартаној хартији са таквим рачуном, да међу првом и другом једначином остану по два слободна појаса, међу другом и трећом четири, међу трећом и четвртом шест. — Коефицијенти уписују се у одговарајуће ступце (колоне) означене са A, B, C . . . . У првој једначини исписују се сви коефицијенти; у другој, сви сем првога; у трећој, сви изузев другога; тако да се у последњој једначини исписује само коефицијенат последње нерознате и познати члан те једначине.

На таком формулару треба се видити читати једначине, не по појасевима већ по ступцима и редовима, почев сваку једначину од првог реда по ступцу до краја његовог, па поврчући затим у десно по одговарајућем реду до његовог краја.

Крајни десни ступац је контролни ступац (s) чији сваки број преставља суму коефицијената одговарајуће једначине и њенога познатог члана. Са бројевима тога контролног ступца врше се оне исте радње, као и са коефицијентима једначине (и познатим члановима); после свакога искључивања непознате јавља се контрола која се састоји у томе, да се сума свију коефицијената у свакој новој једначини (читајући је као што је мало час објашњено) равна одговарајућем новом броју у контролном ступцу.

Множење нормалних једначина са односима $\frac{[a\,b]}{[a\,b]}, \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\ldots$ изводи се помоћу логаритама са четири или пет децимала (према томе да ли ће се углови исписивати са тачношћу стотих или хиљадитих делова лука) — Пре свега узимају се логоритми свију бројева првога реда и усписују се у другом реду (испод својих бројева), за тим се на засебној хартијици исписује разлика логоритама [a b] и [a a], прислањајући је уза сваку од исписатих већ логаритама (осим првога) сабирују се у памети се налазећи логаритамским таблицама њихове одговарајуће бројеве, исписују се сви испод коефиецијента друге једначине. И кад одузмемо овај доњи ред од горњега добићемо коефицијенте друге једначине, система једначине са (K — 1) непознатих и т. д. У опште множење коефицијената прве нормалне једначине са одговарајућим односима (са разломцима) почиње од онога коефицијента који преставља бројитеља тога односа. — Као резултат у трећим редовима сваке грешке добија се система од (K — 1) једначине са (K — 1) непознатих.

Са коефицијентима системе од (K — 1) једначина врши се потезно то исто као и са коефицијентима нормалних једначина и сад се у резултату добија у петим редовима сваке групе система од (K — 2) једначине (K — 2) непознатих. Са тим једнаћинама изводе се те исте радње и т. д., док се не дође до једне једначине са једном непознатом.

После свакoг одузимања бројеви сваког новог реда контролишу се на тај начин, што сума њихова треба да је равна добивеном броју рачунањем у контролном ступцу истога реда. Свака несугласица при томе указује се на грешку, те се стога рад не сме продуљити даље, док се грешка не пронађе и поправка изврши. Овде треба напоменути, да пошто се рачун изводи помоћу логоритама са заокруживањем последње децимале, то несугласице сума са бројевима контолнога ступца за 2 — 3 јединице посљедње децимале не показују грешку у рачунању.

Искључивања (избацивање, елиминисање) непознатих преставља најтежи и најзапорнији део рачунања равнања, али благодарећи контролном ступцу оно не заморава колкулатора (рачунђију) и чини још да се рад може прекинути ма на ком реду, те да се после одмора рад понова настави.

Када се из решења последње једначине са једном непознатом добије вредност ове, онда се њен логоритам напише на засебном листићу хартије, па прислањајући ову ка реду за логоритмима коефицијената једначине са двема непознатима и сабравши логоритам последње непознате са логоритмом њеног коефицијента, врати се одговарајући број, који када се сабере са познатим чланом, даје све што је потребно за рачунање последње непознате. Исписават сада њен логаритам па истом засебном листићу, нешто у лево од већ написаног логаритма последње непознате, прислањамо овај листић (логаритме) к реду који садржи логаритме коефицијената једначина са трима непознатима. Продуживајући одредбу непознатих овако и даље, долази се напослетку и до одредбе прве непознате.

Ово израчунавање непознатих (осим последње) ничим се не контролише и због тога је најбоље да се врши „у две руке" (двојица засебно). Овде су особито честе грешке у знацима*)

4.) Поправке праваца (или углова) узрачунавају се после тога по формули 3. Ово рачунање не преставља никакве тешкоће, пошто су коефицијенти код условних једначина равни јединици, а код осталих, и ако нису јединице, ирак су њихови логаритми исписани раније. Као контрола за рачунање поправке служи однос који је изражен формулом 5.):

$$X^2 = - [K. v]$$

5.) Кад су израчунате све поправке, потребно је заменити их у условним једначинама те да се коначно уверимо у тачност целокупног рачунања. Ако су предидуће контроле давале задовољавајућу сагланост, то је значило само тачност решавања једначина; замена пак у условним једначинама увериће нас у тачност самог састава једначина.

Усправлање праваца (углова) помоћу добивених поправака је последња радња рачуна равнања. Појмљиво је да поправке треба додавати са њиховим знацима + или —. Сведени (на центре) правци (или углови) а поправљени рачуном равнања зову се изравнати правци (или углови).

Примери: види прилоге 1.

*) Постоји сигурно сребство за контролу рачунања свију непознатих, али због утрошка великог труда и много времена, оно се врло ретко примењује: — треба за то преписати све нормалне једначине у обрнутом реду непознатих и понова извести искључивање, после чега се добија, разуме се, место последње прва непозната. У границама тачности рачунања, та непозната треба да је једнака са оном која је првим решењем добивена.

Оцена рачунског посла.

Из овде уложених примјера лако се види да се, при равнању тријангулације, највећи део рачунског посла састоји у састављању и решавању нормалних једначина. — За састављање једначина потребно је мање времена, него за њихово решење, па ипак овај рад доцније олакшава израчунавање тријангулације. И заиста, изнађени логоритми синуса разних углова (за одређивање познатих чланова нормалних једначина) доцније су добро дошли за рачунање саме тријангулације: имајући промене логоритања синиса при промени одговарајућих углова за 1,” лако је затим прећи од синуса сведених (на центре углова — — праваца) па синусе изравнатих углова (праваца), треба само свакоме од њих додати са одговарајућим знаком производ од промене логаритма синуса и израчунате поправке угла. — Решење пак нормалних једначина састављ главни део рачунска посла и не може ни зашто више да послужи, а међутим увећањем броја условнх једначина, посао се увећава тако брзо, да при великом броју једначина, њихово решење постаје готово не могуће на практици.

Да видимо сада колико ће засебних бројева бити потребно да нађемо, ради решења $\underline{k}$ нормалних једначина? Ако узмемо у рачун познате чланове једначина и контролни стубац $\underline{s}$ за случај када се цео рачун изводи по напред објашњеној скраћеној шеми (формулару) — то за прву нормалну једначину треба наћи $\underline{k+2}$ бројева, за другу $\underline{k+1}$, за трећу $\underline{k}$, за четврту $\underline{k-1}$ и т. д., на послетку 3 тако да свега треба наћи:

$$3 + 4 + \ldots . (k + 2) = \underline{K\ (K + 5)} \text{ бројева}$$

После сваке елиминације број једначина и број коефицијената у свакој од њих смањује се за јединицу, а после свршених свију елиминација, остаје једна једначина са једном непознатом. Због тога се целокупан број количина које треба одредити добијају на тај начин, ако напред наведени израз сумирамо за све вредности $\underline{k}$ са, $\underline{1}$ до $\underline{k}$ т. ј., ако саставимо суму:

$$\sum_1^k \frac{k\,(k+5)}{2} = \frac{1}{2}\sum_1^k k^2 + \frac{5}{2}\sum_1^k k$$

Замењујући овде вредности суме квадрата и првих степена припадних бројева и означујући са $\underline{n}$ потпуни број количина које подлеже израчунавању при решењу $\underline{k}$ једначина (нормалних) за $\underline{k}$ непознатих, — добићемо:

$$n = \frac{k\,(k+1)\ (k+8)}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7.)$$

На пример: за решење двеју нормалних једначина биће: n = 10; за три = 22; за четири = 40; за десет = 330; за сто = 181 800 и т. д. Према томе, у сложеним тријангулацијама, које покривају целу територију једноставном мрежом триуглова, готово је немогуће извести строги рачун равнања. Ако се претпостави да је искусан калкулатор у стању решити 10 једначина за један дан, то ће му за решење десетина и стотина бити потребни месеци и године. Истина, Дазе (1824 — 1861), — калкулатор управе за обалско премеравање Пруске (Küstenvermessung), — решио је једаред 86 једначина за $3^1/_2$ месеца, али су такви стрпељиви трудбеници врло ретки. Познато је још и то, да је тај исти Дазе израчунао односе обима круга ка дијаметру његови (П) са 200 децимала за два месеца!

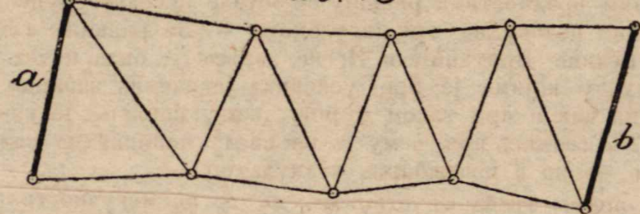
Да би се смањио рачунски посао обично се не равна целокупна мрежа од једном, већ се подели на неколико засебних група, па израчунав једну од њих, добивене у њој вредности не мењају се више, на вези ове са осталим групама, и са овако примљеним вредностима равнају се остале суседне групе док се не изравна целокупна тријангулација. — За равнање тријангулације Велике Британије и Ирске, мрежа је била подељена на 21 групу, у којима је број условних једначина варирао од 12 до 77; па чак и при таком упрошћавању равнање је извршено тек за $2^1/_2$ године, при чему је на послу непрекидно радило у средњем, — по 8 извежбаних калкулатора.

У опште, треба се старати, да се по могућности скрати предстојећи рачунски посао, с тога при рекогносцирању треба тежити томе, да распоред триуглова буде најпростији, како се не би посматрало многе излишне дијагонале. Тада се мрежа може увек поделити на засебне системе, које се лако срачунавају без изнимног утрошка времена. Општи пак рачун равнања примењује се готово и искључиво само на базисним мрежама. Прелаз од малога, непосредно измереног базиса, ка великој основној страни првокласног триугла, обично се изводи сложеним укрштањем дијалоналних праваца са довољно оштрим везујућим угловима. У таквој мрежи не може бити учињено никакво упрошћење без уштрба на тачност срачунавања основне стране, али као за срећу, базисне мреже никад не преставља]у сувишан број условних једначина, те срачунавање њихово није скопчано са великим утрошком времена; али за то утрошени труд са сувишком награђује увереношћу у високу тачност постигнутих резултата.

Када првокласна тријангулација не преставља једноставну мрежу, већ засебне ланце триуглова, или ако се исти узајамно пресецају, то се рачунски посао за њихово равнање знатно упрошћава и скраћује. Бесел је доказао, да, ако се у каквој мрежи не узму све условне једначине које у њој постоје, и по њима се одреде поправке углова, а затим поново изравна сва мрежа, узимајући у обзир и остале условне једначине, заједно са пређашњим, — да ће се у крајњем резултату добити оне исте вредности, као кад би смо рачун извели од једном са свима постојећим условним једначинама. — Али у опште говорећи, таква метода није практична због тога, што прво рачунање за једну групу условних једначина ни у колико не умањује доцнији посао оппггега равнања, али се на практици често може знатно да скрати рачунање **методом постепеног равнања.**

У следећим одељцима објашњене су методе поступног равнања за фигуре, које се најчешће сусрећу на триангулацијама:

1.) **Равнање мреже триуглова међу двема датим основним странама.** — Нека је између основних страна $\underline{a}$ и $\underline{b}$ (сл. 18) постављен непрекидан ланац од $\underline{n}$ триуглова:



сл. 18

У таквом ланцу постоји $\underline{n - 1}$ условна једначина, од којих су $\underline{n}$ једначина фигура, — за све засебне триугле, — и једна базисна једначина. У место укупног решења $n + 1$ једначине може се, без икаквог уштрба по тачност резултата, поступити следећим начином: испрва изравнати све засебне триугле (што, као што је познато, не преставља у суштини никакав труд, због тога, што се ово равнање своди на деобу грешке свакога триугла на три једнака дела, па се затим решава једна базисна једначина. Ово последње пак треба да буде извршено тако, да нове поправке углова не наруше већ израчунате суме углова засебних триуглова. Ово је лако учинити, ако означивши нове поправке углова свакога триугла са $\underline{x}$, $\underline{y}$ и $\underline{z}$, поставимо услов да буде:

$$z = -(x + y)$$

Узмимо да су у ланцу од $\underline{n}$ триуглова сви угли сведени на суму $\underline{180^0 + \varepsilon}$. Базисна условна једначина у том ланцу преставља би се у облику (види стр. и формулу VI)

$$\Sigma \alpha . x - \Sigma \beta . y + v = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad a.,$$

где $\underline{\alpha}$ и $\underline{\beta}$ престављају промене логаритама синуса везујућих углова; $\underline{x}$ и $\underline{y}$ тражене поправке ових углова, а $\underline{v}$ разлику међу логаритмима израчунате дужине основне стране $\underline{a}$ и њене праве дужине (добивене од најближег базиса $\underline{a}$, т. ј.

$$V = \lg a_1 - \lg a$$

Поправке $\underline{x}$, $\underline{y}$ и $\underline{z}$ треба (по теорији најмањих квадрата) да буду нађене под условом још да:

$$\underline{\Sigma \left[x^2 + y^2 + (x + y)^2\right] = \text{minimum}} \quad . \; . \; . \; . \quad b.)$$

Диференцирањем једначина $\underline{a}$ и $\underline{b}$ добићемо

$$\Sigma \alpha \, d x - \Sigma \beta \, d y = 0$$
$$\Sigma (2 x + y) \, dx + \Sigma (x + 2 y) \, dy = 0$$

Ако прву од ових једначина помножимо са неким бројем $\underline{A}$, па производ саберемо са другом, то, — због неодређености броја А — у добивеној суми можемо рачунати за потпуно произвољне величине и $\underline{dx}$ и $\underline{dy}$, па због тога та ће сума бити задовољена само тако ако поставимо да је:

$$2 x + y = A . \alpha$$
$$x + 2 y = A . \beta \text{ одакле је:}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3} A (2 \alpha + \beta) \\ y &= - \tfrac{1}{3} A (\alpha + 2 \beta) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad c.)$$

Замењујући сада ово $\underline{x}$ и $\underline{y}$ за троугле ланца у условној једначини а.) — добићемо:

$$\Sigma \alpha . \tfrac{1}{3} A (2 \alpha + \beta) + \Sigma \beta . \tfrac{1}{3} A (\alpha + 2 \beta) + v = 0$$

или $A . \Sigma \frac{1}{3} \left[\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2\right] + v = 0$

одакле добијемо $A = - \dfrac{V}{\Sigma \sigma}$, (где је $\sigma = \dfrac{1}{3} \left[\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2\right]$.

Замењујући ову вредност за А у формули с.) и имајући у виду да је $z = - (x + y)$ добићемо напослетку следеће поправке за сва три угла свакога троугла:

$$\left.\begin{aligned} x &= - \frac{v}{3 \Sigma \sigma} (2 \alpha + \beta) \\ y &= - \frac{v}{3 \Sigma \sigma} (\alpha + 2 \beta) \\ z &= - \frac{v}{3 \Sigma \sigma} (\alpha - \beta) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 8.,$$

где је: $V = \lg a_1 - \lg a$; $\sigma = \frac{1}{3}[\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2]$, а α и β промене логоритама синуса везујућих углова при промени тих углова за 1″.

За контролу рачунања служи формула:

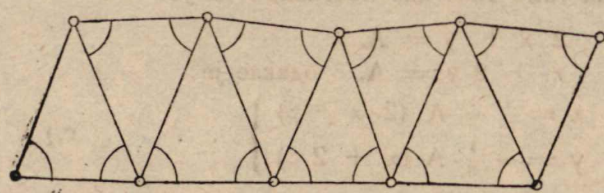
$$\Sigma (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{V^2}{\Sigma \sigma} \quad . \ . \ . \ . \quad 9.,$$

Пример: види прилог бр. 2.

Главни рад при равнању ланца троуглова међу двема датим основним странама састоји се у израчунавању поправака углова по формули бр. 8. За смањење рачунског посла прибегалва се по некад приближним методама, које и ако не дају поправке, чија би сума квадрата била најмања, ипак воде најкраћим путем к циљу.

Ево две овакве методе:

1. Пошто међупросторни* угли (сл. 19) сасвим не улазе у израчунавање завршне стране у ланцу то се ови могу сасвим и да немењају, већ променути само везујуће угле свију три-



сл. 19.

углова ланца. Али да се не би нарушила раније већ изведена сума углова (од 180°) то се поправке везујућих углова у сваком триуглу израчунавају по формули:

$$x = -y = (\alpha - \beta) \cdot \frac{V}{\Sigma (\alpha + \beta)^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad 10.,$$

Ако би смо узели да су поправке везујућих углова у свима триуглима ланца подједнаке, то би се оне могле добити по формули:

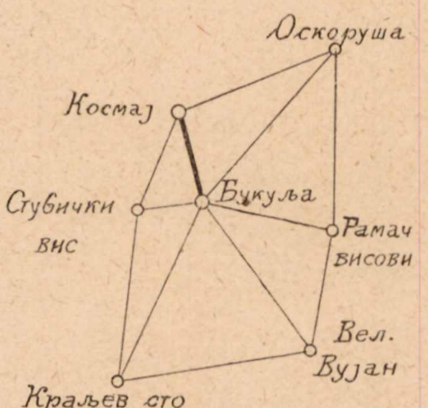
$$x = -y = -\frac{V}{\Sigma (\alpha + \beta)} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad 11.,$$

Слова у овим формулама имају исти значај као и у формули бр. 8. Ради примера, за оба приближна начина, срачунате су поправке за ланац предидућег примера (прилог бр. 2) и оне су исписане у последњем и предпоследњем ступцу поправака. —

* Везујући угли (сл. 19) означени су луцима, они други, који нису луком означени зову се међупросторни угли.

Централна система.

Равнање углова по теорији најмањих квадрата



Дато: $\lg a = 4{,}2743118.6$
$v_1 = c = -0{,}''445$

$$\sigma = \tfrac{1}{3}\left[\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2\right]$$
$$\Sigma\,\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_6 = 4545$$

$$y = -\tfrac{1}{3}\left[A(\alpha + 2\beta) - B\right]$$
$$z = \tfrac{1}{3}\left[A(\beta - \alpha) - 2B\right]$$
$$x = \tfrac{1}{3}\left[A(2\alpha + \beta) + B\right]$$

$$A = \frac{-2n.\,v + v_1\,\Sigma(\beta - \alpha)}{2n.\,\Sigma\sigma - \frac{1}{3}\left[\Sigma(\beta - \alpha)\right]^2}$$

$$B = \frac{3\,v_1\,\Sigma\sigma - v\,\Sigma(\beta - \alpha)}{2n\,\Sigma\sigma - \frac{1}{3}\left[\Sigma(\beta - \alpha)\right]^2}$$

Контрола: $\begin{cases} \dfrac{v^2}{\Sigma\sigma} \\ \Sigma\,(y^2 + z^2 + x^2) \end{cases}$

Сверни углови у центри:

	°	′	″
у △ I	62	11	53.964
„ II	81	46	30.443
„ III	35	28	27.328
„ IV	55	54	36.108
„ V	43	2	46.684
„ VI	81	35	45.028
Σ =	359	59	59.555
C = −			0.445

Назив тачке			Углови — Мерени °	′	″	поправљени ″	cosec α lg α lg α cosec α sin γ lg a cosec α sin β	sin ν lg a sosec α sin β	β α σ	y v x	y^2 v^2 x^2	Изравнати углови °	′	″
							0.297 4651.9							
△ I.	Оскорута	β	30	16	22.291	21.788	4.274 3118.6	9.946 7297.1	+ 36.1	+0 880	0.774	30	16	22.668
	Букуља	γ	62	11	53.964	53.461	4.518 5067.6	4.571 7770 5	·	−0.371	0.137	62	11	53.090
	Квсмај	α	87	31	44.254	44.751	4.571 3730.5	9.999 5960.0	+ 0.9	− 0.509	0.259	86	31	44.242
	ε = 1″. 572 Σ =		180	0	1.509	0.000			891		1.160	180	0	0.000

IV. Рачунање дефинитивних страна

Назив тачке		Изравнати углови: сферни ° ′ ″	Изравнати углови: равни ″	lg cosec β / lg b / lg b cosec β sin γ / lg b cosec β sin α	sin γ / lg b cosec β / sin α
				0·210 5471	
Вич (-ȯ- 2050)	β	38 0 41·4	41·1	4·246 6313	9·862 8171
Голак	γ	46 48 55·1	54·8	4·319 9955	4·457 1784
IV. основичка	α	95 10 24·3	24·0	4·455 4057	9·998 2273
Σ =		180 0 0·9	0·0		
— ε =		0·9			
V =		0·0			
				0·273 1070	
Црни камен	β	32 13 20·3	19·7	4·455 4057	9·664 9005
Вич (-ȯ- 2050)	γ	27 32 3·0	2·4	4·393 4133	4·728 5127
Голак	α	120 14 38·3	37·8	4·664 9711	9·936 4583
Σ =		180 0 1.6	0 0		
— ε =		1.6			
V =		0·0			
				0·030 2512	
Кајмакчалан	β	68 51 44·3	43·1	4·664 9711	9·963 0001
Црни камен	γ	68 16 28·8	7·5	4·663 2225	4·695 2223
Вич (-ȯ- 2050)	α	42 51 50·6	49·3	4·527 8952	9·832 6728
Σ =		180 0 3·7	0·0		
— ε =		3·7			
V =		0·0			

Назив тачке		Изравнати углови: сферни	Изравнати углови: равни	lg cosec β / lg b / lg b cosec β sin γ / lg b cosec β sin α	sin γ / lg b cosec β / sin α
				0·009 7189	
Хисарлак	β	102 4 35·5	34·8	4·644 9312	9·723 5417
Пајик	γ	31 56 42·6	41·9	4·378 1919	4·654 6501
Бачије	α	45 58 43·8	43·2	4·511 4280	9·856 7779
Σ =		180 0 1·9	0·0		
— ε =		1·9			
V =		0·0			
				0·000 0045	
Бошкоп	β	89 44 20·5	20·3	4·511 4280	9·311 5237
Хисарлак	γ	11 49 23·4	23·3	3·822 9563	4·511 4325
Пајик	α	78 26 16·6	16·4	4·502 4291	9·991 0966
Σ =		180 0 0·5	0·0		
— ε =		0·5			
V =		0·0			
				0·061 2517	
Кречковачки вис	β	60 16 48·0	47·3	4·502 5291	9·943 9235
Хисарлак	γ	61 30 22·6	21·8	4·507 7043	4·563 7808
Бошкоп	α	58 12 51·6	50·9	4·493 2114	9·929 4305
Σ =		180 0 2·2	0·0		
— ε =		2·2			
V =		0·0			

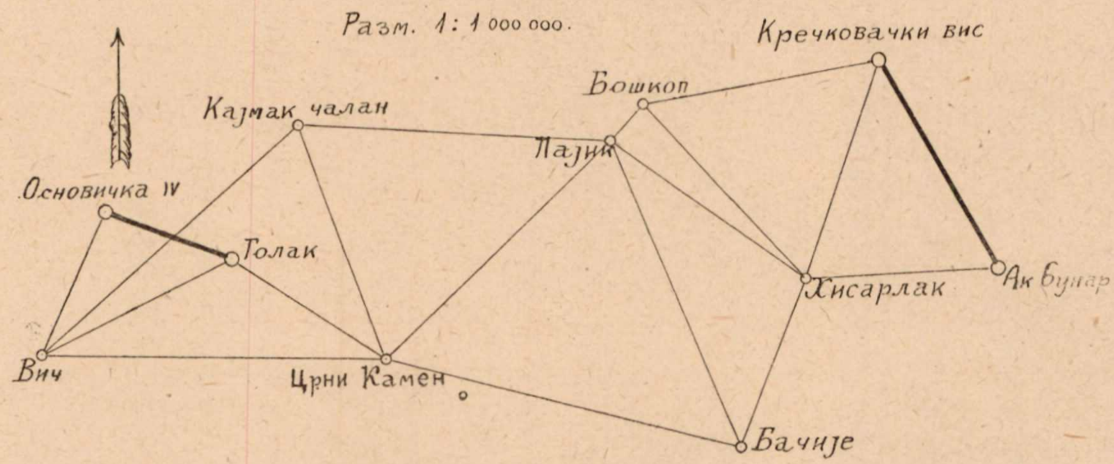
III. Равнање углова по теорији најмањих квадрата.

Назив тачке		Углови Мерени °	′	″	Приближно изравнати углови ″	β α σ	y z x	y^2 z^2 x^2	$\sigma = \frac{1}{3}\,[\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2]$
Вич (-⊙- 2050)	β	38	0	41·3	41·0	+ 26·9	+ 0·156	0·024	$\sigma_1 = \frac{1}{3}\,[1{\cdot}9^2 + 26{\cdot}9^2 + (-1{\cdot}9 + 26{\cdot}9)^2] =$
Голак	γ	46	48	55·2	54·9	.	— 0 086	0·007	$= \frac{1}{3}\,(3{\cdot}61 + 723{\cdot}61 + 625{\cdot}0) = 451$
IV. основичка	α	95	10	24·4	24·1	— 1·9	— 0·070	0·005	
		180	0	0·9	00·0	451		0·036	
Црни камен	β	32	13	20·7	19·6	+ 33·5	+ 0·166	0 028	$\sigma_2 = \frac{1}{3}\,[33{\cdot}5^2 + 12{\cdot}3^2 + (-12{\cdot}3 + 33{\cdot}5)^2] =$
Вич (-⊙- 2050)	γ	27	32	3·7	2·6	.	— 0·139	0·019	$= \frac{1}{3}\,(1122{\cdot}25 + 151{\cdot}29 + 449{\cdot}44) = 574$
Голак	α	120	14	39·0	37·8	— 12·3	— 0·027	0·001	
		180	0	3·4	00·0	574		0·048	
Кајмакчалан	β	68	51	43·8	43·0	+ 8·1	+ 0·119	0·014	$\sigma_3 = \frac{1}{3}\,[8{\cdot}1^2 + 22{\cdot}7^2 + (22{\cdot}7 + 8{\cdot}1)^2] =$
Црни камен	γ	68	16	28 4	27·5	.	+ 0·045	0·002	$= \frac{1}{3}\,(65{\cdot}61 + 515{\cdot}29 + 948{\cdot}64) = 510$
Вич (-⊙- 2050)	α	42	51	50·3	49·5	+ 22·7	— 0·164	0·027	
		180	0	2·5	0·0	510		0·043	
Пајик	β	47	59	36·6	35·7	+ 18·9	+ 0·144	0 021	$\sigma_4 = \frac{1}{3}\,[9{\cdot}2^2 + 18{\cdot}9^2 + (18{\cdot}9 + 9{\cdot}2)^2] =$
Црни камен	γ	65	35	43 0	42·2	.	— 0 029	0·001	$= \frac{1}{3}\,(357{\cdot}21 + 84{\cdot}64 + 789{\cdot}61) = 410$
Кајмакчалан	α	66	13	43·0	42·1	+ 9·2	— 0·115	0·013	
		180	0	2 6	0·0	410		0·035	
Бачије	β	53	19	34·9	32·1	+ 15·7	+ 0·134	0·018	$\sigma_5 = \frac{1}{3}\,[15{\cdot}7^2 + 12{\cdot}9^2 + (15{\cdot}7 + 12{\cdot}9)^2] =$
Пајик	γ	68	10	31·5	28·7	.	— 0·006	0·000	
Црни камен	α	58	30	2·0	59·2	+ 12·9	— 0·127	0·013	

Прилог бр. 2 лист. 1.

Равнање углова у I. класној тријангулацији.

I. Мрежа тачака чији се углови равнају.



II. Приближно срачунате стране.

Назив тачке	Мерени — не Изравнати угли		lg cosec β. lg b lg b sin γ cosec β lg b sin α cosec β.	lg sin γ lg b cosec β lg sin α	Назив тачке	Мерени неизравнати правци		lg cosec β. lg b lg b sni γ cosec β lg b sini α cosec β.	sini γ lg b cosec β sin α
	Сверни ° ′ ″	Приближно изравнато. ″				Сверни ° ′ ″	Приближно изравнати ″		
			0.210 5475					0.009 7189	
Вич (-ȯ-2050) β	38 0 41.3	41.0	4.246 6313	9.862 8173	Хисарлак β	102 4 36 9	34.8	4.644 9332	9.723 5415
Гочак γ	46 48 55.2	54.9	4.319 9962	4.457 1788	Пајик γ	31 56 44.0	41.9	4.378 1936	4.654 6521
IV. основичка α	95 10 24.4	24.1	4.455 4060	9.998 2272	Бачије α	45 58 45.3	43.3	4.511 4303	9.856 7781

9. Изналажење поправака „X“

Правци	A	B	C	D	E	F	G	H	x	lg x
1	-0.181_5								-0.181_5	n9.25888
2	$+0.181_5$	-0.131_3							$+0.050_2$	8.70070
3			$+0.036_7$					-0.071_6	-0.034_9	n8.54288
4		$+0.131_3$	-0.036_7	-0.029_8				$+0.090_4$	$+0.155_2$	9.19089
5				$+0.029_8$				-0.008_8	$+0.011_0$	8.04139
6				-0.029_8				-0.001_3	-0.031_1	n8.49276
7					$+0.038_9$			$+0.006_0$	$+0.044_9$	8.65225
8				$+0.029_8$	-0.038_9			-0.004_7	-0.013_8	n8.13988
9			$+0.036_7$		$+0.038_9$				$+0.075_6$	8.87852
10					-0.038_9				-0.038_9	n8.58995
11			-0.036_7						-0.036_7	n8.56467
12				-0.029_8	$+0.038_9$			-0.020_9	-0.011_8	n8.07188
13		-0.131_3	$+0.036_7$	$+0.029_8$			-0.036_3	$+0.088_0$	-0.013_1	n8.11727
14			-0.036_7		-0.038_9			-0.067_1	-0.142_7	n9.15442
15						$+0.181_1$	$+0.032_6$		$+0.213_7$	9.32980
16		$+0.131_3$				-0.181_1	$+0.003_7$		-0.046_1	n8.66370
17		-0.131_3				$+0.181_1$	-0.041_2		$+0.008_6$	7.93450
18	-0.181_5	$+0.131_3$					$+0.072_8$		$+0.022_6$	8.35411
19	$+0.191_5$					-0.181_1	-0.031_6		-0.031_2	n8.49412
20	-0.181_5					$+0.181_1$	-0.004_9		-0.005_3	n7.72428
21						-0.181_1	$+0.042_5$		-0.138_6	n9.14176
22	$+0.181_5$						-0.037_6		$+0.143_9$	9.15806
v										

Прилог бр. л. 4.

8., Решавање нормалних једначина.

	A	B	C	D	E	F	G	H	v	s
— 0.2627	+ 6.0000	— 2 0000	0	0	0	+ 2.0000	+ 9.5900	0	— 0.3270	+ 15.2630
0.0000	0.77815	n 0.30103	.	.	.	0.30103	0.08182	.	n 9.51455	1.18364
0.0000	— 0.0735	+ 6.0000	+ 2.0000	— 2.0000	0	+ 2.0000	— 10.7700	— 0.5600	— 0.0860	— 5.4160
0.0000	— 0.0596	+ 0.6667	0	0	0	— 0.6667	— 3.1967	0	+ 0.1090	— 5.0867
— 0.3622	0.0000	+ 5.3333	+ 2.0000	— 2.0000	0	+ 2.6667	— 7.5733	— 0.5600	— 0.1950	— 0.3283
— 0.1371	— 0.4830	0.72700	0.30103	n 0.30103	.	0.42597	n 0.87929	n 9.74819	n 9.29003	n 9.51627
0.0000	+ 0.1083	— 0.0372	+ 6.0000	— 6.0000	+ 2.0000	0	— 2.5400	— 1.6400	+ 0.0520	+ 3.8720
— 0.3270	+ 0.0023	— 0.0777	0	0	0	0	0	0	0	0
— 1.0890	— 0.1950	+ 0.1811	+ 6.0000	— 2.0000	+ 2.0000	0	— 2.5400	— 1.6400	+ 0.0520	+ 3.8720
n 0.03703	— 0.7005	— 0.0043	+ 0.7500	— 0.7500	0	+ 1.0000	— 2.8400	— 0.2100	+ 0.0731	— 0.1231
0.77815	n 9.84541	+ 0.0059	+ 5.2500	— 1.2500	+ 2.0000	— 1.0000	+ 0.3000	— 1.4300	+ 0.1251	+ 3.9951
lg A . . 9.25888	0.72700	+ 0 1251	0.72016	n 0.09691	0.30103	n 0.00000	9.47712	n 0.15534	9.09726	0.60153
A = + 0.1815	lg B = 9.11841	+ 0.1929	— 0.0963	+ 2.0000	+ 2 0000	0	+ 2.5400	+ 0.8700	+ 0.1280	+ 7.5380
	B = + 0.1313	9.28533	— 0.1380	0	0	0	0	0	0	0
		0.72016	+ 0.0033	+ 6.0000	+ 2.0000	0	+ 2.5400	+ 0.8700	+ 0.1280	+ 7.5380
	lg C . . . n	8.56517	— 0.0013	+ 0.7500	0	— 1.0000	+ 2.8400	+ 0.2100	+ 0.0731	+ 0.1231
	C = —	0.0367	+ 0.0847	+ 5.2500	+ 2.0000	+ 1.0000	— 0.3000	+ 0.6600	+ 0.0549	+ 7.4149
			— 0.1476	+ 0.2976	— 0.4762	+ 0.2381	— 0.0714	+ 0.3405	— 0.0298	— 0.9512
			n 9.16909	+ 4.9524	+ 2.4762	+ 0.7619	— 0.2286	+ 0.3195	+ 0.0847	+ 8.3661
			0.69481	0.69481	0.39378	9.88190	n 9.35908	9 50447	8.92788	9.92252
		lg D . . .	8.47427	0.0000	+ 6.0000	0	0	+ 13.7200	+ 0.3040	+ 24.0240
		D = +	0.0298	0.0000	0	0	0	0	0	0
				— 0.0585	+ 6.0000	0	0	+ 13.7200	+ 0.3040	+ 24.0240
				+ 0.2139	0	0	0	0	0	+ 0
				+ 0.1554	+ 6.0000	0	0	+ 13.7200	+ 0.3040	+ 24.0240
				9.19145	+ 0.7619	— 0.3809	+ 0.1143	— 0.5448	+ 0.0477	1.5220
				0.60206	+ 5.2381	+ 0.3809	— 0.1143	+ 14.2648	+ 0.2563	+ 22.5020
			lg E . . n	8.58939	+ 1.2381	+ 0.3809	— 0.1143	+ 0.1597	+ 0.0423	+ 4.1830
			E = —	0.0388	+ 4.0000	0	0	+ 14.1050	0.2139	+ 18.3189
					0.60206	.	.	+ 1.14937	9.33031	1.26290
				+ 0.0183		+ 6.0000	— 1.9600	0	+ 0.4330	+ 8.4730
				+ 0.0002		+ 0.6667	+ 3.1967	0	— 0.1090	+ 5.0877
				+ 0.6503		+ 5.3333	— 5.1567	0	+ 0.5420	+ 3.3853
				+ 0.6688		+ 1.3333	— 3.7866	0.2800	0.0075	— 0.1641

7. Образовање нормалних једначина.

	a	b	c	d	e	f	g	h	
a	+ 6.0000	— 2.0000	0	0	0	+ 2.0000	+ 9.5900	0	a
b		+ 6.0000	+ 2.0000	— 2.0000	0	+ 2.0000	— 10.7700	— 0.5600	b
c			+ 6.0000	— 2.0000	+ 2.0000	0	— 2.5400	— 1.6400	c
d				+ 6.0000	+ 2.0000	0	+ 2.5400	+ 0.8700	d
e					+ 6.0000	0	0	+ 13.7200	e
f						+ 6.0000	— 1.9900	0	f
g							+ 66.7085	— 53.8734	g
h								+1532.1586	h

5. Условне једначине.

а) фигура

a)	$+ (2) - (1) + (22) - (20) + (19) - (18) - 0.327 = 0$	. . . . a)
b)	$+ (4) - (2) + (18) - (17) + (16) - (13) - 0.086 = 0$	. . . . b)
c)	$+ (4) - (3) + (11) - (9) + (14) - (13) + 0.052 = 0$	. . . . c)
d)	$+ (5) - (4) + (13) - (12) + (8) - (6) + 0.128 = 0$	. . . . d)
e)	$+ (8) - (7) + (10) - (9) + (14) - (12) + 0.304 = 0$	. . . . e)
f)	$+ (16) - (15) + (21) - (20) + (19) - (17) + 0.433 = 0$	. . . . f)

б) полуса

g) . . . . $+ 2.210\,(19) - 2.210\,(18) - 0.260\,(16) + 0.260\,(13) + 2.970\,(22) - 2.970\,(21) -$
$- 0.340\,(22) + 0.340\,(20) - 2.880\,(18) + 2.880\,(17) - 2.280\,(15) + 2.280\,(13) - 0.120 = 0.$

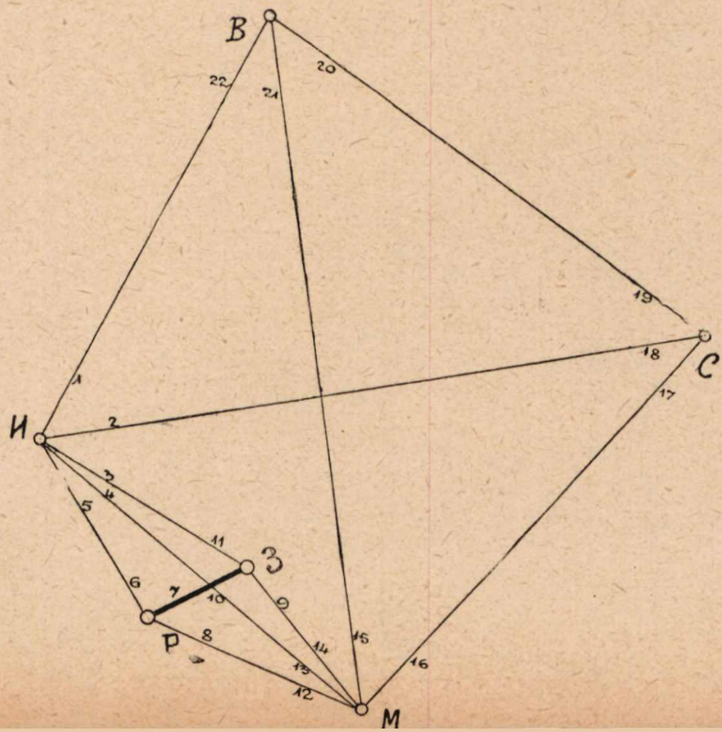
h) . . . . $+ 1.140\,(8) - 1.140\,(7) + 4.520\,(5) - 4.520\,(3) + 21.210\,(14) - 21.210\,(13) -$
$- 5.040\,(14) + 5.040\,(12) - 0.310\,(7) + 0.310\,(6) - 21.770\,(4) + 21.770\,(3) + 6.110 = 0.$

Прилог бр. 1. л. 1.

Врањски Базис.

Равнање праваца по теорији најмањих квадрата.

1. Скица тачака



2. Посматрани правци

Тек. број правца	Правци °	′	″	Тек. број правца	Правци °	′	″
Свети Илија = И				Мотина = М			
1	0	0	0.000	12	0	0	0.000
2	55	25	59.950	13	19	59	56.166
3	96	24	26.358	14	22	39	59.712
4	101	55	52 505	15	59	43	2.758
5	121	23	55.097	16	114	16	1.760
Ратаје = Р				Стрешер = С			
6	0	0	0.000	17	0	0	0.000
7	81	52	13.375	18	36	14	3.383
8	143	32	1.588	19	79	51	41.749
Златоко п = З				Влахиња = В			
9	0	0	0.000	20	0	0	0.000
10	95	40	12.521	21	45	35	21.928
11	168	48	30.424	22	80	56	23.510

3. Образовање троуглова

Правци	°	′	″	Тек. број праваца	°	′	″
Δ И. В. С.				Δ И. М. I.			
2—1	55	25	59.950	5—4	19	28	2.592
a) 22—20	80	56	23.510	d) 13—12	16	59	56.166
19—18	43	37	38.366	8—6	143	32	1.588
Σ =	180	0	1.826	Σ =	180	0	0.346
ε =	—		2·153	ε =	—		0.218
v =			— 0·327	v =	+		0·128
Δ И. С. М.				Δ I. II. M.			
4—2	45	29	52.555	8—7	61	39	42.213
b) 18—17	36	14	3.383	c) 10—9	95	40	12.521
16—13	97	16	5.594	14—12	22	39	59.712
Σ =	180	0	1.532	Σ =	180	0	0.446
ε =	—		1.618	ε =	—		0.142
v =	—		0.686	v =	+		0.304
Δ И. II. M.				Δ M. B. C.			
4—3	5	31	26.147	16—15	54	32	59.002
c) 11—9	168	48	30.424	21—20	45	35	21.928
14—13	5	40	3.546	19—17	79	51	41.749
Σ =	180	0	0.117	Σ =	180	0	2.679
=	—		0.065	ε =	—		2.246
v =	+		0.052	v =	+		0.433

□ И I II M са полусом: И

$$\frac{и \cdot в}{и \cdot с}\;\frac{и \cdot с}{и \cdot м}\;\frac{им}{ив} = \frac{\sin(19-18)\cdot\sin(16-13)\cdot\sin(22-21)}{\sin(22-20)\cdot\sin(18-17)\cdot\sin(15-13)} = 1$$

ројитељ		Поправке за 1″	Именитељ		Поправке за 1″
lg sin(19—18)	9.838 8296·9	+ 22·1	lg sin(22—20)	9.994 5474·9	+ 3·4
lg sin(16—13)	9.996 4962·5	— 2·6	lg sin(18—17)	9.771 5523·4	+ 28·8
lg sin 22—21)	9 762 3603·0	+ 29·7	lg sin(15 - 13)	9 831 4838·3	+ 22·8
	9.597 6835·4			9.597 6836·6	
		v = —	1·2		

□ И I II M са полусом: II

$$\frac{II\,M}{II\,I}\;\frac{II \cdot I}{II\,И}\;\frac{II\,И}{II\,M} = \frac{\sin(8-7)\;\sin(5-3).\;\sin(14-13)}{\sin(14-12)\;\sin(7-6)\;\sin(4-3)} = 1.$$

Бројитељ			Именитељ		
lg sin (8—7)	9.944 5686·6	+ 11·4	lg sin(14—11)	9.585 8755·9	+ 50·4
lg sin (5 -3)	9.625 8071·0	+ 45·2	lg sin (7—6)	9.995 6135·5	+ 3·1
lg sin(14—13)	8.994 5720·1	+ 212·1	lg sin (4—3)	8.983 4525·2	+ 217·7
	8.564 9477·7			8.564 9416·6	
		v = +	61.1		

3. Образовање коефицијената условних једначина

Правци	a	b	c	d	e	f	g	h	Добивене поправке правaца
1	− 1								
2	+ 1	− 1							
3			− 1					+ 17.250	
4		+ 1	+ 1	− 1				− 21.770	
5				+ 1				+ 4.520	
6				− 1				− 0.310	
7					− 1			− 1.450	
8				+ 1	+ 1			+ 1.140	
9			− 1		− 1				
10					+ 1				
11			+ 1						
12				− 1	− 1			+ 5.040	
13		− 1	− 1	+ 1			+ 2.540	− 21.210	
14			+ 1		+ 1			+ 16.170	
15						− 1	− 2.280		
16		+ 1				+ 1	− 0.260		
17		− 1				− 1	+ 2.880		
18	− 1	+ 1					− 5.090		
19	+ 1					+ 1	+ 2.210		
20	− 1					− 1	+ 0.340		
21						+ 1	− 2.970		
22	+ 1						+ 2.630		
v	− 0.327	− 0.086	+ 0.052	+ 0.128	+ 0.304	+ 0.433	− 0.120	+ 6.110	

0.56730							
			+ 3.8095	— 1.3129	+ 0.0076	+ 0.6633	+ 4.3104
lg F . . n 9.25800			+ 0.1172	— 0.0352	+ 0.0491	+ 0.0130	+ 1.2871
F = — 0.1811			+ 3.6923	— 1.2777	— 0.0415	+ 0.6503	+ 3.0233
			0	0	0	0	0
			+ 3.6923	— 1.2777	— 0.0415	+ 0.6503	+ 3.0233
			0.56730	n 0.10643	n 8.61857	9.81311	0.49049
	+ 0.2266			+ 66.7085	— 53.8734	— 0.1200	+ 9.5751
	+ 0.3476			+ 15.3282	0	— 0.5227	+ 24.3955
	+ 0 5742			+ 51.3803	— 53.8734	+ 0.4027	— 14.8204
	9.75906			+ 10.7542	+ 0.7952	+ 0.2769	+ 0.4662
	1.60375			+ 40.6260	— 54.6686	+ 0.1258	— 15.2866
	lg G = n 8.15531			+ 0.0105	— 0.0817	+ 0.0071	+ 0.2283
	G + — 0.0143			+ 40.6089	— 54.5869	+ 0.1186	— 15.5149
				+ 0.0105	— 0.0147	+ 0.0039	— 0.3862
				+ 40.5983	— 54.5721	+ 0.1225	— 15.1287
				0	0	0	0
				+ 40.5983	— 54.5721	+ 0.1225	— 15.1287
				+ 0.4421	+ 0.0144	— 0.2250	— 1.0462
				+ 40.1562	— 54.5865	+ 0.3476	— 14.0825
				1.60375	n 1.73708	9.54108	n 1.14867
		0.76667			+ 1532.1586	+ 6.1100	+ 1496.7852
		3 14852			0	0	0
		lg H n 7.61814			+ 1532.1586	+ 6.1100	+ 1496.7852
		H = — 0.0041			+ 0.0588	+ 0.0205	+ 0.0345
					+ 1532.0998	+ 6.0895	+ 1496.7507
					+ 0.3895	+ 0.0341	— 1.0882
					+ 1531.7103	+ 6.1236	+ 1497.8389
					+ 0.0206	+ 0.0055	+ 0.5397
					+ 1531.6897	+ 6.1181	+ 1497.2991
					+ 49.7378	+ 0.7544	+ 64.5983
					+ 1481.9519	+ 5.3636	+ 1432.7008
					+ 0.0005	— 0.0073	— 0.0340
					+ 1481.9514	+ 5.3709	+ 1432.7348
					+ 74.2027	— 0.4725	+ 19.1426
					+ 1407.7487	+ 5.8434	+ 1413.5922
					3.14852	0.76667	

10. Рачунска проба.

Правци	a	b	c	d	e	f	g	h
1	$+0.181_5$							
2	$+0.050_2$	-0.050_2						
3			$+0.034_9$					-0.602_0
4		$+0.155_2$	$+0.155_2$	-0.155_2				-3.378_1
5				$+0.011_0$				$+0.049_1$
6				$+0.031_1$				-0.009_6
7					-0.044_9			-0.065_1
8				-0.013_8	-0.013_8			-0.015_7
9			-0.075_6		-0.075_6			
10					-0.038_9			
11			-0.036_7					
12				$+0.011_8$	$+0.011_8$			-0.059_8
13		$+0.013_1$	$+0.013_1$	-0.013_1			-0.033_3	$+0.277_9$
14			-0.142_7		-0.142_7			-2.307_4
15						-0.213_7	-0.487_2	
16		-0.046_1				-0.046_1	$+0.012_0$	
17		-0.008_6				-0.008_6	$+0.024_8$	
18	-0.022_6	$+0.022_6$					-0.115_0	
19	-0.031_2					-0.031_2	-0.069_0	
20	$+0.005_3$					$+0.005_3$	-0.001_8	
21						-0.138_6	$+0.411_7$	
22	$+0.143_9$						$+0.378_5$	
v	$+0.327_1$	$+0.086_0$	-0.051_8	-0.128_2	-0.304_1	-0.432_9	$+0.120_7$	-6.110_4

v =		0.0			
				0.273 1075	
Црни камен	β	32 13 20.7	19.6	4.455 4060	9.664 9011
Вич (-○- 2050)	γ	27 32 3.7	2.6	4.393 4147	4.728 5 36
Толак	α	120 14 39.0	37.8	4.664 9719	9.936 4583
Σ =		180 0 3.4	0.0		
— ε =		1.6			
v =		1.8			
				0.030 2513	
Кајнак чалан	β	68 51 33.8	43.0	4.664 9719	9.968 0001
Црни камен	γ	68 16 28.4	27.5	4.663 2233	4.695 2232
Вич	α	42 51 50.3	29.5	4.527 8964	9.832 6731
Σ =		180 0 2.5	0.0		
— ε =		3.7			
v =		1.2			
				0.128 9726	
Пајик	β	47 59 36.6	35.7	4.527 8964	9.959 9784
Црни камен	γ	65 46 43.0	42.2	4.616 8474	4.656 8690
Кајмак чалан	α	66 13 43.0	42.1	4.618 3657	9.961 4967
Σ =		180 0 2.6	0.0		
— ε =		3.3			
v =		0.7			
				0.095 8027	
Тачије	β	53 19 34.9	32.1	4.618 3657	9.967 6983
Пајик	γ	68 10 31.5	28.7	4.681 8667	4.714 1684
Црни камен	α	58 30 2.0	29,59.2	4.644 9332	9.930 7647
Σ =		180 0 8.4	0.00		
— ε =		4.3			
v =		+ 4.1			

v =		+ 4.3			
				0.000 0045	
Башкот	β	89 44 21.9	20.3	4.511 4303	9.311 5236
Хисарлак	γ	11 49 24.8	23.3	3.822 9584	4.511 4348
Тајик	α	78 26 11.9	16.4	4.502 5314	9.991 0960
Σ =		180 0 4.6	0.0		
— ε =		0.5			
v =		+ 4.1			
				0.061 2518	
Кречовачки	β	60 16 47.0	47.2	4.502 5314	9.943 9234
вис Хисарлак	γ	61 30 21.6	21.8	4.507 7067	4.563 7832
Бошкоц	α	58 12 50.8	51.0	4.493 2139	9.929 4307
Σ =		179 59 59.4	0.0		
— ε =		2.2			
v =		— 2.8			
				0.045 3940	
Ак-дунар вис	β	64 14 25.4	26.2	4.493 2139	9.864 7077
Кречовачки	γ	47 4 55.9	55.9	4.403 3156	4.538 6079
вис Хисарлак	α	68 39 36.9	37.8	4.507 7631	9.969 1551
Σ =		169 59 67.4	0.0		
— ε =		1.9			
v =		— 4.5			

Хисарлак	β	102	4	36·9	34·8	− 4·5	+0·033	0·001
Пајик	γ	31	56	44·0	41·9	·	+0·076	0·006
Ђачије	α	45	58	45·3	43·3	+20·3	−0·109	0·012
		180	0	6·2	0·0	227		0·019
Бошкоп	β	89	44	21·9	20·3	+ 0·1	+0·013	0·000
Хисарлак	γ	11	49	24·8	23·3	·	+0·013	0·000
Пајик	α	78	26	17·9	16·4	+ 4·3	−0·026	0·001
		180	0	4·6	0·0	13		0·001
Кречовачки вис	β	60	16	47·0	47·2	+12·0	+0·112	0·012
Хисарлак	γ	61	30	21·6	21·8	·	+0·003	0·000
Бошкоп	α	58	12	50·8	51·0	+13·0	−0·115	0·013
		179	59	59·4	0·0	313		0·025
Ак-бунар вис	β	64	15	25·4	25·8	+10·2	+0·082	0·007
Кречовачки вис	γ	47	4	55·7	56·1	·	−0·005	0·000
Хисарлак	α	68	39	37·7	38·1	+ 8·3	−0·082	0·007
		179	59	58·8	0·0	172		0·014

$$\sigma_6 = \tfrac{1}{3}\,[20{\cdot}3^2 + 4{\cdot}5^2 + (20{\cdot}3 - 4{\cdot}5)^2] = \tfrac{1}{3}\,(412{\cdot}09 + 20{\cdot}25 + 249{\cdot}67) = 227$$

$$\sigma_7 = \tfrac{1}{3}\,[0{\cdot}1^2 + 4{\cdot}3^2 + (0{\cdot}1 + 4{\cdot}3)^2] = \tfrac{1}{3}\,(0{\cdot}01 + 18{\cdot}49 + 19{\cdot}36) = 13$$

$$\sigma_8 = \tfrac{1}{3}\,[12{\cdot}0^2 + 13{\cdot}0^2 + (12{\cdot}0 + 13{\cdot}0)^2] = \tfrac{1}{3}\,(144{\cdot}0 + 169{\cdot}0 + 625{\cdot}0) = 313$$

$$\sigma = \tfrac{1}{3}\,[10{\cdot}2^2 + 8{\cdot}3^2 + (10{\cdot}2 + 8{\cdot}3)^2] = \tfrac{1}{3}\,(104{\cdot}04 + 68{\cdot}89 + 342{\cdot}25) = 172$$

$$\Sigma\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8 + \sigma_9 = 3080$$

$\lg a_1 \ldots 4 \quad 507 \quad 7631$

$\lg a_2 \ldots 4 \quad 507 \quad 7603$

$V = \lg a_1 - \lg a = \quad + 28$

$$\frac{V}{3\,\Sigma\sigma} = +\,0{\cdot}00$$

$$\Sigma\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0{\cdot}252$$

$$\frac{V^2}{\Sigma\sigma} = 0{\cdot}254$$

$$x = -\frac{V}{3\,\Sigma\sigma}\,(2\,\alpha + \beta)$$

$$y = +\frac{V}{3\,\Sigma\sigma}\,(\alpha + 2\,\beta)$$

$$z = +\frac{V}{3\,\Sigma\sigma}\,(\alpha - \beta)$$

Црни камен	γ	65 46 43·2	42·1	4·616 8458	4·656 8675
Кајмакчалан	α	66 13 43·1	42·0	4·618 3541	9·961 4966
Σ =		180 0 3·3			
— ε =		3·3			
V =		0·0			

Кречковачки вис	γ	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Хисарлак	α	68 39 38·6	38·0	4·507 7603	9·969 1550
Σ =		1·9	0·0		
— ε =		1·9			
V =		0·0			

				0·095 8025	
Бачије	β	53 19 33·6	32·2	4·618 3641	9·967 6983
Пајик	γ	68 10 30·2	28·7	4·681 8649	4·714 1666
Црни камен	α	58 30 0·5	29 59·1	4·644 9312	9·930 7645
Σ =		180 0 4·3	0·0		
— ε =		4·3			
V =		0·0			

△ II.	Оскорута α	34 56 14.782	14.034	4.378 3007.9	9.757 9128.5	+ 30.1	−0.921	[illegible]	34 56 [illegible]
	ε = 2". 235 Σ =	180 0 0.446	0.000			892		1.315	180 0 0.000
				0.198 0730.4					
△ III.	Вел. Вујан β	39 19 42.718	41.892	4.378 3007.9	9.763 6790.6	+ 25.7	+0.536	0.287	39 19 42.428
	Вукуља γ	35 28 27.729	26.902	4.340 0528.9	4.576 3738.3	.	− 0.325	0.105	35 28 26.577
	Паtћ вис. α	105 11 52.033	51.206	4.560 9137.3	9.984 5399.0	− 5.8	− 0.211	0.044	105 11 50.995
	ε = 1". 279 Σ =	180 0 2.480	0.000			363		0.437	180 0 0.000
				0.111 5918.1					
△ IV.	Краљ сто β	50 39 40.416	39.013	4.560 9137.3	9.918 1117.9	+ 17.3	+0.477	0.227	50 39 39.490
	Букуља γ	55 54 36.364	34.960	4.590 6173.3	4.672 5055.4	.	−0.068	0.004	55 54 34.892
	Вел Вујан α	73 25 47.431	46.027	4.654 0837.4	9.981 5782.0	+ 6.3	−0.409	0.167	73 25 45.618
	ε = 3". 445 Σ =	180 0 4.211	0.000					0.399	180 0 0.000
				0.040 3080.3					
△ V.	Стубич вис. β	114 18 20.576	19.613	4.654 0837.4	9.834 1582.8	− 9.5	+0.360	0.129	114 18 19.973
	Букуља γ	43 2 47.151	46.188	4.528 5500.5	4.694 2917.7	.	+0.820	0.672	43 2 47.008
	Краљ. сто α	22 38 55.162	54.199	4.279 9369.7	9.585 5452.0	+50.5	− 1.180	1.392	22 38 53.019
	ε = 1." 487 Σ =	180 0 2.889	0.000					2.193	180 0 0.000
				0.118 1102.5					
△ VI.	Коспај β	49 37 50.749	50.532	4.279 9369.7	9.995 3111.1	+ 17.9	+0.644	0.414	49 37 51.167
	Букуља γ	81 35 44.945	44.728	4.393 3583.3	4.398 0472.2	.	+0.076	0.057	81 35 44.804
	Стубич вис α	48 46 24.957	24.740	4.274 3289.4	9.876 2877.2	+ 18.4	−0.720	0.518	48 46 24.020
	ε = 0." 899	0.651	0.000					0.990	180 0 0.000

Ма каква система ових поправака да је уведена, тријангулација ће бити изравната, што се лако дâ проконтролисати непосредним срачунавањем; но без сваке је сумње најрационалније израчунавати поправке по формулама бр. 8.), које су засноване на теорији најмањих квадрата. Ове пак последње две формуле (бр. 10., и 11.,), могу се употребити при срачунавању поправака углова у ланцима другокласних триуглова са којима су везани првокласни ланци и т. д.

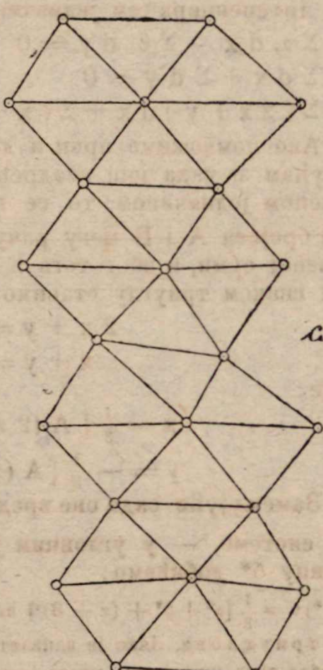
Из наведеног примера лако је видети да је сума поправака, — које су изведене по првој методи (форм. бр. 8.), — најмања, према суми оних поправака изведерих по другим двема (формуле бр. 10.) и б. 11.), упрошћеним методама, не гледећи на то, што су поправке међу просторних углова у њима = 0.

Ако и тријангулацији постоје не 2 већ више базиса или основних страна, то се обично равна сваки ланац међу најближним им основним странама засебно (форм. бр. 8.); за укупно равнање неколико базиса или основних страна можемо се користити, формулама које је извео Струве („Дуга меридијана," I. 161 — 165), или формулама које је такође дао руски геодета Обломјевки („Занискви В. Т. О. Га. штаба Л, 9 — 16.).

Централна система.

У тригонометријским мрежама па и ланцима веома се често сусрећемо са системом триуглова распоређених око једне централне тачке сл. 20; таква система триуглова назива се: централна. Ако се система састоји из $\underline{n}$ триуглова, то ако би се она узела чак и засебно имала би $\underline{n+1}$ условну једначину, од којих је n једначина фигуре, према броју троуглова а једна једначина полуса. У место да се решава $\underline{n+1}$ једначина, може се без сваког уштрба по тачност резултата применити у даном случају ова упрошћена метода равнања:

Прво се у свима триуглима системе сума углова своди на 180^0 простом деобом разлика $A+B+C-180^0$ на три једнака дела. Са овим равним углима, а полазећи од ма које везујуће стране $\underline{a}$,



сл. 20.

израчунавају се све остале. Разлика између израчунате стране — везујуће — (a_1) и испрва узете неке величине (a) даје услову једначину потпуно сличну базисној то ј. овакву:

$$\Sigma \alpha . x - \Sigma \beta . y + v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a.)$$

где $\underline{\alpha}$ и $\underline{\beta}$ и у овом случају престављају промене логоритама синуса везујућих углова; $\underline{x}$ и $\underline{y}$ — тражене поправке одговарајућих углова а

$$v = \lg a_1 - \lg a$$

Поправке пак међупросторних углова, т. ј. у даном случају углова око централне тачке (полуса) треба да задовоље ове једначине:

$$z = -(x + y)$$

$$z_1 + z_2 + \ . \ . \ . + z_n = 360^0 - \Sigma C = v_1 \quad . \quad . \quad . \quad b.)$$

Испуњење црвог услова потребно је с тога да се не би мењала, већ приведена ка 180^0, сума углова у троуглима, а оног другог за то, да би сума углова око полуса $C_1 + C_2 + \ . \ . \ . \ C_n$ била равна $360.^0$

Једначине a.) и b.) треба да буду решене под условом

$$\Sigma [x^2 + y^2 + (x + y)^2] = \text{minimum} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c.)$$

Диференцирањем једначина a.), b.) i c.) добићемо:

$$\Sigma \alpha . \, d\, x - \Sigma \beta . \, d\, y = 0$$

$$\Sigma\, d\, x + \Sigma\, d\, y = 0$$

$$\Sigma (2 x + y) \, d\, x + \Sigma (x + 2 y) \, d\, y = 0$$

Ако помножимо први и други од ових једначина са одговарајућим за сада још неодређеним бројевима A i B и саберемо са трећом једначином, то се величине $\underline{dx}$ i $\underline{dy}$, због неодређености бројева A i B могу рачунати као потпуно произвољни у добивеној суми, и због тога ће она, задовољена само тако, бити ако у сваком триуглу ставимо:

$$2 x + y = A \alpha + B$$

$$x + y = - A \beta + B$$

одакле:

$$\left. \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3} [A (2 \alpha + \beta) + B] \\ y &= - \tfrac{1}{3} [A (\alpha + 2 \beta) - B] \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d$$

Замењујући сада ове вредности за $\underline{x}$ i $\underline{y}$, — за све триугле наше системе, — у угловним једначинама a.) i b.) и уводећи величину б* добићемо:

*) $б = \frac{1}{3} [\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + 3)^2]$ зове се грешка тригонометријске везе триуглова. Лако је запазити да она зависи од величине везујучег угла, због тога што у њу, улазе само $\underline{\alpha}$ и $\underline{\beta}$, које су тим веће, што су везујући угли A i B мањи.

$$A\,\Sigma\sigma - \tfrac{1}{3}B\,\Sigma(\beta-\alpha) + v = 0$$
$$\tfrac{1}{3}A\,\Sigma(\beta-\alpha) - \tfrac{2}{3}Bn + v_1 = 0$$

Решењем ових двеју једначина са двема непознатим A і B лако је наћи да је:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{-2nv + v_1\Sigma(\beta-\alpha)}{2n\Sigma\sigma - \frac{1}{3}[\Sigma(\beta-\alpha)]^2} \\ B &= \frac{3v_1\Sigma\sigma - v\Sigma(\beta-\alpha)}{2n\Sigma\alpha - \frac{1}{3}[\Sigma(\beta-\alpha)]^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 12.)$$

у којима је

$$v = \lg a_1 - \lg a$$
$$v_1 = \Sigma C - 360^0 \text{ и } \sigma = \tfrac{1}{3}[\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha+\beta)^2]$$

Имајући још из раније у виду

$$z = -(x+y)$$

добићемо на послетку следеће поправке за сва три угла свакога триугла централне системе:

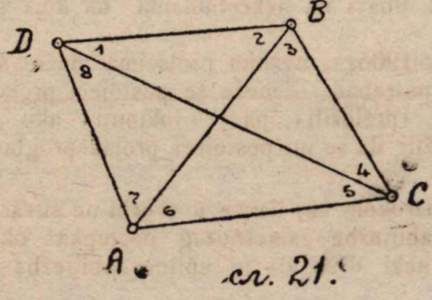
$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3}[A(2\alpha+\beta)+B] \\ y &= -\tfrac{1}{3}[A(\alpha+2\beta)-B] \\ z &= \tfrac{1}{3}[A(\beta-\alpha)-2B] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 13.$$

у којима се A і B изражава по формули 12.). А за контролу добро је користити се формулом:

$$E(x^2+y^2+z^2) = -Av + Bv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14.)$$

Пример: види прилог бр. 3.

Геодетски четвороугао. — Четвороугао са дијагоналама преставља фигуру, са којом се често сусрећемо на тријангулацијама, међутим равнање његово по општим правилима т. ј. помоћу решења све његове четири условне једначине (три једначине фигуре и једне полусне) изискује мање од три часа времена. — Метода пак за равнање коју ниже приводимо даје исте резултате и у суштини преставља претходно избацивање непознатих и допушта изравнање углова у сваком четвороуглу за један час.



сл. 21.

Означимо 8 углова у четвороуглу сукцесивним цифрама, као што је то показато у сл. 21, а њихове тражене поправке са истим цифрама али у загради.

Означивши грешке троуглова OBC, BCA и CAO, са одговарајућим v_1, v_2 и v_3, имаћемо следеће три условне једначине углова:

$$(1) + (2) + (3) + (4) \ldots\ldots\ldots\ldots + v_1 = 0$$
$$(3) + (4) + (5) + (6) \ldots\ldots + v_2 = 0$$
$$(5) + (6) + (7) + (8) + v_3 = 0$$

од којих се по општим правилима добијају нормалне једначине:

$$\begin{aligned} 4A + 2B \quad\quad\quad + v_1 &= 0 \\ 2A + 4B + 2C + v_2 &= 0 \\ 2B + 4C + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

а решење њихово даје:

$$A = \frac{1}{8}(-3v_1 + 2v_2 - v_3)$$

$$B = \frac{1}{8}(2V_1 - 4V_2 + 2V_3)$$

$$C = \frac{1}{8}(-V_1 + 2V_2 - 3V_3)$$

(Наставиће се.)

O gruntovnoj zabilježbi povedenog postupka oko uredjenja nuždnih prolaza.

Priopćuje **Hinko Več** kr. ravnatelj grutovnice u. m.

Prigodom tehničkih radnja oko agrarne reforme, a naročito diobe zajedničkih posjeda često će u Hrvatskoj i Slavoniji biti potrebno osnovati privozne puteve uporabom zakona od 6/4. 1906. o nužnim prolazima. Kako tumači toga zakona »svrhu« gruntovne zabilježbe povedenog postupka oko uredjenja nužnih prolaza dovoljno ne razjasnuju, odnosno je uredovanje nejednako i nepotpuno — na štetu same stvari. Neka mi stoga bude dozvoljeno, na ovom mjestu predmet pobliže ocrtati.

Po §. 17. citiranog zakona ima upravna oblast prve molbe (kr. kotarska oblast, gradsko poglavarstvo) čim odluči da se postupak oko uredjenja nužnog postupka povesti ima, odrediti »zabilježbu povedenog postupka u gruntovnici«, te zamoliti nadležnu gruntovnu oblast, da tu zabilježbu obavi na nekretninama, na koje se odnosi postupak.

Temeljem zakona od 6/4. 1906. o nužnim prolazima može se nužni prolaz »odrediti« jer je potreban — može se postojeći prolaz kao neprikladan »proširiti« ili »preložiti«, pa i »dokinuti« ako je suvišan; a mogu stranke i tražiti, da se jur postojeći prolaz proglasi „nužnim prolazom".

Viševrstne ove odredbe uzrokom su, da se u tvorbi ne shvaća jednako potreba gruntovne zabilježbe zametnutog postupka oko uredjenja nužnih prolaza, pa neki drže da je upitna zabilježba u