Nestalo je velikog Vojvode Mišića, ali će njegov duh večito lebdeti nad nama u uspomeni na velika dela njegova.

Slava mu!

S. P. Bošković.

О равнању тријангулације у опште.

Превод из Геодезије ђенерала В. В. Витковског.

Ст. Бошковић.

Решавање условних једначина.

(Свршетак).

Поправке углова пак добијају се по формулама:

$$(1)=(2)=\frac{1}{8}(-3v_1+2v_2-v_3)=-\frac{1}{4}v_1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}v_1-v_2+\frac{1}{2}v_3\right)$$

$$(3)=(4)=\frac{1}{8}(-v_1-2v_2+v_3)=-\frac{1}{4}v_1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}v_1-v_2+\frac{1}{2}v_3\right)$$

$$(5)=(6)=\frac{1}{8}(v_1-2v_2-v_3)=-\frac{1}{4}v_3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}v_1-v_2+\frac{1}{2}v_3\right)$$

$$(7)=(8)=\frac{1}{8}(-v_1+2v_2-3v_3)=-\frac{1}{4}v_3-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}v_1-v_2+\frac{1}{2}v_3\right)$$

или ако ради краткоће означимо:

$$u=\frac{1}{2}v_1-v_2+\frac{1}{2}v_3$$

имаћемо:

$$\left.\begin{aligned}(1)=(2)&=-\frac{v_1+u}{4}\\(3)=(4)&=-\frac{v_1-u}{4}\\(5)=(6)&=-\frac{v_3-u}{4}\\(7)=(8)&=-\frac{v_3+u}{4}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad 16.)$$

Кад по овим формулама добивене поправке уведемо, онда састављамо условну једначину полуса. Ако означимо нове поправке ових истих 8 углова одговарајуће са x, y, ; x_2 y_2 ; x_3 y_3 и x_4 y_4, то ће се ова условна једначина изразити (ако за полус узмемо уображене тачке пресека дијагонала):

$$\Sigma\,\alpha.\,x-\Sigma\,\beta.\,y+v=o\quad\ldots\ldots\quad a.)$$

Да се пак не би нарушило већ извршено равнање по угловним условима триуглова, то нове поправке $\underline{x}$ и $\underline{y}$ треба да задовоље и ове једначине:

$$\begin{array}{rl} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 & = 0 \\ x_2 + y_2 + x_3 + y_3 & = 0 \\ x_3 + y_3 + x_4 + y_4 & = 0 \end{array}$$

и означив ради краткоће:

$$\begin{array}{ll} x_1 + y_1 = \ \ 2\,t & \qquad x_1 - y_1 = 2\,t_1 \\ x_2 + y_2 = -2\,t & \qquad x_2 - y_2 = 2\,t_2 \\ x_3 + y_3 = +2\,t & \qquad x_3 - y_3 = 2\,t_3 \\ x_4 + y_4 = -2\,t & \qquad x_4 - y_4 = 2\,t_4 \end{array}$$

Предзадња једначина даће:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = +t + t_1 & \qquad y_1 = +t - t_1 \\ x_2 = -t + t_2 & \qquad y_2 = -t - t_2 \\ x_3 = +t + t_3 & \qquad y_3 = +t - t_3 \\ x_4 = -t + t_4 & \qquad y_4 = -t - t_4 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 20.)$$

Замењујући ове вредности у једначини а.) добићемо:

$$\alpha_1 (t + t_1) + \alpha_2 (-t + t_2) + \alpha_3 (t + t_3) + \alpha_4 (-t + t_4) -$$
$$- \beta_1 (t - t_1) - \beta_2 (-t - t_2) - \beta_3 (t - t_3) - \beta_4 (-t - t_4) + \nu = 0$$

или сабирајући чланове са t_1, t_2, t_3 . . . .

$$\{(\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_3 - \beta_3) - (\alpha_4 - \beta_4)\}\ t +$$
$$+ (\alpha_1 + \beta_1)\, t_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, t_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\, t_3 + (\alpha_4 + \beta_4)\, t_4 + \nu = 0 \ldots \text{b.)}$$

Но како једначина а.) треба да буде решена под условом да сума квадрата поправака буде најмања, то сагласно са уобичајеним означењем имамо:

$$(t + t_1)^2 + (t - t_1)^2 + (t - t_2)^2 + (t + t_2)^2 + (t + t_3)^2 + (t - t_3)^2 + (t - t_4)^2 +$$
$$+ (t + t_4)^2 = \text{minimum}$$

или после подизања на квадрат и свођења:

$$4\,t^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 = \text{minimum}.$$

Диференцирајући једначину b.) и c.) добићемо:

$$[(\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_3 - \beta_3) - (\alpha_4 - \beta_4)].\ d\,t +$$
$$+ (\alpha_1 + \beta_1)\, dt_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, dt_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\, dt_3 + (\alpha_4 + \beta_4)\, dt_4 = 0$$
$$4\,t.\ dt. + t_1\, dt_1 + t_2\, dt + t_3\, dt_3 + t_4\, dt_4 = 0$$

Помноживши прву од ових једначина са неодређеним за сада бројем A и сравњујући коефијенте код dt_1, dt_2, dt_3 и dt_4 добићемо:

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{4\,t = A\,[(\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_3 - \beta_3) - (\alpha_4 - \beta_4)]} \\ t_1 = A\,(\alpha_1 + \beta_1) & \qquad t_3 = A\,(\alpha_3 + \beta_3) \\ t_2 = A\,(\alpha_2 + \beta_2) & \qquad t_4 = A\,(\alpha_4 + \beta_4) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 19.)$$

а после замењивања ових вредности у условној једначини b.)

$$A \cdot \tfrac{1}{4}\,[(\alpha_1-\beta_1)-(\alpha_2-\beta_2)+(\alpha_3-\beta_3)-(\alpha_4-\beta_4)]^2+A\,\Sigma(\alpha+\beta)^2+ \\ +v=0$$; одакле

$$A=\frac{-v}{\tfrac{1}{4}\,[(\alpha_1-\beta_1)-(\alpha_2-\beta_2)+(\alpha_3-\beta_3)-(\alpha_4-\beta_4)]^2+\Sigma(\alpha+\beta)^2} \quad \ldots \quad 18.)$$

Замењујући напослетку ово А у једначинама бр. 19.) лако је израчунати t, t_1, ... t_4, а затим по формулама бр. 20.) и тражене поправке $\underline{x}$ и $\underline{y}$ свију осам углова у четвороуглу.

На тај начин рад равнања углова у геодетском четвороуглу са дијагоналама састоји се у следећем:

Прво се нађу поправке v_1, v_2 и v_3 трију триуглова по формулама:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= (1+2+3+4)-(180+\varepsilon_1) \\ v_2 &= (3+4+5+6)-(180+\varepsilon_2) \\ v_3 &= (5+6+7+8)-(180+\varepsilon_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 15.$$

где 1, 2 . . . . 8, означавају дате углове (сведене на центре) а ε сферне ексцесе триуглова. — Затим по формули бр. 16.) израчунавају се помоћне величине $\underline{u}$ и претходне (приближне) поправке (1), (2) . . . . (8), свију осам углова.

Додавајући поправке (1), (2) . . . . . угловима 1, 2 . . . . . изравнавају се логаритми њихових синуса, а узгред се из таблица узимају и вредности α и $\underline{\beta}$.

Са овим величинама израчунава се:

$$\left.\begin{aligned} V=&\{\lg\sin[1+(1)]+\lg\sin[3+(3)]+\lg\sin[5+(5)]+\lg\sin[7+(7)]\}- \\ &-\{\lg\sin[2+(2)]+\lg\sin[4+(4)]+\lg\sin[6+(6)]+\lg\sin[8+(8)]\} \end{aligned}\right\} 17.)$$

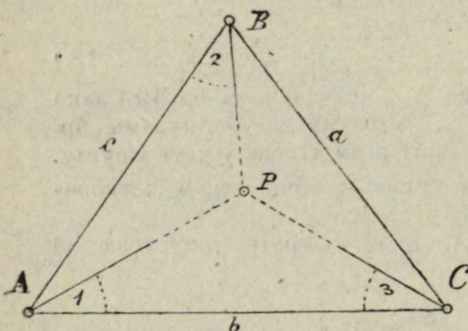
и број А по формули бр. 18.)

На послетку се срачунају помоћне величине t, t_1, t_2, t_3 и t_4 по формули бр. 19.) и друге поправке за свих осам углова по формули бр. 20.)

Пример: види прилог бр. 4.

Равнање страна.

Рецимо да је на усамљену тачку P. (22) посматрано са трију врхова првокласног триугла ABC који је већ коначно срачунат, тако, да ни његови углови A, B и C нити стране a, b и c не подлеже поправкама. Пошто добивени из посматрања угли $\overline{1}$ = ACP, $\overline{2}$ = ABP и $\overline{3}$ = ACP нису улазили у општи рачун равнања мреже, то после срачунавања засебних триуглова BCP, CAP и ABP за опште или стране AP, BP и CP добиће се, у опште говорећи, различите величине. Условне једначине можемо саставити сравњењем на које од тих страна; узмимо напр. страну



сл. 22

AP. Означивши ексцесе троуглова ACP и ABP са ε_1 ε_2 имаћемо по цртежу:

из троугла ACP.... $AP = b \dfrac{\sin\left(3 - \frac{1}{3}\varepsilon_1\right)}{\sin\left[180^0 + \varepsilon_1 - (1+3) - \frac{1}{3}\varepsilon_1\right]}$

из троугла ABP ... $AP = c . \dfrac{\sin\left(2 - \frac{1}{3}\varepsilon_2\right)}{\sin\left[180^0 + \varepsilon_2 - (A - + 1 + 2) - \frac{1}{3}\varepsilon_2\right]}$

одакле треба да буде:

$$b . \sin\left(3 - \frac{1}{3}\right) \sin\left(A - 1 + 2 - \frac{2}{3}\varepsilon_2\right) = c . \sin\left(2 - \frac{1}{3}\varepsilon_2\right) \sin\left(1 + 3 - \frac{2}{3}\varepsilon_1\right)$$

У самој ствари, због грешака посматрања, потпуне једнакости ту неће бити, и узев логаритме обеју половина ове једначине добићемо:

$$\lg b + \lg\sin\left(3 - \frac{1}{3}\varepsilon_1\right) + \lg\sin\left(A - 1 + 2 - \frac{2}{3}\varepsilon_2\right) -$$
$$- \lg c - \lg\sin\left(2 - \frac{1}{3}\varepsilon_2\right) - \lg\sin\left(1 + 3 - \frac{2}{3}\varepsilon_1\right) = V \quad . \; . \; . \; 21.)$$

где v означава грешку стране израженој у логаритамским децималима. Називајући ради краткоће промене логаритама синуса углова 3, $(A + 1 - 2)$, 2 и $(1 + 3)$ словима α, β, γ и δ, а тражене поправке углова одговарајућим цифрама у загради, добићемо следећу угловну једначину:

$$\alpha(3) - \beta(1) + \beta(2) - \gamma(2) - \delta(1) - \delta(3) + V = 0$$

$$\text{или} \; - (\beta + \delta)(1) + (\alpha - \gamma)(2) + (\alpha - \delta)(3) + V = 0 \quad . \; . \; . \; a.)$$

одакле по општој теорији решења условних једначина добијамо

$$\left.\begin{aligned} (1) &= -(\beta + \delta) . K \\ (2) &= (\beta - \gamma) . K \\ (3) &= (\alpha - \delta) . K \\ K &= \frac{v}{(\beta+\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 22$$

Ако би усамљена тачка била посматрана не са три већ са много, у опште, n тачака, то онда треба саставити (n — z) једначина облика a.) и решити их по општим правилима за решавање група условних једначина.

Овде је неопходно приметити, да ако је на некој од тачака нпр. на A. измерен не само угао 1 = CAP, него још и угао BAP, то, пре него што се приступи састављању условних једначина, треба свести њихову суму на величину углова $A = \overline{BAC}$ (тј. поделити грешку по пола) а затим већ радити по предидућем, или увести засебну једначину сума.

Имајући у виду малу тачност посматрања на усамљене тачке (обично са мало гируса), као и ту околност, што положај усамљених тачака никада не служи основом за даља одређивања и срачунавања, — многи се задовољавају при равнању њиховом, не узимајући у обзир сферне ексцесе због чега једначине бр. 21.) добијају простији вид; при већем броју таких тачака ово упрошћавање има свога практичног значаја.

Осим тога за равнање праваца управљених на усамљену тачку прибегавају кад кад и графичкој методи равнања, која је у следећем оделку изложена и објашњена.

Пример: види прилог бр. 5.

Графичко равнање.

Ако је нужно израчунати положај усамљене тачке, која је посматрана са n већ изравнатих тачака тријангулације, то је, при строгој примени методе најмањих квадрата, — неопходно потребно решити n — 2 условне једначине страна. Услед сложености коефицијената, решење ових једначина довољно је отежано, а међутим нема стварнога преимућтва, за то што усамљене тачке не служе основом за даља рачунања и мале погрешке у њиховом положају не могу имати практичног значаја. Сасвим их не равнати, разуме се да је опасно, због тога што разлике у срачунатим странама могу повести ка сумњама при срачунавању географских координата. — У таквим случајевима се веома често примењује метода графичког равнања, чија је суштина у следећем:

Са угловима добивеним непосредно из посматрања (разуме се сведеним на центре) израчунавају се сви триугли, који имају заједнички врх у усамљеној тачци. Додирне стране тих триуглова изаћи ће, у опште говорећи, неједнаке. По тим њиховим разликама црта се у произвољној размери фигура грешака; најбоље је почети конструкцију од највеће разлике и углове конструисати обичним транспортером. Засебне тачке пресека страна фигуре погрешака претављаће разне положаје усамљене тачке, онако како се они добијају из посматрања. — Затим се прави положај тачке уцртава просто од ока, тако, да она заузме неки средњи положај; при томе се одбацују веома удаљени пресеци, који долазе због веома оштрих пресека визура. На послетку се са уцртане тачке спуштају управне на све правце, који постоје, па се срачунавају поправке одговарајућих углова по формули:

$$K'' = x \cdot \frac{p}{s} = [5.3144]\ \frac{p}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23.)$$

где K означава поправку дотичног угла у секундама, p и s дужине перпендикулара и одговарајуће стране, а $x = \frac{1}{\sin 1''} =$ $= 206\ 265$. — Знак поправке угла лако је оценити на самом цртежу.

Разлике страна, које су неопходно потребне за конструкцију фигуре погрешака, можемо разуме се, одредити прелазом од логаритама страна к њиховим бројним вредностима, али их је још простије срачунати по обрасцу:

$$\triangle s = s \cdot \frac{\triangle \lg s}{M} = [3 \cdot 3622] \cdot s \cdot \triangle \lg s \quad . \quad . \quad . \quad 24)$$

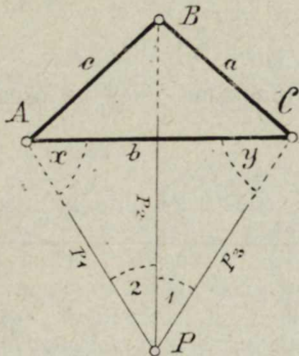
у којој је разлика међу логармима једне и исте стране $\triangle \lg s$ изражена у јединицама седме логаритамске децимале, а разлика стране $\triangle s$ добија се у оним истим јединицама у којима је изражена и општа страна s. M је модус Бригових логаритама.

Разлике страна су обично тако мале да се цртеж може конструисати у природној величини. Ако је пак потреба да се уцрта у смањеној размери нпр. 10. пута мањој, то потпуног изравнања услед грешака построја, може и да не буде одмах; у том случају се са овако исправљеним углима понавља рачун и по предходном, после чега је консрукција фигуре погрешака сигурно могућа у природној величини размери, уцртавање коначне тачке није тешко за искусног рачунђију, неискусном се може дати савет, да цртеж конструише на квадриранoj хартији и да положај коначне тачке одређује тако, да правоугле њене координате буду равне средњем аритметиском из одговарајућих координата свију тачака пресека.

Пример: види прилог **бр 6**.

Потенотов (Снелијев) проблем

Дешава се по кадкад потреба да се одреди тачка, која у своје време, — када је вршена околна тријангулација, — није посматрана. Такву тачку, разуме се, можемо одредити по општим правилима т. ј. посматрати је са најмање двеју прећашњих тачака, а ради контроле и са треће и т. д. Али је много простије извести посматрања само са те нове тачке, т. ј. измерити углове међу старим тригонометријским знацима који се са ње виде. Такво решење задаће познато је под називом решења Потенотовог (или Снелијевог) проблема, који се врло често употребљује у нижој геодезији при премеравању столом. Овде ћемо изложити аналитичко решење ове задаће, прво на равни а затим сферној површини.



сл. 23.

1. Нека су са нове тачке P (сл. 23.) измерени углови 1 и 2 међу старим тачкама A, B и C већ срачунате тријангулације. Да би се створила могућност одредбе растојања P_1, P_2 и P_3 тачке P од A од B и од C. довољно је одредити само угле PAC = x и PCA = y. — Из триугла ACP имамо:

$$x + y + 1 + 2 = 180^0$$

$$x + 1 = 180^0 - (y + 2) \text{ или}$$

$$\sin (x + i) = \sin (y + 2) \quad . \quad . \quad a.)$$

а из четвороугла ABCP узевши за полус тачке B:

$$\frac{a}{P_2} \cdot \frac{P_2}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{\sin 1}{\sin (c + y)} \cdot \frac{\sin (A + x)}{\sin 2} \cdot \frac{\sin C}{\sin A} = 1.$$

или:

$$\sin 1 \cdot \sin \ (A + x) \text{ sn} \ . \ \sin C = (C + y) \cdot \sin 2 \sin A \quad . \quad . \quad . \quad b.)$$

Помножив обе стране једначине a.) са sin A. sin C. и одредивши од овог резултата једначину b.) добићемо после скраћивања:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A \cdot \sin (C - 2)}{\sin C \cdot \sin (A - 1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c.)$$

означивши другу страну ове једначине са cotg Θ, то после неких трансформација и заменом x+y са $180^0 - (1+2)$ лако је добити:

$$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \operatorname{tg} (45^0 - \Theta) \cdot \operatorname{cotg} \frac{1 + 2}{2}$$

На тај начин за аналитичко решење ове задаће на равни добијамо следећу систему формула:

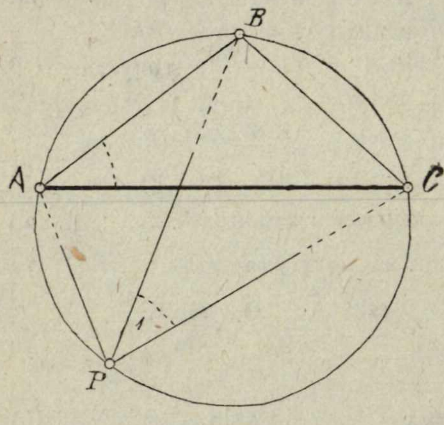
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{cotg} \Theta = \dfrac{\sin A \cdot \sin (C - 2)}{\sin C \cdot \sin (A - 1)} \\ \operatorname{tg} \dfrac{x - y}{2} = \operatorname{tg} (45^0 - \Theta) \operatorname{cotg} \dfrac{1 + 2}{2} \\ x + y = 90^0 - \dfrac{1 + 2}{2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25.)$$

Лако је видети да је решење задаће немогуће онда, када се за tg Θ добије величина неодређености, т. ј. када су дани углови везани једначинама:

$$\sin A \cdot \sin (C - 2) = 0$$
$$\sin C \cdot \sin (A - 1) = 0$$

Пошто угли $\underline{A}$ и $\underline{C}$, у опште говорећи, нису ни желени 180°, то ове једначипе дају:

$$C = 2 \text{ и } A = 1$$



сл. 24.

Из сл. 24. је појмљиво, да се у таком случају тачка P налази на периферији круга, орисаног око триугла: ABC, т. ј. околност, која је позната и из графичког решења Потснотове задаће.

Знаци углова: $\underline{A}$, $\underline{C}$ $\underline{x}$ и $\underline{y}$ зависе од положаја тачке P, — која се одређује, — у односу према триуглу ABC. — Формуле бр. 25.) изведене су из сл. 23. т. ј. када је тачка P ван триуглова ABC и наспрам једне од њихових страна. Ако се P налази унутра у триуглу ABC, то знаке углова $\underline{x}$ и $\underline{y}$ треба рачунати као одречне; то ипак не мења знак код Θ, због тога што у изразу c.) $\underline{x}$ и $\underline{y}$ мењају своје знаке једновремено. Ако ли се тачка P налази ван триугла ABC, али према једном од углова његових (т. ј. ако је тачка P у унутрашњости триугла ACP) то углове A и C просто рачунати као одречне; другим речима: За такав случај угао Θ треба израчунати по формули:

$$\operatorname{Cotg} \Theta = \frac{\sin A \cdot \sin (C + 2)}{\sin C \cdot \sin (A + 1)}$$

Пример: види прилог бр. 7.

2. На Фсерној површини веза међу угловима $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{1}$ и $\underline{2}$ оваква су:

$$x + y + 1 + 2 = 180^0 + \varepsilon$$

где је ε сферни ексцес троугла ACP (сл. 23). Због тога ће једначина а) добити овај облик:

$$\sin (x + 1) = \sin (y + 2 - \varepsilon)$$

или замењујући због малог ε његов $\underline{\sin \varepsilon}$ са $\frac{\varepsilon}{x}$ $(=\varepsilon'' \sin 1'')$ и $\cos \varepsilon$ са 1

$$\sin(x+1) = \sin(y+2) - \frac{\varepsilon}{x} \cdot \cos(y+2)$$

Множећи обе стране ове једначине са sin A sin C и одузимајући одатле по члановима једначину b), која остаје у вредности и за сферну површину, добићемо после скраћивања:

$$\frac{\sin x}{\sin y} \cdot \frac{\sin A . \sin(C-2)}{\sin C . \sin(A-1)} \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon \sin C \cos(y+2)}{x \sin(C.-2) \sin y}\right] \ldots d)$$

но ε као што је познато може бити преставлјено овако:

$$\varepsilon - [4] \cdot \frac{b^2 . \sin x . \sin y}{\sin(1+2)}$$

Замењујући ово у предходној формули d) и означујући ради краткоће израз:

$$[4] \frac{b^2 . \sin x \sin C . \cos(4+2)}{x . \sin(1+2) . \sin +(C-2)+} \text{ са } u$$

добићемо

$$\operatorname{cotg} \Theta = \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A . \sin(C-2)}{\sin C . \sin(A-1)} \cdot (1-u) \;\ldots\ldots\; e)$$

Пошто је u увек веома мала величина, то ће у логаритамском облику бити:

$$\lg \operatorname{cotg} \Theta = \lg \frac{\sin A . \sin(C-2)}{\sin C . \sin(A-1)} - M . u$$

где други члан M . u (M модус Бригових логаритама) изражава поправку првога члана у јединицама последње децимале логаритамске).

На тај начин за аналитичко решење Потенотовог проблема на сферној површини добијамо следећу систему формула:

$$\left.\begin{array}{l} u = [4] \cdot \dfrac{b^2 \sin x . \sin . C \cos(y+2)}{x \sin(1+2) \sin(C-2)} \\ \varepsilon = [4] \cdot \dfrac{b^2 \sin x \sin y}{\sin(1+2)} \\ \operatorname{cotg} \Theta = \dfrac{\sin A . \sin(C-2)}{\sin C \sin(A-1)} \cdot (1-u) \\ \operatorname{tg} \dfrac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(45^0 - \Theta) \cdot \operatorname{cotg} \dfrac{1+2-\varepsilon}{2} \\ \dfrac{x+y}{2} = 90^0 - \dfrac{1+2-\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \ldots\ldots 26.$$

Осим оних напомена, учињених поводом оних формула за решење задаће на равни, овде имамо да додамо: да за израчунавање u и ε треба предходно решити задаћу на равни. Ово претходно срачунавање по пормулама бр. 25. довољно је извести помоћу логаритама од четири децимале.

Равнање Потенотових тачака.

Ако су са нове тачке, коју ваља одредити, посматране само три тачке старе тријангулације, то ће се добити све што је потребно за њено срачунавање, али без сваке контроле. Али ако су посматране четири или више тачака пређашне тријангулације, то се засебна рачунања узајамно могу контролисати, али је у исто време неопходно потребно произвести још и равнање, да би довели у потпуну сагласност одредбу нове тачке по свима различитим датима. У томе случају број условних једначина раван је броју посматраних праваца минус три (необходно потребних).

За добијање условних једначина најпростије је користити се сравнењем бројних величина, које се добијају по формули е) (на равни $u = 0$). Наиме из двају система одређивања добија се једначина:

$$\frac{\sin A \,.\, \sin (C - 2)}{\sin C \,.\, \sin (A - 1)}(1 - u) = \frac{\sin A_1 \,.\, \sin (C_1 - 2_1)}{\sin C_1 \,.\, \sin (A_1 - 1_1)}(1 - u_1) \;\ldots\ldots \text{a)}$$

Ако овде поставимо посматране углове, то једначина — у опште говорећн, — неће бити задовољена, тако да после логаритмисања обеју страна и преноса свију чланова на нову страну неће се добити 0, већ нека величина V т. ј. биће:

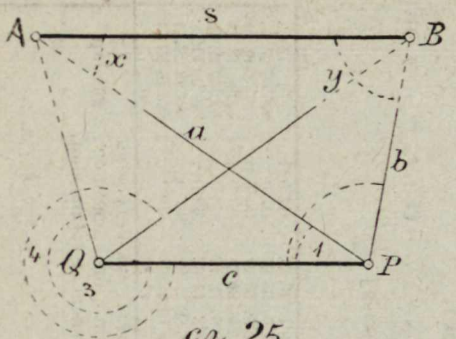
$$\lg \sin A + \lg \sin (C - 2) - \lg C - \lg (A - 1) - \lg \sin A_1 - \lg \sin (C_1 - 2_1) + \\ + \sin (C_1 - 2_1) + \lg \sin C_1 + \lg \sin (A_1 - 1'_1) - M (u - u_1) = V \;.\;.\; \text{b.)}$$

Решење сличних условних једначина ничим се не разликује од решења условних једначина синуса. Овај је облик особито згодан због тога, што, ако би се у тријангулацији десила тачка, која се одређује помоћу многих праваца проблемом Потенотовим, то се сличне једначине могу решити заједнички са осталим условним једначинама.

Пример: види прилог бр. 8.

Ханзенов проблем.

По неки пут се може десити потреба, да се одреди нова тачка, са које се виде само две тачке пређашње тријангулације. У том случају се бира још једна помоћна тачка, са које треба да се виде и обе тачке старе тријангулације. Тако одређивање тачке



сл. 25.

преставља задаћу, чије је решење дао Ханзен (1795-1874)

Нека A и B престављају (сл. 25.) две тачке прећашње тријангулације, чији је положај па и растајање s између њих познато. За одредбу нове тачке P неопходно је потребно израчунати углове x и y, који су састављени правцима на P са тачака A и B и њиховог узајамног правца (s).

На новој тачки P и помоћној Q треба измерити угле 1, 2, 3 и 4, који се разликују тако, како је то показано на слици т. ј. као почетак за бројање (степена) углова треба узети праву PQ.

Из триугла ABP

$$x + y + (2 - 1) = 180^0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad a.)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin y}{\sin x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad b.)$$

Ради искључења непознатих страна a и b имамо даље:

из триугла APQ . . . $\frac{a}{c} = \frac{\sin (360^0 - 3)}{\sin [180^0 - 1 - (360^0 - 3)]}$

из триугла PBQ . . . $\frac{b}{c} = \frac{\sin (360^0 - 4)}{\sin [180^0 - 2 - (360^0 - 4)]}$

Одакле после деобе прве са другом имамо:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 3 \cdot \sin (2 - 4)}{\sin 4 \cdot \sin (1 - 3)} \quad . \; . \; . \; . \quad c.)$$

Означив други део са tg Θ и сравњујући једначину b.) са c.), добићемо после неких трансформација, а користећи се једначином a):

$$\operatorname{tg} \frac{y - x}{2} = \operatorname{tg} (\Theta - 45^0) \operatorname{cotg} \frac{2 - 1}{2}$$

На тај начин за аналитичко решење Ханзенове задаће добијамо ову систему једначина:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin 3 \ \sin (4 - 2)}{\sin 4 \ \sin (3 - 1)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{y - x}{2} = \operatorname{tg} (\Phi - 45^0) \cdot \operatorname{cotg} \frac{2 - 1}{2}$$

$$\frac{y + x}{2} = 90^0 - \frac{2 - 1}{2}$$

Прилог бр. 9.

Равнање углова у четвороуглу.

Таблица бр. 4.

Број угла	Углови: Мерени ° ′ ″	Углови: Корекције по једначини угла	Углови: Изравнати по једначини углова ° ′ ″	log. sinus: Бројитеља	log. sinus: α 1″	log. sinus: Именитеља	log. sinus: α^{β} 1″	Корекције по синусној једначини	Изравнати углови по синусној једначини ° ′ ″	log. sinus: Бројитеља	log. sinus: Именитеља
1.	45 35 21,938	− $0,078_1$	45 35 $21,849_9$	9.853 9069_8	+ 20.9			+ 0.027	45 35 $21,876_9$	9.853 9069_9	
2.	43 37 38,366	− $0,078_1$	43 37 $38,287_9$			7 838 8267_8	+ 22.1	− 0.027	43 37 $38,260_9$		9.838 8268_2
3.	36 14 3,383	− $0,138_4$	39 14 $3,244_6$	9.771 6519_4	+ 28.8			+ 0·027	36 14 $3,271_6$	9.771 6520_2	
4.	54 32 59,002	− $0,138_4$	54 32 $58,863_6$			9 910 9544	+ 15.0	− 0.027	54 32 $58,836_6$		9.910 9543_5
5.	42 43 6,592	+ $0,181_4$	42 43 $6,773_4$	9.831 4842_4	+ 22.8			+ 0.027	42 43 $6,800_4$	9.831 4843_0	
6.	46 29 52,555	+ $0,181_4$	46 29 $52,736_4$			9 860 5476_7	+ 20.0	− 0.027	46 29 $52,709_4$		9.860 5476_2
7.	55 25 59,950	+ $0,241_6$	55 26 $0,171_6$	9.915 6462_8	+ 14.5			+ 0.027	55 26 $0,218_6$	9.915 6463_2	
8.	35 21 1,582	+ $0,241_6$	35 21 $1,833_6$			9.762 3610_2	+ 29.7	− 0.027	35 21 $1,796_6$		9.762 3609_4
				9.372 6893_9	+ 86.8	9.372 6898_7	+ 86.8			9.372 6896_3	9.372 6896_3
						9.372 6893_9	+ 86.8				
					V = +	0.000 0004_8	+173.6				

Грешке у троуглима

$\triangle BMC = V_1 = +0{,}433''$; $\triangle CMN = V_2 = -0{,}086''$ и $\triangle MNB = V_3 = -0{,}846$

Сверни ексцес

$\triangle BMC = E - 2{,}246''$, $\triangle CMN = E - 1{,}618''$ и $\triangle MNB = E\ 1{,}525''$

а) Једначине углова:

$$U = \tfrac{1}{2} V_1 - V_2 + \tfrac{1}{2} V_3 = -0{,}120_5$$

$$(1) = (2) = -\frac{V_1 + u}{4} = -0{,}078_1$$

$$(3) = (4) = -\frac{V_1 - u}{4} = -0{,}138_4$$

$$(5) = (6) = -\frac{V_8 - u}{4} = +0{,}181_4$$

$$(7) = (8) = -\frac{V_3 + u}{4} = +0{,}241_6$$

б) Једначине синуса:

$$A = \frac{v}{\frac{1}{4}[(\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_3 - \beta_3)(\alpha_4 - \beta_4)]^2 + \Sigma(\alpha + \beta)^2} = +0{,}0004 \quad \lg A \,..\, 6.80409$$

$$4t = A[(\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) + (\sigma_3 - \beta_3) - (\alpha_4 - \beta_4) = +0{,}000445$$

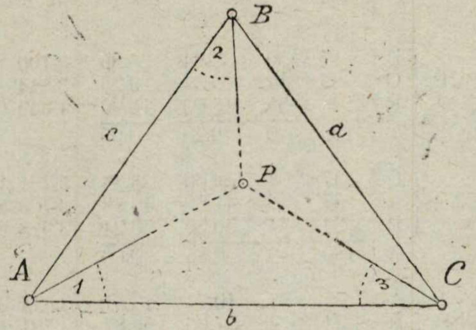
$$t_1 = A(\alpha_1 + \beta_1) = +0.0273$$
$$t_2 = A(\alpha_2 + \beta_2) = +0.0279$$
$$t_3 = A(\alpha_3 + \beta_3) = +0.0273$$
$$t_4 = A(\alpha_4 + \beta_4) = +0.0282$$

$$x_1 = +t + t_1 = +0.027$$
$$x_2 = +t + t_2 = +0.027$$
$$x_3 = +t + t_3 = +0.027$$
$$x_4 = +t + t_4 = +0.027$$

$$y_1 = +t - t_1 = -0.027$$
$$y_2 = -t - t_2 = -0.027$$
$$y_3 = +t - t_3 = -0.027$$
$$y_4 = -t - t_4 = -0.027$$

Равнање страна по теорији најмањин квадрата.

Таблица бр. 5.



	Сверни углови °	′	″	равни ″	lg стране
A =	64	43	51.74	51 40	4.049 0100
B =	42	3	30.94	30 60	3.918 6940
C =	73	12	38 34	38 00	4.073 7721
Σ =	180	0	1.02	0 00	

	Очитани углови °	′	″	Св. ексцес ″
CAP = 1 =	37	6	41	
AБP = 2 =	24	12	57	Σ_1 = 0·39
ACP = 3 =	47	58	29	Σ_2 = 0·36

Бројитељ	α 1″	Именитељ	α″
lg A C . . 3.918 6940		lg A B . . 4.073 7721	
$\lg\sin(3 - \frac{1}{3}\Sigma_1) = \lg\sin$		$\lg\sin(2 - \frac{1}{3}\Sigma_2) = \lg\sin$	
$\lg\sin(A - 1 + 2 - \frac{2}{3}\Sigma_2) = \lg\sin$		$\lg\sin(1 + 3 - \frac{2}{3}\Sigma_1) = \lg\sin$	
47° 58′ 28.″88 9.870 9007	$\alpha = +19.0$	24° 12′ 56.″87 9.612 9687	$\gamma = +46.8$
51 50 7.48 9.895 5545	$\beta = +16.9$	85 5 9.76 9.998 4008	$\delta = +1.8$
3.685 1492		3.685 1416	
3.685 1416			
V = + 76			

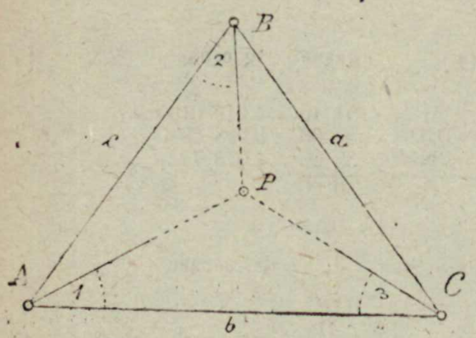
$$K = -\frac{v}{(\beta+\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2}$$

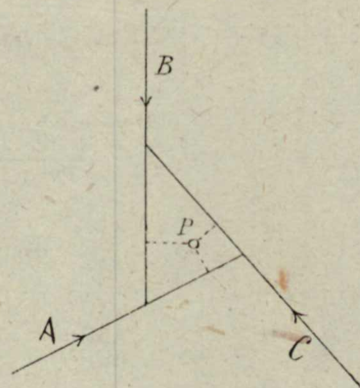
lg K = 8.6908 n

$$(1) = -(\beta+\delta)\cdot K = +0.''90$$
$$(2) = (\beta-\gamma)\cdot K = +.49$$
$$3 = (\alpha-\delta)\cdot K = -0.8$$

Графичко равнање.

Таблица бр. 6.





Троугао	Тачка	Сверни углови °	′	″	равни ″	lg. стране
Δ BCP	B	17	50	33.94	33.85	3.700 8848
	C	25	14	9.34	9.25	3.844 3507
	P	136	55	17.00	16.90	4.049 0100
	Σ =	180	0	0.28	0.00	
Δ CAP	C	47	58	29.00	28.88	3.791 1939
	A	37	6	41.00	40.88	3.700 8741
	P	94	54	50.36	50.24	3.918 6940
	Σ =	180	0	0.36	0.00	
Δ ABP	A	27	37	10.74	10.61	3.844 3605
	B	24	12	57.00	56.87	3.791 1862
	P	128	9	52.65	52.52	4.073 7721
	Σ =	180	0	0.39	0.00	

Разлике увезујућим странама у јединици седмог логарит. знака:

AP = 77; BP = 98 и CP = 107.

Уз троугла погрешности очитано даје:

$P_1 = 0.028$; $P_2 = 0.041$ и $P_3 = 0.032$

$$\triangle s = s \cdot \frac{\triangle \lg s}{M} = [3.3622] \cdot s \cdot \triangle \lg s$$

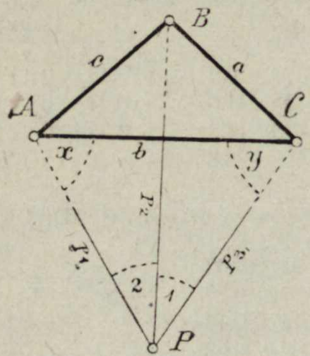
$\triangle s_1 = 0.109$; $\triangle s_2$ 0.157 и $\triangle s_3 = 0.124$

$$K'' = Z \cdot \frac{P}{S} = [5.3144]\,\frac{P}{S}$$

$K_1'' = +\,0.94''$; $K_2'' = +\,1.20''$ и $K_3'' = -\,1.32''$

Потенотов (Снелијев) проблем.

Таблица бр. 7.



I. На равни

Дато

$A = 39^{\circ}\ 14'\ 0.1$
$B = 85\ \ 46\ \ 30.0$
$C = 54\ \ 59\ \ 29.9$

Очитани углови

$1 = 5\ \ 59\ \ 14.0$
$2 = 36\ \ 3\ \ 14.8$

lg стране

3.594 1876
3.791 9587
3.706 4607

log стране

$$\operatorname{cotg} \Theta = \frac{\sin A \cdot \sin (C-2)}{\sin C \cdot \sin (A-1)} \qquad \Theta = 65^{\circ}\ 26'\ 3.4'' \qquad P_1\ 3.929\ 8241$$

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(45^{\circ}-\Theta)\operatorname{cotg}\frac{1+2}{2} \qquad x = 24\ \ 51\ \ 54.0 \qquad P_2\ 3.890\ 7010$$

$$\frac{x+y}{2} = 90^{\circ} - \frac{1+2}{2} \qquad y = 113\ \ 5\ \ 37.2 \qquad P_3\ 3.589\ 8472$$

II., на сверној површини

сверни ексцес $\triangle$ ABC $= 0.23''$

$\Theta = 65\ \ 26 \qquad \Sigma = 0.26''$

$x = 24\ \ 52 \qquad u = [4] \cdot \dfrac{b^2\, x \cdot \sin C \cdot \cos (y+2)}{z \cdot \sin (1+2) \cdot \sin (c-2)} = -\,0.000\ 0029$

$y = 113\ \ 6 \qquad M \cdot n = -\,0.000\ 0013$

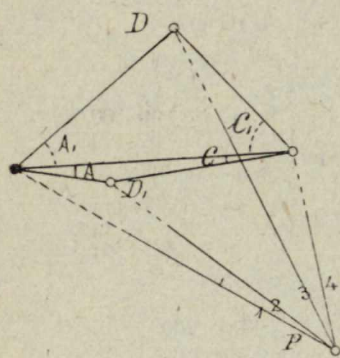
$$\operatorname{cotg}\Theta = \frac{\sin A \cdot \sin (C-2)}{\sin C \cdot \sin (A-1)}(1-n) = 65^{\circ}\ 26'\ 3.11'' \qquad \lg P_1\ 3.929\ 8246$$

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(45^{\circ}-\Theta)\operatorname{cotg}\frac{1+2-\Sigma}{2} \qquad x = 24\ \ 51\ \ 54.36 \qquad \lg P_2\ 3.890\ 7018$$

$$\frac{x+y}{2} = 90^{\circ} - \frac{1+2-\Sigma}{2} \qquad y = 113\ \ 5\ \ 37.10 \qquad \lg P_3\ 3.589\ 8486$$

Равнање Потенотових тачака.

Таблица бр. 8



	Измерени правци на ⊙ P			корекције	изравати правци		
	°	'	"	"			
1 =	0	0	0.0	− 0.43	0	0	0.0
2 =	6	18	41.6	+ 0.34	6	18	42.37
3 =	36	3	14.8	+ 0.23	36	3	15.46
4 =	42	2	28.8	− 0.13	42	2	29.10

Углови у четвороуглу AD_1 CD:

	°	'	"
A	6	52	18.02
C	3	57	0.20
A_1	39	14	0.18
C_1	54	59	29.98

lg AC = 3.791 9587

Помоћне величине: u у △ ADC = − 0.000 000 26
u_1 у △ AD_1C = − 0.000 002 92

Бројитељ		σ_1''	Именитељ		σ_1''
lg A	9.077 8981.1	·	lg A_1	9.801 0472.6	
lg C + (2 − 1)	9.250 7686.3	+ 116.3	lg C_1 − (3 − 1)	9.511 2647.1	+ 61.4
lg C	8.838 1365.0	·	lg C_1	9.913 3202.7	·
lg A + (4 − 2)	9.830 5210.5	+ 22.9	lg A_1 − (4 − 3)	9.738 9685.0	+ 32.2
	9.660 0091.9			9.660 0232.0	
			M +	11.6	
				9.660 0243.6	
				9.660 0091.9	
			V = −	151.7	

условна једначина:

$$-177{\cdot}7\,(1) + 139{\cdot}2\,(2) + 93{\cdot}6\,(3) - 55{\cdot}1\,(4) - 151{\cdot}7 = 0$$

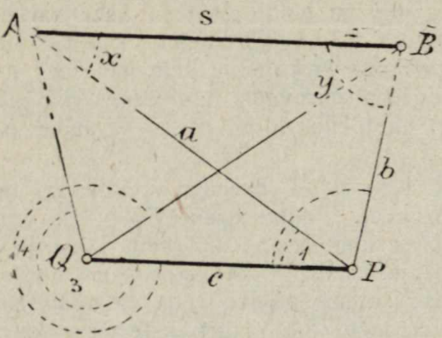
нормална једначина:

$$[aa]\,K + V = 0$$

$$62\,750\,K - 151{\cdot}7 = 0 \qquad \lg K = 7.3834$$

Поправке: (1) = a_1 K; (2) a_2 K; (3) a_3 K и (4) a_4 K.

Ханзенов проблем. Таблица бр. 9.



Очитани углови:

	°	′	″
1	36	3	14·8
2	42	2	28·8
3	295	54	5.9
4	335	8	6·0

$$\lg \Theta = \frac{\sin 3 \cdot \sin(4-2)}{\sin 4 \cdot \sin(3-1)}$$

$$\Theta = 63\ 25\ 32{\cdot}5$$

$$\mathrm{tg}\frac{y-x}{2} = \mathrm{tg}(\Theta - 45^\circ)\,\mathrm{cotg}\frac{2-1}{2}$$

$$x = 5\ 55\ 38{\cdot}8$$

$$\frac{y+x}{2} = 90^\circ - \frac{2-1}{2}$$

$$y = 168\ 5\ 7{\cdot}2$$

Rad komisije za razgraničenje Jugoslavije i Austrije.

Koncem augusta o. g. počela je da radi komisija za razgraničenje Jugoslavije i Austrije. Informacije o radu te komisije dobili smo od našega kolege g. Adolfa Götzla, koji sam u njoj saradjuje.

Zasada je zadaća ove komisije, da točno odredi, označi i izmeri onaj deo Jugoslavensko-Austrijske medje, koji je odredjen navodima mirovnog ugovora u St. Germainu 10. septembra prošle godine u duljini od 133 km, od Kokošnjaka do madžarske granice preko Mure.

Osim jugoslavenskih i austrijskih članova, ova komisija sadržava po jednoga delegata Velike Britanije, Francuske, Japana i Italije.

Naši su članovi general Plivelić kao predsednik, zatim kao pravni stručnjak savetnik Dr. Pitamic, mernički stručnjaci geometri Kotubra, Götzl i Jeras, te topografi majori Ploetz i Verhunc od Vojnog Geografskog Instituta.

Radi bolje organizacije rada razdeljena je čitava granica u 16 odsečaka, od kojih svaki sadržava 6--14 km. granice.

Baza svega rada je topografska karta u merilu 1 : 25000, pa je stoga zadaća topografa (a ti su naši, austrijski i pojedinih de-